第 1 章 拓扑空间与连续映射

1.1 度量空间与连续映射

1.1.1 度量结构

¶ 一些定义

在数学中，度量是“距离”这个概念的抽象化，最早由法国数学家 Fréchet [1]引入：

定义 1.1.（度量空间）

若 X 是一个集合，而映射

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

满足如下条件：对于任意 $x, y, z \in X$，均有

(a) (**正定性**) $d(x, y) \geq 0$, 而且 $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(b) (**对称性**) $d(x, y) = d(y, x)$,

(c) (**三角不等式**) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$,

则我们称 (X, d) 为一个**度量空间**，且称 d 为 X 上的一个 **度量**。♣

注 1.2. 不难发现，$d(x, y) \geq 0$ 是其他几条公理的直接推论。另一方面，通过减弱上述条件中的某一个或某几个，也可以得到度量空间的某些合理推广。

我们可以把欧氏空间中的很多定义推广到抽象度量空间中去，比如

定义 1.3.（有界性）

设 (X, d) 是一个度量空间，而 $A \subset X$ 为一个子集。我们称

$$\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y \in A} d(x, y)$$

为集合 A 的**直径**。若 $\operatorname{diam}(A) < +\infty$，我们称 A 为**有界集**，否则称 A 为**无界集**。特别地，如果 $\operatorname{diam}(X) < +\infty$，我们称 (X, d) 为**有界度量空间**。♣

在度量空间 (X, d) 中，我们也可以自然定义开球、闭球和球面等几何概念：

定义 1.4.（球与球面）

以 (X, d) 中点 x_0 为中心，半径为 r 的**开球**、**闭球**和**球面**分别定义为

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\},$$

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq r\},$$

$$S(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) = r\}.$$

♣

[1]弗雷歇 (René Maurice Fréchet，1878–1973)，法国数学家，现代分析的奠基人之一，对概率统计等领域也有重要贡献。他师承著名数学家 Jacques Hadamard，1906 年毕业于法国高等师范学院。在其博士论文中，弗雷歇提出了抽象度量空间的概念，开启了在抽象空间中研究分析学的新时代。

有了开球的概念，又可以如欧氏空间中一样定义开集和闭集的概念：

定义 1.5.（开集和闭集）

设 (X,d) 是一个度量空间，$U \subset X$. 如果对于任意 $x \in U$，均存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$B(x,\varepsilon) \subset U,$$

则我们称子集 $U \subset X$ 是一个 **开集**。如果子集 $F \subset X$ 的补集 $F^c = X \setminus F$ 是开集，则称 F 为一个**闭集**。♣

不难由定义验证度量空间中的开球都是开集，而闭球都是闭集。

¶ 一些例子

度量空间的概念来源于欧氏空间的距离结构。下述例子表明度量空间事实上广泛存在于各个不同的数学分支中：

例 1.6.

(1) (**离散度量**) 在任意集合 X 上，均可定义如下度量，称为离散度量：

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1 & x \neq y. \end{cases}$$

不妨思考一下：离散度量空间 $(X, d_{discrete})$ 中的开球、闭球、球面分别是什么？

(2) ($\mathbb{R}^n$ **上的各种度量**) 在 $X = \mathbb{R}$ 上，我们不仅有如上定义的离散度量，还有

- 最简单的绝对值度量 $d(x,y) = |x-y|$.
- 有界度量 $\bar{d}(x,y) = \min\{|x-y|, 1\}$ (或 $\bar{d}(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$).

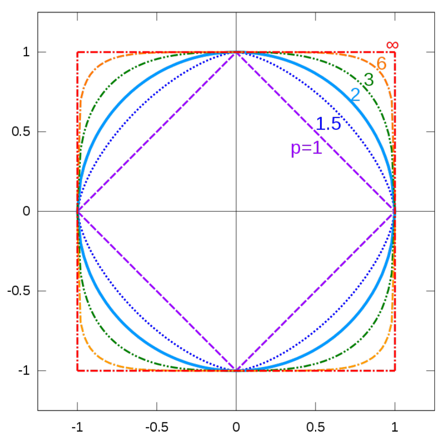
更一般地，在 $X = \mathbb{R}^n$ 上，我们有

- (通常的欧氏度量) $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$.
- (l^1 度量) $d_1(x,y) = |x_1-y_1| + \cdots + |x_n-y_n|$.
- (l^∞ 度量) $d_\infty(x,y) = \sup\{|x_1-y_1|, \cdots, |x_n-y_n|\}$.

事实上，这些度量都是如下 l^p $(1 \leq p \leq \infty)$ 度量的特例：

$$d_p(x,y) := \left(|x_1-y_1|^p + \cdots + |x_n-y_n|^p\right)^{1/p}.$$

对于不同的 p，下图展示了度量空间 $(\mathbb{R}^2, l^p)$ 中的单位球的形状（来自维基百科）



(3) (**$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 上的各种度量**) 在无限笛卡儿积

$$X=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mid x_n\in\mathbb{R}\}$$[2]

上，我们不能像上面一样定义“l^p 度量”，因为涉及到的求和有可能是发散的。但是，我们可以用 $\mathbb{R}$ 上的有界度量 $\bar{d}$ 来解决收敛性问题。比如，我们有

- (一致度量)
$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}):=\sup_{n\in\mathbb{N}}\bar{d}(x_n,y_n).$$
- (无穷乘积度量):
$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}):=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\bar{d}(x_n,y_n).$$

此外，在特定问题中我们需要使用无穷序列之间的 l^p 度量，此时我们可以通过“把 l^p 度量限制在合适的子集上”来解决收敛性问题：

- (l^p 空间, $1\le p\le\infty$) 考虑子空间
$$X=l^p(\mathbb{R}):=\left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\;\middle|\;\|x\|_p:=\left(\sum_n|x_n|^p\right)^{1/p}<+\infty\right\}\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}},$$
现在我们可以如下定义 l^p 度量：
$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}})=\|x-y\|_p.$$
- (Hilbert 立方体) 取
$$X=\prod_n[0,1/n]\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$
这是 $l^2(\mathbb{R})$ 的子集，所以自然继承一个 l^2 度量。

(4) (**函数空间上的度量**) 在区间 $[a,b]$ 上全体连续函数空间 $C([a,b])$ 上，我们有

- (L^1 度量)
$$d(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx.$$
- (L^∞ 度量)
$$d(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|.$$
- (L^2 度量)
$$d(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

它们都是 L^p 度量 ($1\le p\le\infty$) 的特例：
$$d(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

更进一步地，我们可以在 $[a,b]$ 上的全部 k 阶连续可导函数所构成的集合上，定义

[2] 和集合论中一样，我们使用记号 $Y^X=\{f:X\to Y\}$. 注意集合 $Y^{\mathbb{N}}$ 与 Y 中的点列全体构成的集合是相同的。有些作者更喜欢使用记号 $\mathbb{R}^\omega$, 而不是 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$W^{k,p}$ 度量

$$d(f,g)=\left(\sum_{i=0}^{k}\int_a^b |f^{(i)}(x)-g^{(i)}(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

这些度量在偏微分方程理论中有着重要价值。

(5) **(词度量)** 设 G 是一个群，$S\subset G$ 是一个生成子集 [3]，则 S 诱导的**词度量**为

$$d(g_1,g_2)=\min\{n:\exists s_1,\cdots,s_n\in S\cup S^{-1}\text{使得}g_1\cdot s_1\cdots s_n=g_2\}.$$

(6) **(图度量)** 设 $G=(V,E)$ 是一个连通图，则在顶点集 V 上可定义如下的图度量：

$$d(v_1,v_2)=\min\{n:G\text{中存在长度为}n\text{的道路连接}v_1\text{和}v_2\}.$$

事实上，(5) 中定义的词度量跟相应的 Caylay 图 $\Gamma(G,S)$ 上的图度量是一致的。

(7) (p **进度量**) 设 p 是一个素数. 那么，任意 $0\neq x\in\mathbb{Q}$ 可以唯一地表示为

$$x=p^n\frac{r}{s}$$

其中 $n,r,s\in\mathbb{Z}$ 且 $s>0$. 由此我们可以定义 $\mathbb{Q}$ 上的 p 进范数

$$|x|_p=p^{-n}\quad(\text{令}|0|_p=0),$$

而 $\mathbb{Q}$ 上的 p **进度量**则定义为

$$d(x_1,x_2):=|x_1-x_2|_p.$$

该度量在算术几何中有着重要意义。

(8) **(Hausdorff 度量)** 在 $\mathbb{R}^n$ 中的全体有界闭集构成的集合上，定义 Hausdorff 度量如下，

$$d(A,B)=\inf\{\varepsilon\geq 0:A\subset B_\varepsilon\ \text{且}B\subset A_\varepsilon\},$$

其中 $A_\varepsilon=\{y\in\mathbb{R}^n:\exists x\in A\ \text{使得}|x-y|\leq\varepsilon\}$ 是 A 的 ε-邻域。

¶ 从已有的度量空间构造新空间

我们也可以从已有的度量空间构造新的度量空间，最常见的构造是子集继承原空间度量而得到的子度量空间，以及在乘积空间上通过合适的方法定义的乘积度量空间。

命题 1.7.（子空间度量）

设 (X,d) 是度量空间，$Y\subset X$ 为子集，则

$$d_Y:=d|_{Y\times Y}$$

是 Y 上的一个度量。

证明 这是很显然的：对于任意 $y_1,y_2,y_3\in Y\subset X$，我们有

- $d_Y(y_1,y_2)=0\Longleftrightarrow y_1=y_2$.
- $d_Y(y_1,y_2)=d(y_1,y_2)=d(y_2,y_1)=d_Y(y_2,y_1)$.
- $d_Y(y_1,y_3)=d(y_1,y_3)\leq d(y_1,y_2)+d(y_2,y_3)=d_Y(y_1,y_2)+d_Y(y_2,y_3)$.

□

[3]如果 G 中的任何元素都可以写成 $S\cup S^{-1}$ 中有限多个元素的乘积，则子集 $S\subset G$ 称为**生成子集**。

更一般地，任意给定一个单射 $f: Y \to X$，那么我们可以将 Y 等同于子集 $f(Y) \subset X$，从而可以通过 X 上的度量 d_X 给出在 Y 上的诱导度量

$$d(y_1, y_2) := d_X(f(y_1), f(y_2)).$$

下面我们解释如何在笛卡尔积上构造合理的度量：

命题 1.8.（乘积度量）

如果 $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ 是度量空间，那么

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

是 $X_1 \times X_2$ 上的度量.

证明 验证如下：对于 $X_1 \times X_2$ 中的任意点 $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ 和 (z_1, z_2)，有

- $$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0 &\Longleftrightarrow d_1(x_1, y_1) = 0 \text{ 且} d_2(x_2, y_2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x_1 = y_1 \text{且} x_2 = y_2. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) &= d_1(y_1, x_1) + d_2(y_2, x_2) \\ &= d((y_1, y_2), (x_1, x_2)). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (z_1, z_2)) &= d_1(x_1, z_1) + d_2(x_2, z_2) \\ &\le d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1) + d_2(x_2, y_2) + d_2(y_2, z_2) \\ &= d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + d((y_1, y_2), (z_1, z_2)). \end{aligned}$$

□

注 1.9. 不同于子集上的子空间度量，对于度量空间的笛卡尔积我们可以用许多不同的方法给赋予"乘积度量"。例如，我们也可以定义

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

可以验证这是 $X_1 \times X_2$ 上的一个度量. 更一般地，若 $(X_1, d_1), \cdots, (X_n, d_n)$ 都是度量空间，则对于任意 $1 \le p \le \infty$，我们可以用下式定义 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 上的 l^p **型乘积度量**：

$$d_p((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) := \Big(d_1(x_1, y_1)^p + \cdots + d_n(x_n, y_n)^p\Big)^{1/p}.$$

为了在可数多个度量空间 (X_n, d_n) 的笛卡尔积 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 上显式地给出"乘积度量"，我们可以如例1.6(3) 一样，首先将每个 d_n 转换为有界度量

$$\bar{d}_n(x, y) = \min\{d_n(x, y), 1\}.$$

然后在笛卡尔积 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 上定义"l^∞ 乘积度量"

$$d_u((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{d}_n(x_n, y_n)$$

该度量被称为乘积空间 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ 上的**一致度量**。

¶ 等距同构、嵌入和 Lipschitz 映射

正如我们提到过的，对于给定结构的集合，我们希望研究集合之间保结构的映射：

定义 1.10.（等距同构）

设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 为度量空间。如果存在双射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$，使得对于任意 $x_1,x_2\in X$，都有

$$d_X(f(x_1),f(x_2))=d_Y(x_1,x_2),$$

则我们称 f 为一个 **等距同构**，并称度量空间 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 是 **等距同构的**. ♣

因为等距同构的度量空间具有完全相同的度量性质，我们视等距同构的度量空间视为 **相同的** 度量空间。当然，绝大部分度量空间不是等距同构的。以下两个概念稍微放宽了限制：

定义 1.11.（等距嵌入）

如果单射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 满足：对于任意 $x_1,x_2\in X$，均有

$$d_X(f(x_1),f(x_2))=d_Y(x_1,x_2),$$

则我们称 f 为一个（度量）**等距嵌入**。♣

显然，如果 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是一个等距嵌入，那么 (X,d_X) 与 (Y,d_Y) 的子空间 $(f(X),d_Y)$ 是等距同构的。

定义 1.12.（Lipschit 映射）

我们称映射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 为一个 Lipschitz 常数为 L 的 **Lipschit 映射**，如果对于任意 $x_1,x_2\in X$，均有

$$d_X(f(x_1),f(x_2))\le Ld_Y(x_1,x_2).$$

♣

注 1.13. 注意以上概念均强烈依赖于空间上所给定的度量。例如，考虑恒等映射

$$\mathrm{Id}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x.$$

现在考虑 $\mathbb{R}$ 上的两个度量，标准度量 $d(x,y)=|x-y|$ 和有界度量 $\bar d(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$，那么作为度量空间之间的映射，

$$\mathrm{Id}:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},d)\quad 和\quad \mathrm{Id}:(\mathbb{R},\bar d)\to(\mathbb{R},\bar d)$$

都是等距同构，

$$\mathrm{Id}:(\mathbb{R},d)\to(\mathbb{R},\bar d)$$

是一个 Lipschitz 映射但不是等距同构，而

$$\mathrm{Id}:(\mathbb{R},\bar d)\to(\mathbb{R},d)$$

不是一个 Lipschitz 映射。

1.1.2 度量空间之间的连续映射

¶ 收敛性和连续性

本课程的主要目标之一是研究连续函数和更一般的连续映射。对于度量空间之间的映射，定义连续性并不难：我们可以像在欧氏空间中一样，首先定义点列收敛的概念，然后通过收敛性来定义连续性。

定义 1.14.（收敛性） 设 (X, d) 是一个度量空间，(x_n) 为 X 中的一个点列。如果存在 X 中的点 x_0，满足：对于任意 $\varepsilon > 0$，均存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得对于所有 $n > N$，均有

$$d(x_n, x_0) < \varepsilon,$$

则我们称点列 (x_n)（关于度量 d）**收敛** 到点 x_0，记为 $x_n \xrightarrow{d} x_0$. ♣

有了收敛性，我们可以自然定义

定义 1.15.（连续性） 设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是两个度量空间，$f : X \to Y$ 为一个映射。

(1) 若对于在 X 中收敛到 x_0 的任何点列 (x_n)，像点点列 $(f(x_n))$ 都收敛到 Y 中的点 $f(x_0)$，则我们说映射 $f : X \to Y$ 在 $x_0 \in X$ 处是 **连续的**。

(2) 如果映射 f 在每个点 $x_0 \in X$ 处都是连续的，我们就称 f 是一个 **连续映射**. ♣

注 1.16. 当我们讨论函数 $f : (X, d_X) \to \mathbb{R}$ 的连续性时，除非另外说明，总是赋予 $\mathbb{R}$ 标准度量。

我们先给出下列映射在一点处连续的等价刻画，其证明跟数学分析中所学的完全一致，故而略去：

命题 1.17.（一点处连续的等价刻画）

$$\begin{aligned}
&\text{映射} f : (X, d_X) \to (Y, d_Y) \text{ 在} x_0 \in X \text{ 处连续} \\
\Longleftrightarrow &\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ 使得} \forall x \in X, d_X(x, x_0) < \delta, \text{ 我们有} d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \\
\Longleftrightarrow &\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ 使得} f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \\
\Longleftrightarrow &\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ 使得} B(x_0, \delta) \subset f^{-1}\big(B(f(x_0), \varepsilon)\big).
\end{aligned}$$

♠

由此不难看出度量空间之间的任何 Lipschitz 映射都是连续的。

¶ 连续映射的例子

度量空间之间映射连续性的概念是欧氏空间之间连续映射的自然推广。为了更好地理解度量空间中连续性的含义，让我们讨论一些简单的例子。

例 1.18.

(1) 设 (X, d) 是任何度量空间。

- 对于任何固定的 $\bar{x} \in X$, 函数

$$d_{\bar{x}} : X \to \mathbb{R}, x \mapsto d_{\bar{x}}(y) := d(x, \bar{x})$$

是连续的。

证明 对于 $\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in X$, 和 $\forall x \in X$ 满足 $d(x, x_0) < \varepsilon$, 我们有

$$|d_{\bar{x}}(x) - d_{\bar{x}}(x_0)| = |d(x, \bar{x}) - d(x_0, \bar{x})| \leq d(x, x_0) < \varepsilon.$$

(所以函数 $d_{\bar{x}}$ 实际上是一个 Lipschitz 常数为 1 的 **Lipschitz 映射**.) □

- 更一般地，对于任何子集 $A \subset X$，我们可以定义

$$d_A \colon X \to \mathbb{R}, \ x \mapsto d_A(x) := \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

可以证明 d_A 是连续的。

证明概要 首先利用三角不等式证明

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y).$$

然后可得要证结论。细节留作练习。 □

- 如果我们赋予 $X \times X$ 命题 1.8中的“乘积度量” $d_{X\times X}$, 那么函数 $d \colon X \times X \to \mathbb{R}$ 就是 $(X \times X, d_{X\times X})$ 上的连续函数。证明留作习题。

(2) 在空间 $X = C([a, b])$ 上赋予 l^∞ 度量

$$d(f, g) := \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

那么“积分映射”

$$\int : X \to \mathbb{R}, \ f \mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

是连续的，因为

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x \leq (b - a) \cdot d_X(f, g).$$

(3) 设 X 为任意集合，d_X 为 X 上的离散度量。设 (Y, d_Y) 是任意度量空间。

- 任何映射 $f : X \to Y$ 都是连续的。

证明 对于任意 $\varepsilon > 0$，我们取 $\delta = 1$ 即可：若 $x, x_0 \in X$ 满足 $d_X(x, x_0) < 1$，根据离散度量的定义，我们有 $x = x_0$，从而 $d_Y(f(x), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$. □

- 问：哪些映射 $f : Y \to X$ 是连续的?

答：只有“局部常值映射” [4]是连续的。

证明 显然，如果 f 是局部常值的，那么它是连续的。

反之，假设 $f : Y \to X$ 在 y_0 处连续，那么存在 $\delta > 0$ 使得对于任意满足 $d_Y(y, y_0) < \delta$ 的 $y \in Y$，我们有 $d_X(f(y), f(y_0)) < 1$。但 d_X 是离散度量，所以 $f(y) = f(y_0)$，即 f 在 y_0 附近是常值映射。 □

[4]映射 $f : Y \to X$ 是 **局部常值**是指：对于任意 $y_0 \in Y$，都存在 $\delta > 0$，使得对于所有满足 $d(y_0, y) < \delta$ 的 y，都有 $f(y) = f(y_0)$.

1.1.3 连续性：从度量到拓扑

¶ 强等价度量

根据定义，度量空间之间的映射 $f: X \to Y$ 是否连续取决于在 X, Y 上所给定的度量。下面我们给出一个简单的例子，它表明在某些情况下，"连续性"并不那么依赖于度量：

例 1.19. 考虑函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. 赋予 $\mathbb{R}^n$ 两个不同的度量，即例1.6(2) 中的 d_1 和 d_∞。我们断言：函数 $f: (\mathbb{R}^n, d_1) \to \mathbb{R}$ 是连续的当且仅当函数 $f: (\mathbb{R}^n, d_\infty) \to \mathbb{R}$ 是连续的。

【事实上，如果 $f: (\mathbb{R}^n, d_1) \to \mathbb{R}$ 是连续的，那么根据定义，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ 使得} \forall x \in X, d_1(x, x_0) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

因为

$$d_1(x, y) \leq n \cdot \max_i |x_i - y_i| \leq n \cdot d_\infty(x, y),$$

我们有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' = \frac{\delta}{n} > 0 \text{ 使得} \forall x \in X, d_\infty(x, x_0) < \delta' \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

换言之，$f: (\mathbb{R}^n, d_\infty) \to \mathbb{R}$ 是连续的。

反之，由不等式

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y)$$

及同样的论证易得：如果 f 关于 d_∞ 是连续的，那么它关于 d_1 也是连续的。】

如果我们回顾上面的例子，我们可以很容易看出度量 d_1 和 d_2 之所以会诱导出相同的连续性，其主要原因在于以下事实：

$$\frac{1}{n} d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot d_1(x, y).$$

这个事实启发我们给出如下定义：

定义 1.20.（强等价度量）

设 d_1 和 d_2 是集合 X 上的两个度量。如果存在常量 $C_1, C_2 > 0$ 使得对于任意 $x, y \in X$，均有

$$C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y),$$

则我们称 d_1 和 d_2 是**强等价**的。 ♣

通过重复例1.19中的论证，可以证明强等价度量会诱导相同的连续性概念：[证明细节留作习题。]

命题 1.21.（强等价度量与连续性）

设 d_X 和 $\widetilde{d}_X$ 是 X 上的强等价度量，而 d_Y 和 $\widetilde{d}_Y$ 是 Y 上的强等价度量。则映射 $f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是连续的当且仅当 $f: (X, \widetilde{d}_X) \to (Y, \widetilde{d}_Y)$ 是连续的。 ♠

¶ 更多诱导等价的连续性的度量

让我们再研究一个例子。

例 1.22. 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的另一对度量，欧氏度量 $d_2(x, y) = |x - y|$ 和 d_2 诱导的有界度量

$$\bar{d}_2(x, y) := \min\{1, d_2(x, y)\}.$$

显然 $\bar{d}_2(x, y) \le d_2(x, y)$，但是 d_2 和 $\bar{d}_2$ 是 **不是强等价的**，因为给定任意常数 $C > 0$，都存在 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$d_2(x, y) > C \ge C\bar{d}_2(x, y).$$

然而，在考察任意函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 的连续性时，我们将再次得到相同的结论：函数 $f : (\mathbb{R}^n, d_2) \to \mathbb{R}$ 是连续的当且仅当函数 $f : (\mathbb{R}^n, \bar{d}_2) \to \mathbb{R}$ 是连续的！

【假设 $f : (\mathbb{R}^n, \bar{d}_2) \to \mathbb{R}$ 是连续的。因为 $\bar{d}_2(x, y) \le d_2(x, y)$，所以 $f : (\mathbb{R}^n, d_2) \to \mathbb{R}$ 也是连续的，

反之，如果 $f : (\mathbb{R}^n, d_2) \to \mathbb{R}$ 是连续的，即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ 使得} \forall x \in X, d_2(x, x_0) < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

那我们只要取 $\delta' = \min(1/2, \delta)$，就有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 \text{ 使得} \forall x \in X, \bar{d}_2(x, x_0) < \delta' \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

即 $f : (\mathbb{R}^n, \bar{d}_2) \to \mathbb{R}$ 是连续的。】

从上面的例子我们可以预期，应该有一个比度量结构更基本的结构诱导了连续性。

¶ 用邻域定义的局部连续性

为了弄清楚连续性背后的结构，让我们回到命题1.17. 直观地说，f 在点 x_0 处的连续性仅仅涉及 X 中 x_0 附近的点和 Y 中 $f(x)$ 附近的点。当然，命题1.17中的各条等价刻画都依赖于度量结构（度量 d 或度量球）。我们在定义1.1.1中给出了开集、闭集的概念。我们还可以进一步引入邻域的定义，以刻画“附近的点”这样一个概念：

定义 1.23.（邻域）

设 x 是 X 中的一个点，而 $N \subset X$ 为 X 的一个子集。如果 X 中存在一个开集 U 使得 $x \in U \subset N$，则称 N 是 x 的**一个邻域**。[a]

[a] 在一些教材（包括 J. Munkres 的《拓扑学》等）中，作者要求邻域是开集。本书中不要求邻域是开集。我们将使用“x 的开邻域”一词表示一个集合既是开集又是 x 的邻域。

♣

注 1.24. 如果我们用 $\mathscr{N}(x)$ 表示 x 的所有邻域的集合，不难验证

(N1) 如果 $N \in \mathscr{N}(x)$, 那么 $x \in N$.

(N2) 如果 $M \supset N$ 且 $N \in \mathscr{N}(x)$，那么 $M \in \mathscr{N}(x)$.

(N3) 如果 $N_1, N_2 \in \mathscr{N}(x)$, 那么 $N_1 \cap N_2 \in \mathscr{N}(x)$.

(N4) 如果 $N \in \mathscr{N}(x)$, 那么存在 $M \in \mathscr{N}(x)$ 使得 $M \subset N$ 且对于任意 $y \in M$，都有 $N \in \mathscr{N}(y)$.

事实上，我们可以利用邻域刻画映射在一点处的连续性：

命题 1.25.（邻域与单点连续性）

设 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是度量空间之间的映射，那么 f 在 $x\in X$ 处连续当且仅当 $f(x)$ 的任何邻域的原像是 x 的邻域。

证明 设 f 在 $x\in X$ 处是连续的，$M\subset Y$ 是 $f(x)$ 的一个邻域。那么根据定义，存在 Y 中的开集 V 使得 $f(x)\in V\subset M$。根据开集的定义，$\exists\varepsilon>0$ 使得开球 $B(f(x),\varepsilon)\subset V$. 由 f 在 x 处的连续性，$\exists\delta>0$ 使得

$$B(x,\delta)\subset f^{-1}\left(B(f(x),\varepsilon)\right)\subset f^{-1}(V)\subset f^{-1}(M).$$

所以 $f^{-1}(M)$ 是 x 的一个邻域。

反之，假设对于 $f(x)$ 的任何邻域 $M\subset Y$，$f^{-1}(M)$ 是 x 的邻域。那么，特别地，对于 $\forall\varepsilon>0$，$f^{-1}\left(B(f(x),\varepsilon)\right)$ 是 x 的邻域，即它包含一个含有点 x 的开集 U. 由开集的定义，$\exists\delta>0$ 使得 $B(x,\delta)\subset U$, 而这意味着 $B(x,\delta)\subset f^{-1}\left(B(f(x),\varepsilon)\right)$。所以 f 在 x 处连续. □

值得说明的是，一般而言，即使 f 在 x_0 处连续，点 $f(x_0)$ 的开邻域的原像也可能不是 X 中的开集。[读者可以尝试找到一个例子！]

¶ 用开集定义整体连续性

作为命题 1.25 的推论，我们给出如下抽象度量空间之间的（整体）连续映射的刻画：

定理 1.26.（连续映射的刻画）

一个映射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是连续映射，当且仅当对于 Y 中的任何开集 V，其原像 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集。

证明 设 f 是连续的，$V\subset Y$ 是开集。那么 $\forall x\in f^{-1}(V)$, 由命题 1.25, $f^{-1}(V)$ 包含一个含点 x 的开集 U. 所以 $f^{-1}(V)$ 在 X 中是开集。

反之，假设 Y 中任何开集 V 的原像 $f^{-1}(V)$ 在 X 中都是开的。对于任意 $x\in X$，取 Y 中的任意包含点 $f(x)$ 的开集 V, 那么 $f^{-1}(V)$ 本身是 X 中的一个包含点 x 的开集。所以由命题 1.25，f 是连续的。 □

由此可见，度量空间之间的映射是否连续，其根本因素不在于度量 d 所给出的具体数值，在于该度量所生成的开集族。我们定义

定义 1.27.（拓扑等价度量）

设 d_1 和 d_2 是集合 X 上的两个度量。如果它们诱导的开集族是相同的，则我们称 d_1 和 d_2 是 **拓扑等价的** 。

显然，强等价的度量总是拓扑等价的，反之则不然。一般来说，如果一个概念只依赖于开集族，我们就称这个概念为“拓扑概念”（这点后面会讲清楚）。所以“邻域”是一个拓扑概念，即它只依赖于开集族；“连续性”也是拓扑概念。在习题中我们将看到，“一

致连续性” 不是拓扑概念。

由定理 1.26，我们得到

推论 1.28

设 $\widetilde{d}_X$ 和 $\widetilde{d}_Y$ 分别是拓扑等价于 d_X 和 d_Y 的度量，那么映射 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 连续映射，当且仅当映射 $f:(X,\widetilde{d}_X)\to(Y,\widetilde{d}_Y)$ 是连续映射。♡

这就是为什么 $\mathbb{R}^n$ 上的三个不同度量 d_1,d_2 和 $\bar{d}_2$ 给出了完全相同的连续函数集，而离散度量则给出了不同的连续函数集的原因：从上面例子的论证中不难看出，由 $d_1,d_2,\bar{d}_2$ 确定的开集族都相同，而由离散度量确定的开集族是与之不同的！

1.2 拓扑空间：定义与基本例子

在上一节中我们看到，虽然我们通过度量结构定义了映射的连续性，但连续性实际上只依赖于度量所诱导的邻域族或者开集族。在本节中，我们将通过公理化的方式引入邻域以及开集的概念，从而定义一般的拓扑空间。

1.2.1 拓扑的定义

¶ 邻域结构

为了将连续性和收敛性的概念扩展到更一般的“空间”，直观上我们需要首先公理化“邻域”的概念。任给一个点 x，哪些集合可以被视为 x 的邻域呢？不同点的邻域之间有什么关联呢？受注记1.24启发，我们可以对于任何 $x \in X$，都为其指定一个非空的子集族

$$\mathscr{N}(x) \subset \mathcal{P}(X)$$[5]

$\mathscr{N}(x)$ 中的每个元素都视为 x 的一个邻域，这些子集族 $\mathscr{N}(x)$ 要满足的公理如下：

(N1) 如果 $N \in \mathscr{N}(x)$，那么 $x \in N$.

(N2) 如果 $M \supset N$ 且 $N \in \mathscr{N}(x)$，那么 $M \in \mathscr{N}(x)$.

(N3) 如果 $N_1, N_2 \in \mathscr{N}(x)$，那么 $N_1 \cap N_2 \in \mathscr{N}(x)$.

(N4) 如果 $N \in \mathscr{N}(x)$, 那么存在 $M \in \mathscr{N}(x)$ 使得 $M \subset N$，且对于任意 $y \in M$，都有 $N \in \mathscr{N}(y)$.

邻域的前三条公理具有较为明确的意义，而第四条 (N4) 给出了不同点的邻域之间的关系，可以看作是度量结构的三角不等式的某种替代。

以上邻域概念的公理化是 1912 年由德国数学家 Hausdorff [6]完成的。[7] 他的目标是定义一个非常一般的空间概念，这样的抽象空间会包括 $\mathbb{R}^n$、黎曼曲面、无限维空间或由曲线和函数组成的空间为特例。他给出了引入这样一个一般性概念的两个好处：简化理论，以及防止我们错误地使用直觉。

定义 1.29.（邻域结构）

我们把集合 X 上的一个满足公理 (N1)-(N4) 的映射

$$\mathscr{N} : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \setminus \{\emptyset\}$$

称为 X 的一个**邻域结构**，把 $\mathscr{N}(x)$ 称为 x 的**邻域系**，而把 $\mathscr{N}(x)$ 里的每个元素均称为 x 的一个 **邻域**。♣

给定集合 X 上的一个邻域结构 $\mathscr{N}$，我们称 $(X, \mathscr{N})$ 为一个 **（邻域结构）拓扑空间**。

---

[5]我们使用符号 $\mathcal{P}(X)$，有时也使用符号 2^X，来表示 X 的幂集，即 X 的所有子集的集合。

[6]豪斯道夫（Felix Hausdorff，1868-1942），德国数学家，现代拓扑学的奠基人之一，在集合论、测度论、泛函分析等领域也有重要贡献。1914 年，他出版了《集合论原理》一书，在 Frechét 等人工作的基础上，创立了拓扑空间的理论。

[7]然而，Hausdorff 给出的公理体系与上面的公理稍有不同，即他额外要求一个分离公理：对于任意两点 $x \neq y$，存在 $N \in \mathscr{N}(x)$ 和 $M \in \mathscr{N}(y)$ 使得 $N \cap M = \emptyset$. 这样的分离公理称为 **Hausdorff 性质**，我们将在下一章对其进行更深入地研究。

¶ 从邻域结构到内部结构

相比于接下来要引入的（也是大部分教材中不加说明而直接引入的）开集公理，邻域公理显得更加直观，但其缺点在于用起来比较复杂。接下来我们阐述如何从邻域结构出发，逐步引入“内部结构”、“开集结构”、“闭集结构”等其他相互等价的拓扑空间公理体系。给定一个邻域结构拓扑空间 $(X, \mathscr{N})$，我们如何得到 X 中开集的概念呢？回想一下，在数学分析中，一个集合是开集当且仅当该集合中的每个点都是其内点，所以开集跟“内部”这个概念是紧密相连的。什么是内点呢？点 x 是集合 A 的内点当且仅当 A 包含一个以 x 为中心的开球。换而言之，点 x 是集合 A 的内点当且仅当集合 A 是点 x 的邻域！于是在邻域结构拓扑空间可以定义任意集合的“内部”：

定义 1.30.（内部）

设 $(X, \mathscr{N})$ 是一个邻域结构拓扑空间。对于任意子集 $A \subset X$，其 **内部** 定义为

$$\operatorname{Int}(A) := \{x \in A \mid A \in \mathscr{N}(x)\}. \tag{1.2.1}$$

♣

根据定义和公理 (N1)-(N4)，不难验证映射

$$\operatorname{Int} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad A \mapsto \operatorname{Int}(A)$$

满足

(I1) $\operatorname{Int}(A) \subset A$.

(I2) $\operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B) = \operatorname{Int}(A \cap B)$.

(I3) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A)) = \operatorname{Int}(A)$.

(I4) $\operatorname{Int}(X) = X$.

定义 1.31.（内部结构）

设 X 是一个集合。我们称满足公理 (I1)-(I4) 的映射 $\operatorname{Int} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ 为 X 上的一个“内部结构”。

♣

给定 X 上的一个内部结构 Int，我们称 (X, Int) 为一个 **（内部结构）拓扑空间**。可以验证，（邻域结构）拓扑空间和（内部结构）拓扑空间是相互等价的：给定 X 上的一个邻域结构，我们上面构造了 X 上的一个内部结构；反之，给定集合 X 上的一个内部结构 Int，也不难定义出 X 上的一个邻域结构，

$$\mathscr{N}(x) = \{A \subset X \mid x \in \operatorname{Int}(A)\}. \tag{1.2.2}$$

我们有（证明留作习题）：

命题 1.32.（邻域结构与内部结构的等价性）

任给集合 X 上的一个邻域结构 $\mathscr{N}$，由 (1.2.1) 所定义的映射 $\operatorname{Int} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ 为 X 上的一个内部结构；反之，任给集合 X 上的一个内部结构 Int，由 (1.2.2) 所定义的子集族 $\mathscr{N}$ 是 X 上的一个邻域结构。更进一步，上述从“邻域结构”到“内部结构”以及从“内部结构”到“邻域结构”的两个过程互为逆过程。

♠

¶ 从内部结构到开集结构

如上所述，欧氏空间（或者一般度量空间中）一个集合是开集当且仅当该集合中的每个点都是其内点。受此启发，由"内部"的概念出发，不难给出如下（邻域结构或者内部结构）拓扑空间中开集的定义：

定义 1.33.（开集）

在邻域结构（或内部结构）拓扑空间中，我们称集合 U 是一个 **开集**，如果它满足：对于任意 $x \in U$，均有 $U \in \mathscr{N}(x)$. ♣

由邻域结构与内部结构的等价性，马上可得如下等价刻画：

命题 1.34. 开集与内部

邻域结构（或内部结构）拓扑空间中的集合 U 是一个开集当且仅当 $\mathrm{Int}(U) = U$. ♠

给定 $(X, \mathscr{N})$，如果我们记

$$\mathscr{T} = \{U \subset X \mid U\text{是开集}\} \tag{1.2.3}$$

为 $(X, \mathscr{N})$ 中所有开集构成的集族，则可以验证：

(O1) $\emptyset \in \mathscr{T}, X \in \mathscr{T}$.

(O2) 如果 $U_1, U_2 \in \mathscr{T}$, 那么 $U_1 \cap U_2$ 亦然.

(O3) 如果 $\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset \mathscr{T}$, 那么 $\cup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \mathscr{T}$.

1935 年，Alexandrov [8]和 Hopf[9] 在他们撰写的《拓扑学 (I)》[10]一书中，将开集公理作为拓扑空间的定义。相比于邻域公理 (N1)-(N4) 或者内部公理 (I1)-(I4)，开集公理 (O1)-(O3) 更简洁而且易于使用，因而得到了广泛的采纳，成为拓扑空间的标准定义：

定义 1.35.（拓扑）

集合 X 上的满足 (O1) (O2) 和 (O3) 的子集族 $\mathscr{T} \subset \mathcal{P}(X)$ 称为 X 上的一个**拓扑结构**，或者简称为 X 上的一个**拓扑**。♣

给定 X 上的一个拓扑结构 $\mathscr{T}$，我们称 $(X, \mathscr{T})$ 为一个 **拓扑空间**。

前文阐述了如何由邻域结构公理 (N1)-(N4) 出发，构造满足开集公理 (O1)-(O3) 的过程。反之，给点拓扑结构，即满足 (O1)-(O3) 的集族 $\mathscr{T}$，我们定义

定义 1.36.（拓扑空间里的邻域）

设 $(X, \mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，$x \in X$ 为一个元素，而 $N \subset X$ 为一个子集。如果存在开集 $U \in \mathscr{T}$ 使得 $x \in U \subset N$，则称集合 N 为 x 的一个 **邻域**。♣

---

[8]亚历山大洛夫（Pavel Alexandrov，1896-1932），前苏联数学家，莫斯科拓扑学派的奠基人之一，在拓扑学、集合论等方面做出了杰出工作。

[9]霍普夫（Heinz Hopf，1894-1971），德国数学家，在拓扑与整体微分几何方面有卓越建树。

[10]该书是拓扑学方面最早的著作之一，原计划写三卷，但最终只完成了第一卷。

于是，给定拓扑结构 $\mathscr{T}$ 后，点 x 的邻域系为

$$\mathscr{N}(x) = \{N \subset X : \exists U \in \mathscr{T} \text{ 使得} x \in U \text{ 且} U \subset N\}. \tag{1.2.4}$$

可以验证开集公理体系和邻域公理体系的等价性（证明依然留作习题）：

命题 1.37.（开集公理体系与邻域公理体系的等价性）
任给集合 X 上的一个邻域结构 $\mathscr{N}$，由 (1.2.3) 所给出的开集族 $\mathscr{T}$ 为 X 上的一个拓扑结构；反之，任给集合 X 上的一个拓扑结构 $\mathscr{T}$，由 (1.2.4) 所定义的子集族 $\mathscr{N}$ 是 X 上的一个邻域结构。更进一步，上述从“邻域结构”到“拓扑结构”以及从“拓扑结构”到“邻域结构”的两个过程互为逆过程。♠

¶ 用闭集定义拓扑

有了开集的概念，我们自然可以定义闭集：

定义 1.38.（闭集）
设 F 为拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的一个子集。如果 F 的补集 $F^c = X \setminus F$ 是开集，则称 F 是一个 **闭集**。♣

将“开集公理”转换为“闭集公理”是平凡的：
(C1) $\emptyset$ 和 X 都是闭集。
(C2) 如果 U_1, U_2 是闭集，那么 $U_1 \cup U_2$ 亦然。
(C3) 如果对任意 $\alpha \in \Lambda, U_\alpha$ 都是闭集, 那么 $\cap_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ 也是闭集。
在某些特定问题里，闭集公理更适用。

1.2.2 拓扑空间举例

¶ 一些简单的拓扑空间

例 1.39. 下面我们给出一些拓扑的例子。

(1) **(度量拓扑)** 设 (X, d) 是任意度量空间。令

$$\mathscr{T}_{metric} = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists r > 0 \text{ 使得} B(x, r) \subset U\}.$$

那么 $\mathscr{T}_{metric}$ 是 X 上的一个拓扑，称为度量拓扑。

(2) **(离散拓扑)** 设 X 是任意集合。令

$$\mathscr{T}_{discrete} = \mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}.$$

显然它是 X 上的一个拓扑，且不难发现它是关于 X 上的离散度量的度量拓扑。

(3) **(平凡拓扑)**[11]设 X 是任意集合。令

$$\mathscr{T}_{trivial} = \{\emptyset, X\}.$$

易见它是 X 上的一个拓扑。但只要 X 的元素个数大于 1，那么它就**不是**一个度量拓扑。

[11]该拓扑也被称为“非离散拓扑”。

(4) **(余有限拓扑)** 设 X 是任意集合。令

$$\mathscr{T}_{cofinite} = \{A \subset X \mid 要么 A = \emptyset, 要么 A^c = X \setminus A 是一个有限集\}.$$

它是 X 上的一个拓扑，验证如下：

- $\emptyset \in \mathscr{T}; X \in \mathscr{T}$ 因为 $X^c = \emptyset$ 是有限的。
- 如果 $A, B \in \mathscr{T}$, $A, B \neq \emptyset$. 那么 A^c, B^c 是有限的，所以 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 是有限的。
- 如果 $A_\alpha \in \mathscr{T}$ 而且至少有一个 $A_{\alpha_1} \neq \emptyset$, 那么 $(\cup_\alpha A_\alpha)^c = \cap_\alpha A_\alpha^c \subset A_{\alpha_1}^c$ 是有限的。

(5) **(余可数拓扑)** 设 X 是任意集合。令

$$\mathscr{T}_{cocountable} = \{A \subset X \mid 要么 A = \emptyset, 要么 A^c 是至多可数的\}.$$

读者可自行验证它是 X 上的一个拓扑。

(6) **(Zariski 拓扑)** 设 $X = \mathbb{C}^n$, $R = \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]$，即具有复系数的 n 元多项式环。定义

$$\mathscr{T}_{Zariski} = \{U \subset \mathbb{C}^n \mid \exists f_1, \cdots, f_m \in R 使得 U^c 为 f_1, \cdots, f_m 的公共零点集\}.$$

可以证明这是一个拓扑。(注意：此处验证闭集公理更方便。) 更一般地，可以在任意交换环上定义 Zariski 拓扑。该拓扑主要用于代数几何的研究。

(7) **(Sorgenfrey 拓扑)** 设 $X = \mathbb{R}$，定义

$$\mathscr{T}_{Sorgenfrey} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 使得 [x, x+\varepsilon) \subset U\}.$$

可以验证这是一个拓扑。该拓扑将是我们理解不同拓扑性质之间关系的一个重要例子。

¶ 不同拓扑的比较

所以任何一个集合上都有很多不同的拓扑，其中某些拓扑是度量拓扑，而另一些拓扑不是度量拓扑。注意对于 X 上的任意拓扑 $\mathscr{T}$，我们总是有

$$\mathscr{T}_{trivial} \subset \mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{discrete}.$$

一般地，我们定义

定义 1.40. (拓扑的比较)

设 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑。我们称 $\mathscr{T}_1$ 是 **弱于**[a] $\mathscr{T}_2$, 或者等价地，称 $\mathscr{T}_2$ is **强于** $\mathscr{T}_1$, 如果有 $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$.

[a] 一些作者使用“**粗糙于**”的说法代替“弱于”，用“**精细于**”的说法代替“强于”

♣

因此，在任意集合 X 上，$\mathscr{T}_{trivial}$ 是最弱/最粗糙的拓扑，而 $\mathscr{T}_{discrete}$ 是最强/最精细的拓扑。当然，并不是 X 上的任意两个不同的拓扑都可以比较。例如，$\mathbb{R}$ 上的欧氏拓扑和余可数拓扑是无法比较的，即存在欧氏开集不是余可数拓扑下的开集，也存在余可数拓扑下的开集不是欧氏开集。

一般而言，同一个集合上两个不同拓扑的并不再是拓扑。但是，

命题 1.41.（拓扑的交）

给定 X 上的任意一族拓扑 $\mathscr{T}_\alpha$，则 $\bigcap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$ 是 X 上的一个拓扑。

证明 验证如下：

- $\emptyset, X \in \mathscr{T}_\alpha, \forall \alpha \ \Rightarrow\ \emptyset, X \in \cap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$.
- $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_\alpha, \forall \alpha \ \Rightarrow\ U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}_\alpha, \forall \alpha \ \Rightarrow\ U_1 \cap U_2 \in \cap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$.
- $U_\beta \in \mathscr{T}_\alpha, \forall \alpha \ \Rightarrow\ \cup_\beta U_\beta \in \mathscr{T}_\alpha \ \Rightarrow\ \cup_\beta U_\beta \in \cap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$.

$\square$

¶ 从已有的拓扑空间构造新空间

和抽象度量空间的情况一样，我们可以通过已有的拓扑空间构造新的拓扑空间，而最常见的构造是“子集继承原空间拓扑”而得到的子空间拓扑，以及在乘积空间上通过合适的方法定义的乘积空间拓扑。

命题 1.42.（子空间拓扑）

设 $(X, \mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，$Y \subset X$ 是一个子集，则集族

$$\mathscr{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathscr{T}\}$$

是 Y 上一个拓扑，称为 **子空间拓扑**。

其验证是平凡的，故而略去。

注 1.43. 如果 (X, d_X) 是一个度量空间且 $Y \subset X$，那么“由 X 上的度量拓扑所诱导的 Y 上的子空间拓扑”与“(Y, d_Y)（作为 (X, d_X) 的子空间度量）上的度量拓扑”是一致的。证明留作习题。

下面我们解释如何在两个拓扑空间的笛卡尔积上构造合理的拓扑。在数学分析中，我们知道：一个集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是一个开集，当且仅当 U 中的任意点 (x, y) 均为 U 的内点，也当且仅当对于 U 中的任意点 (x, y)，可以找到 $\varepsilon_x > 0$ 和 $\varepsilon_y > 0$ 使得 U 包含 (x, y) 的“方形邻域” $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \times (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y)$. 后者，作为笛卡尔积，可以轻易推广到一般的拓扑空间：

命题 1.44.（乘积拓扑）

设 $(X, \mathscr{T}_X)$ 和 $(Y, \mathscr{T}_Y)$ 是拓扑空间。则

$$\mathscr{T}_{X \times Y} := \{W \subset X \times Y \mid \forall (x, y) \in W, \exists U \in \mathscr{T}_X \text{ 和} V \in \mathscr{T}_Y \text{ 使得} (x, y) \in U \times V \subset W\}$$

是 $X \times Y$ 上的一个拓扑，称为 **乘积拓扑**。

证明留作习题。

注 1.45. 对于度量空间，在注记1.9中我们指出，可以在 $X \times Y$ 定义各种不同的 l^p 型乘积度量。可以证明，这些不同的乘积度量是拓扑等价的，且它们所诱导的度量拓扑都跟由命题1.8给出的“每个分量空间上的度量拓扑的乘积拓扑”一致！

1.3 拓扑空间里的收敛与连续性

1.3.1 拓扑空间中的收敛

¶ 收敛点列

正如我们在前言中提到的，定义拓扑结构是为了将收敛和连续映射的概念扩展到更一般的情形。在拓扑空间中定义收敛序列的概念是非常容易的。直观地说，$x_n \to x_0$ 意味着“对于 x_0 的任何邻域 N，序列 x_n 最终将进入并留在 N 中”。于是我们定义

定义 1.46.（收敛）

设 x_n 是拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 中的一个点列。如果存在 $x_0 \in X$，满足：对于 x_0 的任意邻域 A，均存在 $k > 0$ 使得当 $n > k$ 时，有 $x_n \in A$，则我们称 x_n 收敛到 x_0，并记为 $x_n \to x_0$。♣

根据邻域的定义，容易看出在 $(X, \mathscr{T})$ 中 $x_n \to x_0$ 当且仅当对于任意包含 x_0 的开集 U，存在 $k > 0$ 使得对所有 $n > k$ 都有 $x_n \in U$ 成立。

例 1.47. 为了更好地理解收敛性，我们下面考查一些简单的空间中的收敛性：

(1) **(度量拓扑下的收敛)** 考虑度量空间 (X, d)，我们定义了两种序列收敛概念：按度量收敛以及按度量拓扑收敛。不难验证，这两种序列收敛概念是一致的，即 x_n 按度量拓扑收敛至 x_0 当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0$ 使得对所有$n > k$，均有$d(x_n, x_0) < \varepsilon$ 成立.

(2) **(离散拓扑下的收敛)** 考虑离散拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_{discrete})$. 因为开球 $B(x, 1) = \{x\}$, 我们容易看出：$x_n \to x_0$ 当且仅当存在k 使得对所有$n > k$，均有$x_n = x_0$ 成立。换言之，在离散拓扑空间中，只有“最终常值”的序列是收敛的。

(3) **(平凡拓扑下的收敛)** 考虑平凡拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_{trivial})$. 因为唯一的非空开集是集合 X, 所以任何序列$x_n \in X$ 都是收敛的，而且任何点$x_0 \in X$ 都是其极限! 特别地, 收敛序列的极限不是唯一的! [13]

(4) **(余有限拓扑下的收敛)** 考虑余有限拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_{cofinite})$. 我们假设 $x_n \to x_0$. 根据定义，对于 x_0 的任何开邻域 U，存在 k 使得对任意 $n > k$，均有 $x_n \in U$。这一条件成立当且仅当对于任意$x \neq x_0$，至多有有限多个$i \in \mathbb{N}$ 使得$x_i = x$ 成立。所以在该空间的收敛性是非常微妙的。例如，
   - 如果 x_n 都是不同的，那么序列 $x_1, x_2, \cdots$ 收敛到任意点 x_0.
   - 形如 $x_0, x_1, x_0, x_2, x_0, \ldots$（其中 x_n 都是不同的点）的序列有唯一的极限 x_0.
   - 形如 $x_1, x_2, x_1, x_2, \ldots$ 的序列是不收敛的。

(5) **(余可数拓扑下的收敛)** 考虑余有限拓扑空间 $(X, \mathscr{T}_{cocountable})$. 不妨设 X 为不可数集。由完全相同的论证可得 $x_n \to x_0$ 当且仅当存在$k > 0$ 使得对所有$n > k$ 都有$x_n = x_0$ 成立。换言之，同离散拓扑空间一样，只有“最终常值”的序列收敛。

[13]无需太担心这种糟糕的情形。稍后我们将看到，对拓扑加上适当假设后，任何收敛序列的极限都是唯一的。

¶ 逐点收敛拓扑

如果说上面几个收敛列的例子显得过于人为、不够自然，下面这个例子则告诉我们，我们熟悉的“函数逐点收敛”也是一种拓扑收敛。

考虑 $[0,1]$ 上所有函数（不一定连续）构成的空间

$$X=\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})=\mathbb{R}^{[0,1]}.$$

在 X 中，我们可以像往常一样定义函数列的逐点收敛性：

$$f_n\to f \text{ 当且仅当} f_n(x)\to f(x),\forall x\in[0,1].$$

下面我们努力在 X 上构造合适的拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$，使得逐点收敛正是拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_{p.c.})$ 中的收敛。从直观上来说，$\mathscr{T}_{p.c.}$ 中的开集既不能太多（否则会导致逐点收敛的函数列在该拓扑下不收敛），也不能太少（否则会导致不逐点收敛的函数列在该拓扑下收敛）。于是，合理的做法是：先按照逐点收敛本身的含义，确定哪些集合必须是开集；然后根据拓扑的公理，找出包含这些集合的最小集族。

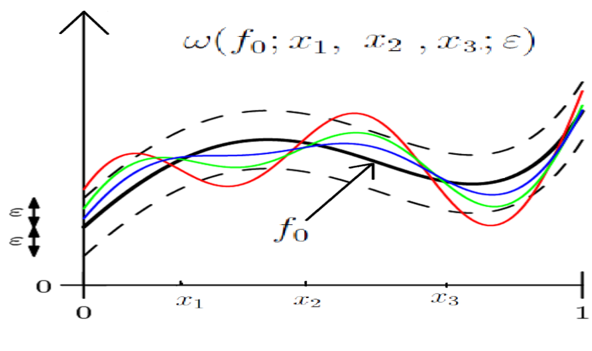
现假设 f_n 逐点收敛与 f，我们需要找到 X 中合适的包含 f 的集合作为我们的开集。为此，我们先固定任意 $x\in[0,1]$. 根据逐点收敛的定义，对于任意 $\varepsilon>0$，可以找到 $k>0$ 使得对所有 $n>k$，均有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 这启发我们对于任意 $f\in X$，任意 $x\in[0,1]$ 以及任意 $\varepsilon>0$，定义集合

$$\omega(f;x;\varepsilon):=\{g\in X \mid |g(x)-f(x)|<\varepsilon\}$$

为 f 的一个“基本开邻域”，它包含的是在点 x 处跟 f 很接近的函数。根据开集的定义，有限个开集的交依然是开集，于是对于任意有限个点 $x_1,\cdots,x_m\in[0,1]$，我们需要定义

$$\omega(f;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon):=\{g\in X \mid |g(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon,\forall 1\le i\le m\}$$

为 f 的一个“开邻域”。不难看出，该集合包含了所有在 $x_1,\cdots,x_m$ 处跟 f 都很接近的函数。下面是一个简单的示意图：



当然，为了定义出拓扑，我们还得保证任意多个开集的并依然是开集。为此，我们借用欧氏空间或者一般度量空间中开集的定义方式（回想一下我们是如何通过开球这样的“基本开集”去定义一般的开集），定义出我们想要的逐点收敛拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$：

$$\mathscr{T}_{p.c.}=\{U\subset X \mid \forall f_0\in U,\exists x_1,\cdots,x_m\in[0,1] \text{ 和}\varepsilon>0,\text{使得}U\supset\omega(f_0;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon)\} \tag{1.3.1}$$

下面证明这正是我们想要的拓扑：

命题 1.48. （逐点收敛拓扑）

由 (1.3.1) 定义的集族 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 是集合 $X=\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$ 上的一个拓扑，且 X 中的函数列 f_n 逐点收敛于 f 当且仅当 f_n 作为拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_{p.c.})$ 中的点列依拓扑收敛于 f. ♠

证明 按照定义容易验证 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 是 X 上的一个拓扑：

- 显然 $\emptyset, X\in\mathscr{T}_{p.c.}$.
- 如果 $U_1,U_2\in\mathscr{T}_{p.c.}$，那么对于任意 $f_0\in U_1\cap U_2$，存在 $x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n\in[0,1]$ 以及 $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$，使得
$$U_1\supset\omega(f_0;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon_1)\quad \text{且}\quad U_2\supset\omega(f_0;y_1,\cdots,y_n;\varepsilon_2),$$
于是我们有 $U_1\cap U_2\supset\omega(f_0;x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n;\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2))$，即 $U_1\cap U_2\in\mathscr{T}_{p.c.}$.
- 如果 $U_\alpha\in\mathscr{T}_{p.c.}$ 且 $f_0\in\cup_\alpha U_\alpha$，那么 $\exists\alpha_0$ 使得 $f_0\in U_{\alpha_0}$. 根据定义，存在 $x_1,\cdots,x_m\in[0,1]$ 以及 $\varepsilon>0$ 使得
$$\omega(f_0;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon)\subset U_{\alpha_0}.$$
这显然蕴含着
$$\omega(f_0;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon)\subset\cup_\alpha U_\alpha,$$
从而 $\cup_\alpha U_\alpha\in\mathscr{T}_{p.c.}$.

接下来我们证明函数列的逐点收敛等价于在 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 拓扑下的收敛：

- 设 f_n 逐点收敛于 f，设 $U\subset X$ 是 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 中的开集，且 $f\in U$. 则 $\exists x_1,\cdots,x_m\in[0,1]$ 和 $\varepsilon>0$ 使得
$$\omega(f;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon)\subset U.$$
由逐点收敛的定义，我们有 $f_n(x_i)\to f(x_i), 1\le i\le m$，即存在 k_i 使得当 $n>k_i$ 时有 $|f_n(x_i)-f(x_i)|<\varepsilon$. 所以对于任意 $n>k=\max(k_1,\cdots,k_m)$，都有
$$f_n\in\omega(f;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon)\subset U.$$
于是根据定义，f_n 在拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_{p.c.})$ 中收敛于 f.
- 反之，设 f_n 在 $(X,\mathscr{T}_{p.c.})$ 中收敛于 f. 对任意 $x\in[0,1]$，我们取 f 的开邻域 $U=\omega(f,x,\varepsilon)$。则存在 $k>0$ 使得当 $n>k$ 时，$f_n\in U$，即 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对所有 $n>k$ 成立，也即 $f_n(x)\to f(x)$，故 f_n 逐点收敛于 f。

□

注 1.49. 我们在 §1.1 的习题中已经看到，“度量空间之间映射列的一致收敛”是一个度量意义下的收敛。但是，在后文中我们将会看到，在函数空间 X 上不存在度量使得“函数逐点收敛”是度量收敛。这一事实也从侧面印证了引进“拓扑”这一抽象概念的必要性。另一方面，我们还要指出：并非所有我们称之为“收敛”的现象都是拓扑意义下的收敛。比如，在本节的习题中我们将会看到，在 $[0,1]$ 区间上的所有有界可测函数所构成的集合上，并不存在一个拓扑使得“几乎处处收敛”等价于该拓扑下的收敛。

1.3.2 连续映射

¶ 拓扑空间之间的连续映射

正如我们在前言中所解释的，拓扑结构可以用于定义映射的连续性。有两种不同的方法可以给出定义：使用收敛序列，或使用拓扑结构本身（即开集、闭集、邻域）。不幸的是，这两种方法给出了两种不同的结果。

让我们先用收敛序列来定义连续性，这比较符合我们的直觉：（注意我们在定义中使用了“序列”一词，这是为了与下文即将定义的连续映射区分开来。）

定义 1.50.（序列连续映射）

对于拓扑空间之间的映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$，

(1) 如果对于 X 中的任意收敛序列 $x_n\to x_0$，在 Y 中均有 $f(x_n)\to f(x_0)$，则称映射 f **在** x_0 **处序列连续**。

(2) 如果 f 在 X 中的每一点处都是序列连续的，则称 f 为**序列连续映射**。 ♣

我们也可以用拓扑结构本身（即使用开集/闭集/邻域等）定义连续映射。受命题 1.25 启发，我们给出如下定义：

定义 1.51.（连续映射）

对于拓扑空间之间的映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$，

(1) 如果 Y 中点 $f(x_0)$ 的任意邻域 B 的原像 $f^{-1}(B)$ 都是 X 中点 x_0 的邻域，则我们称 f **在点** x_0 **处连续**。

(2) 如果 f 在 X 中的每一点处都是连续的，则称 f 为一个**连续映射**。 ♣

根据定义我们容易证明（序列）连续映射的复合映射仍然是（序列）连续的：

命题 1.52.（（序列）连续映射的复合）

设 X,Y,Z 是拓扑空间。

(1) 如果 $f:X\to Y$ 在点 x_0 处连续，$g:Y\to Z$ 在 $f(x_0)$ 处连续，那么 $g\circ f:X\to Z$ 在 x_0 处连续。

(2) 如果 $f:X\to Y$ 在点 x_0 处序列连续，$g:Y\to Z$ 在 $f(x_0)$ 处序列连续，则 $g\circ f:X\to Z$ 在 x_0 处序列连续。 ♠

证明 (1) 如果 f 和 g 都是连续的，那么对于 Z 中 $g(f(x_0))$ 的任意邻域 C，$g^{-1}(C)$ 是 Y 中 $f(x_0)$ 的邻域，因此

$$(g\circ f)^{-1}(C)=f^{-1}(g^{-1}(C))$$

是 X 中 x_0 的邻域。因此 $g\circ f$ 在 x_0 处是连续的。

(2) 如果 f 和 g 都是序列连续的，那么对于 X 中的收敛序列 $x_n\to x_0$，我们有 $f(x_n)\to f(x_0)$，进而有 $g(f(x_n))\to g(f(x_0))$ 所以 $g\circ f$ 是序列连续的。 □

¶ 序列连续性 v.s. 连续性

在度量空间中，序列连续性和连续性是等价的。对于拓扑空间，我们有

命题 1.53.（连续一定序列连续） 如果 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 在 x_0 处连续，那么它也在 x_0 处序列连续。特别地，任何连续映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 都是序列连续的。

证明 设 $x_n\to x_0$. 在 Y 中取 $f(x_0)$ 的任意邻域 B。则由连续性知 $f^{-1}(B)$ 是 x_0 的邻域。因为 $x_n\to x_0$，所以存在 $k>0$ 使得对任意 $n>k$ 都有 $x_n\in f^{-1}(B)$。因此对所有 $n>k$ 都有 $f(x_n)\in B$，即 $f(x_n)\to f(x_0)$。故 f 在 x_0 处是序列连续的。 □

但是，反之则不然。

例 1.54. 考虑恒等映射

$$\mathrm{Id}:(\mathbb{R},\mathscr{T}_{cocountable})\to(\mathbb{R},\mathscr{T}_{discrete}),\quad x\mapsto x.$$

则 Id 是序列连续的。这是因为在例1.47中我们已经看到，一个序列在 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{cocountable})$ 中收敛当且仅当它在 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{discrete})$ 中收敛（并收敛到相同的极限）。然而，Id 在任意点处都不连续：对任意点 $x\in\mathbb{R}$，区间 $[x-1,x+1]$ 是 x 在 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{discrete})$ 中的开邻域，但不是 x 在 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{cocountable})$ 中的开邻域。

¶ 用开集定义整体连续性

我们在定理1.26中证明了 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$ 是一个连续映射当且仅当 Y 中的任意开集 V 的原像 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集。通过重复当时的证明，我们可以很容易地证明下述通过开集对连续映射给出的刻画：

命题 1.55.（开集与连续性） 设 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 是一个映射，则 f 是连续的当且仅当"开集的原像是开集"，即对于任意 $V\in\mathscr{T}_Y$，我们有 $f^{-1}(V)\in\mathscr{T}_X$。

在拓扑学中，有一个**开-闭对偶原理**

通过开集描述的事实具有一个"对偶"的通过闭集给出的描述。

其证明只要通过标准的"取补集"即可：

命题 1.56.（闭集与连续性） 映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 是连续的当且仅当对于 Y 中的任意闭集 F，其原像 $f^{-1}(F)$ 在 X 中是闭集。

证明 注意到 $f^{-1}(F)$ 是闭集当且仅当 $X\setminus f^{-1}(F)=f^{-1}(Y\setminus F)$ 是开集。由此即得。 □

¶ 开映射和闭映射

在连续映射下，开集的原像是开集，闭集的原像都是闭集。但一般来说，可以很容易找到例子表明

- 开集在连续映射下的像不一定是开集，
- 闭集在连续映射下的像不一定是闭集。

我们定义

定义 1.57.（开映射和闭映射）

对于拓扑空间之间的映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$，

(1) 如果 X 中的任意开集 U 的像 $f(U)$ 在 Y 中是开集，则称映射 f 为 **开映射**。

(1) 如果 X 中的任意闭集 F 的像 $f(F)$ 在 Y 中是闭集，则称映射 f 为 **闭映射** ♣

注 1.58. 虽然开/闭映射看起来"更自然"，但它们在拓扑中不如连续映射重要和方便。这里给出一个原因：相比于"求映射的像"，"取映射的原像"这一操作可以更好地保持集合的交、并、补运算。具体来说，我们总是有

$$f^{-1}(\bigcup_\alpha B_\alpha)=\bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha),\quad f^{-1}(\bigcap_\alpha B_\alpha)=\bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha),\quad f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B).$$

但是一般来说，我们只有

$$f(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha f(A_\alpha),\quad f(\bigcap_\alpha A_\alpha)\subset\bigcap_\alpha f(A_\alpha),\quad f(X\setminus A)\supset f(X)\setminus f(A).$$

但是，开/闭映射确实出现在其他一些数学分支中，并且起着非常重要的作用。例如，

- 泛函分析中最重要的定理之一，开映射定理，断言 Banach 空间之间的满射连续线性算子都是开映射。
- 在复分析中也一个开映射定理，它指出在复平面的连通开子集上定义的任何非常值全纯函数都是开映射。
- 我们本课程后半部分将证明 **Brouwer 区域不变性定理**：如果 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是一个开集，那么任何单射连续映射 $f:U\to\mathbb{R}^n$ 是一个开映射。

¶ 连续映射的例子

我们下面给出一些连续映射的例子。

例 1.59. 下述例子的连续性都是命题 1.55的直接应用，故而我们略去大部分细节。

(1) 任意常值映射 $f:X\to Y$ 都是连续的。

【理由如下：设 $f(x)\equiv y_0\in Y$，U 是 Y 中的任意开集。则

- 若 $y_0\in U$，则 $f^{-1}(U)=X$ 是 X 中的开集。
- 若 $y_0\notin U$，则 $f^{-1}(U)=\emptyset$ 是 X 中的开集。

所以 f 是连续的。】

注意这个论证也解释了为什么在开集公理中我们需要 $\emptyset,X$ 在任何拓扑中都是开集：否则常值映射可能是不连续的！

(2) 任意映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_{trivial})$ 都是连续的。

(3) 任意映射 $f:(X,\mathscr{T}_{discrete})\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 都是连续的。

(4) 恒同映射 $\mathrm{Id}:(X,\mathscr{T}_2)\to(X,\mathscr{T}_1)$ 是连续的当且仅当 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$, 即 $\mathscr{T}_1$ 比 $\mathscr{T}_2$ 弱.

下面两个命题说明子空间拓扑以及乘积空间拓扑下自然的映射都是连续映射:

命题 1.60.（子空间的嵌入映射）

设 $(X,\mathscr{T}_X)$ 为拓扑空间，赋予 $A\subset X$ 子空间拓扑。则包含映射 $\iota:A\hookrightarrow X$ 是连续的，且子空间拓扑是 A 上最弱的使得 ι 连续的拓扑。♠

证明 映射 ι 在子空间拓扑下的连续性可由定义以及命题1.55直接得到。反之，假设 $\mathscr{T}$ 为 A 上的一个拓扑，使得 $\iota:(A,\mathscr{T})\hookrightarrow(X,\mathscr{T}_X)$ 为连续映射。则对于 X 中任意开集 $U\in\mathscr{T}_X$，其原像 $\iota^{-1}(U)=U\cap A$ 是 $\mathscr{T}$ 中的开集。于是根据定义，$\mathscr{T}$ 强于 A 作为 X 子空间所继承的子空间拓扑。□

作为推论，我们得到

推论 1.61

设 $(X,\mathscr{T}_X)$ 和 $(Y,\mathscr{T}_Y)$ 为拓扑空间，赋予 $A\subset X$ 子空间拓扑。

(1) 如果映射 $f:X\to Y$ 是连续的，则 $f|_A:A\to Y$ 是连续的。

(2) 映射 $g:Y\to A$ 是连续的当且仅当 $\iota\circ g:Y\to X$ 是连续的。♡

证明 (1) 由命题1.52以及 $f|_A=f\circ\iota$ 即可得到。

(2) “仅当”部分是命题1.52和命题 1.60 的推论。“当”的部分由定义可得：对于 A 中的任意开集 $A\cap U$，其中 $U\in\mathscr{T}_X$，我们有 $g^{-1}(A\cap U)=(\iota\circ g)^{-1}(U)$. □

对于乘积空间，最自然的映射是投影映射。我们有

命题 1.62.（乘积空间的投影映射）

设 $(X,\mathscr{T}_X)$ 和 $(Y,\mathscr{T}_Y)$ 为拓扑空间，$(X\times Y,\mathscr{T}_{X\times Y})$ 为其乘积拓扑空间。则投影映射

$$\pi_X: X\times Y\to X,\quad (x,y)\mapsto x$$

$$\pi_Y: X\times Y\to X,\quad (x,y)\mapsto y$$

都是连续映射，也都是开映射。♠

证明 我们只证明关于 π_X 的结论，因为关于 π_Y 的证明是相似的。π_X 连续是因为

$$\forall U\in\mathscr{T}_X,\pi_X^{-1}(U)=U\times Y\in\mathscr{T}_{X\times Y}.$$

π_X 是开映射是因为对任意开集 $W\in X\times Y$ 和任意 $x\in\pi_X(W)$，存在点 $(x,y)\in W$. 根据乘积拓扑的定义，存在 X 中开集 $U\ni x$ 和 Y 中开集 $V\ni y$ 使得 $(x,y)\in U\times V\subset W$. 于是 $x\in U\subset\pi_X(W)$. 所以 $\pi_X(W)$ 在 X 中是开集，即 π_X 是一个开映射。□

注意投影映射不一定是闭映射。例如，平面 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 里的闭集 $\{(x,1/x)\mid x>0\}$ 到分量 $\mathbb{R}$ 上的投影是 $(0,+\infty)$，并不是 $\mathbb{R}$ 中的闭集。

¶ 同胚

通过连续映射，我们可以定义拓扑空间之间的等价性。

定义 1.63.（同胚）

设 X 和 Y 是拓扑空间。如果存在可逆映射 $f: X \to Y$ 使得 f 和 f^{-1} 都是连续映射，则我们称拓扑空间 X 和 Y 是**同胚的**，记为 $X \simeq Y$；而映射 f 则被称为是 X 和 Y 之间的一个**同胚**。♣

如果一个性质在同胚下被保持，我们称它是一个 **拓扑性质**。

容易验证同胚是一个等价关系：

命题 1.64.（同胚是等价关系）

同胚是拓扑空间之间的等价关系。♠

证明 我们有

- $X \simeq X$：因为 $\mathrm{Id}: (X, \mathscr{T}_X) \to (X, \mathscr{T}_X)$ 是同胚。
- $X \simeq Y \implies Y \simeq X$：如果 $f: X \to Y$ 是同胚，那么 $f^{-1}: Y \to X$ 也是同胚。
- $X \simeq Y, Y \simeq Z \implies X \simeq Z$：如果 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是同胚，那么 $g \circ f: X \to Z$ 是双射，且由命题 1.52，$g \circ f$ 和 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 都连续。

□

我们将同胚的拓扑空间视为同一空间。

例 1.65. 在通常的欧氏拓扑下，不难看出

(1) $(0, 1) \simeq \mathbb{R}$.

(2) $S^n - \{\text{北极点}\} \simeq \mathbb{R}^n$.

(3) $[0, 1] \not\simeq (0, 1) \not\simeq [0, 1) \not\simeq S^1 \not\simeq \mathbb{R}^2$.

除了连续和双射，从定义中可以清楚地看出同胚必须既是开映射又是闭映射。反过来，根据定义，如果 f 是可逆的，那么 f^{-1} 是连续的当且仅当 f 是开映射（也当且仅当 f 是闭映射）。于是我们有

命题 1.66.（同胚与开/闭映射）

设 $f: X \to Y$ 是一个连续双射。如果 f 是开映射或是闭映射，那么 f 是同胚。♠

与度量空间的情况类似，我们可以定义拓扑嵌入的概念：

定义 1.67.（拓扑嵌入）

设 X, Y 是拓扑空间，$f: X \to Y$ 是一个连续单射。如果 f 是从 X 到 $f(X) \subset Y$（赋有子空间拓扑）的同胚，我们则称 f 是从 X 到 Y 的**拓扑嵌入**。♣

¶（阅读材料）相容性：拓扑群和拓扑向量空间

在数学中，我们的研究对象往往具有多种不同的结构。一个自然的问题是，拓扑结构与其它结构是否相容，因为在有相容性的情况下，这些不同的结构之间会碰撞出新的

火花，从而我们可以预期有更丰富多彩的性质。一般而言，拓扑结构与其它结构之间的相容性是通过其它结构中出现的映射的连续性来定义的，例如，

定义 1.68.（拓扑群）

设 G 是一个群，且 G 上赋有一个拓扑结构。如果群运算

$$m : G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto m(g_1, g_2) := g_1 \cdot g_2$$

和

$$i : G \to G, \quad g \mapsto i(g) := g^{-1}$$

都是连续映射[这里我们赋予 $G \times G$ 乘积拓扑]，则我们称 G 为一个**拓扑群**。[a]

[a]在拓扑群的定义中，一些作者会要求 G 上的拓扑满足进一步的分离性质，例如后文中将要定义的 T_1 或 T_2.

♣

类似地，可以定义 **拓扑环**、**拓扑域**等等。

例 1.69. 拓扑群（及其光滑版本 **李群**）在数学中被广泛用于描述连续对称性。这里给出一些常见的例子：

(1) （无趣）任何赋有离散拓扑的群 G 都是一个拓扑群。

(2) $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 在通常的群结构和通常的拓扑下是拓扑群（实际上还是拓扑域）。

(3) $S^1, \mathbb{R}^n, \mathbb{T}^n := (S^1)^n$ （在通常的群与拓扑结构下）是拓扑群。

(4) 矩阵群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}), \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{R}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}), \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$ 等等（在通常的结构下）都是拓扑群。

(5) 上面 (2)、(3)、(4) 中的例子实际上是李群。这里给出一个不是李群的拓扑群：$\mathbb{Q}$ 在具有通常的结构下是一个拓扑群，但不是李群。

在泛函分析中，人们研究向量空间（通常是无限维）上的分析学。此时向量空间的拓扑结构与向量空间的线性结构之间的相容性是至关重要的：

定义 1.70.（拓扑向量空间）

设 X 是 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$（或某个拓扑域 $\mathbb{K}$）上的向量空间，并被赋予了一个拓扑[a]。如果向量加法映射

$$+ : X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

和标量乘法映射

$$\bullet : \mathbb{K} \times X \to X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

都是连续映射[这里 $X \times X$ 和 $\mathbb{K} \times X$ 都使用乘积拓扑]，则我们称 X 为一个 **拓扑向量空间**。

[a]同样，在拓扑向量空间的定义中，一些作者会要求 X 上的拓扑满足进一步的分离性质。

♣

注意，拓扑向量空间自动是拓扑群。

例 1.71.

(1) $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ 在通常的结构下是拓扑向量空间。

(2) 在赋予离散拓扑时，$\mathbb{R}^n$ 不是拓扑向量空间。[虽然向量加法仍然是连续的，但标量乘法不是连续的。]

(3) 在例1.6中出现的度量空间 $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d), (l^p(\mathbb{R}), d_p), (C([a,b]), L^p)$ 等等，在其度量拓扑下，都是拓扑向量空间。

(4) 事实上，在泛函分析中，我们见到的各种空间都是拓扑向量空间，而且他们之间具有如下包含关系：

{Hilbert 空间}⊂{Banach 空间}⊂{Fréchet 空间}⊂{局部凸拓扑向量空间}⊂{拓扑向量空间}

1.4 拓扑的构造

1.4.1 基与子基

¶ 用基定义拓扑

我们可以仔细观察一下度量拓扑 $\mathscr{T}_d$，Sorgenfrey 拓扑 $\mathscr{T}_{Sorgenfrey}$，乘积拓扑 $\mathscr{T}_{X\times Y}$ 以及逐点收敛拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 等拓扑的定义，

$$\mathscr{T}_d = \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists r > 0 \text{ 使得} B(x,r) \subset U\},$$

$$\mathscr{T}_{Sorgenfrey} = \{U \subset \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0 \text{ 使得} [x, x+\varepsilon) \subset U\},$$

$$\mathscr{T}_{X\times Y} = \{W \subset X \times Y \mid \forall (x,y) \in W, \exists U \in \mathscr{T}_X \text{ 和} V \in \mathscr{T}_Y \text{ 使得} (x,y) \in U \times V \subset W\},$$

$$\mathscr{T}_{p.c.} = \{U \subset \mathcal{M} \mid \forall f_0 \in U, \exists x_1, \cdots, x_n \text{以及} \varepsilon > 0 \text{ 使得} \omega(f_0; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) \subset U\}.$$

不难发现这些拓扑之间有一个共同的性质：它们都具有如下形式

$$\mathscr{T}_{\mathcal{B}} := \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B} \text{ 使得} x \in B \subset U\}, \tag{1.4.1}$$

其中 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 是某个集族，比如，对于度量拓扑，

$$\mathcal{B} = \text{给定度量空间中的所有开球。}$$

这种多次出现的现象背后一般都有某种更一般的规律，让我们试着找到它！设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 是 X 的子集的集族，

问题 在 $\mathcal{B}$ 满足什么条件下，由 (1.4.1) 定义的集族 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 是 X 上的一个拓扑?

- 根据构造, $\emptyset \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$.
- 我们希望有 $X \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 所以我们需要

$$\forall x \in X, \exists B \in \mathcal{B} \text{ 使得} x \in B. \tag{B1}$$

- 假设 $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 我们希望有 $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 即要求

$$\forall U_1, U_2 \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}, \forall x \in U_1 \cap U_2, \exists B \in \mathcal{B} \text{ 使得} B \subset U_1 \cap U_2. \tag{1.4.2}$$

  然而，这个条件涉及到集族 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 中的元素 U_1, U_2，因而并不是关于集族 $\mathcal{B}$ 本身的条件。不过，根据 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 的构造，对于任意 $x \in U_1 \cap U_2$，均存在 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 使得

$$x \in B_1 \subset U_1 \quad \text{以及} \quad x \in B_2 \subset U_2.$$

  因此，为了使 (1.4.2) 成立，我们可以假设

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } x \in B \subset B_1 \cap B_2. \tag{B2}$$

  注意: (B2) 不仅是 ($\star$) 的充分条件，也是其必要条件，因为根据 (1.4.1)，必有

$$\mathcal{B} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{B}}.$$

- 最后，假设 $U_\alpha \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$. 则我们自动有 $\cup_\alpha U_\alpha \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$, 因为 $\forall x \in \cup_\alpha U_\alpha, \exists \alpha_0$ 使得 $x \in U_{\alpha_0}$. 所以 $\exists B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset U_{\alpha_0}$, 这意味着 $x \in B \subset \cup_\alpha U_\alpha$ 即 $\cup_\alpha U_\alpha \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$.

答案 由 (1.4.1) 定义的 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 是 X 上的拓扑的充要条件是集族 $\mathcal{B}$ 满足条件 (B1) 和 (B2)。

定义 1.72.（拓扑基）

若集族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 满足条件 (B1) 和 (B2)，则我们称 $\mathcal{B}$ 为 X 的一个 **拓扑基**，并称由 (1.4.1) 定义的拓扑 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 称为 **由基 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑**。♣

注 1.73. 不同的基可以生成相同的拓扑。例如，$\mathbb{R}^2$ 的以下三个拓扑基所生成的拓扑都是欧氏拓扑：

$$\mathcal{B}_1 = \{B(x,r) \mid x \in \mathbb{R}^2, r > 0\},$$
$$\mathcal{B}_2 = \{B(x,r) \mid x \in \mathbb{Q}^2, r \in \mathbb{Q}_{>0}\},$$
$$\mathcal{B}_3 = \{(a,b) \times (c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$

注意，上面第二个拓扑基 $\mathcal{B}_2$ 是一个可数族！

我们再次强调一下：根据定义，$\mathcal{B} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$，即 $\mathcal{B}$ 中的每个元素都是拓扑 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 中的一个开集。反之通常不成立。

¶ 例子：箱拓扑

通过拓扑基，我们可以在任意多拓扑空间的乘积空间上构造一个拓扑：

例 1.74. （**箱拓扑**）任给一族拓扑空间 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$，我们想在笛卡尔积

$$\prod_\alpha X_\alpha = \{(x_\alpha) \mid x_\alpha \in X_\alpha\}$$

上定义一个拓扑。我们可以跟定义两个拓扑空间的乘积拓扑一样，考虑集族

$$\mathcal{B} = \left\{\prod_\alpha U_\alpha \mid U_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha\right\}.$$

很容易验证 $\mathcal{B}$ 满足 (B1), (B2)，从而是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 的一个拓扑基。它所生成的拓扑

$$\mathscr{T}_{Box} = \{U \subset \prod_\alpha X_\alpha \mid \forall (x_\alpha) \in U, \exists U_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha \text{ 使得} (x_\alpha) \in \prod_\alpha U_\alpha \subset U\}$$

被称为是 $X = \prod_\alpha X_\alpha$ 上的 **箱拓扑**。

¶ 用基定义拓扑：极小性

为了理解 $\mathcal{B}$ 和 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 之间的关系，我们给出 "拓扑基 $\mathcal{B}$ 生成拓扑 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$" 的另一种解释：

命题 1.75.（开集作为基元素的并）

如果 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基，那么它所生成的拓扑为

$$\mathscr{T}_{\mathcal{B}} = \{\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \mid \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\}.$$

♠

证明 由 $\mathcal{B} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 可知，对于任何子集族 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, 都有

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}.$$

反之，对于任意 $U \in \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 和任意 $x \in U$，根据定义存在 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_x \subset U$。因此 $U = \bigcup_{x \in U} B_x$，即 U 具有给定的形式。 □

作为推论，我们有

推论 1.76.（拓扑基所生成拓扑的极小性）

设 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基，拓扑 $\mathscr{T}'$ 满足 $\mathcal{B} \subset \mathscr{T}'$，则 $\mathscr{T}_{\mathcal{B}} \subset \mathscr{T}'$. ♡

因此，$\mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 是“最小的”使 $\mathcal{B}$ 中的所有集合都是开集的拓扑：

$$\mathscr{T}_{\mathcal{B}} = \bigcap_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathscr{T}' \\ \mathscr{T}' \text{是拓扑}}} \mathscr{T}'.$$

¶ 由任意子集族生成的拓扑

事实上，上述公式可用于从任意子集族（不需要是拓扑基）构造拓扑。为了看清这一点，我们首先回忆在命题 1.41中，我们证明了 X 上任意一族拓扑 $\mathscr{T}_\alpha$ 的交 $\bigcap_\alpha \mathscr{T}_\alpha$ 依然是一个拓扑。特别地，对于 X 中的任意子集族 $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$，

$$\mathscr{T}_{\mathcal{S}} := \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathscr{T}' \\ \mathscr{T}' \text{是拓扑}}} \mathscr{T}' \tag{1.4.3}$$

是 X 上的一个拓扑。

定义 1.77.（任意集族生成的拓扑）

任给 X 中的子集族 $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$，我们称由 (1.4.3) 定义的拓扑为由 $\mathcal{S}$ **生成的拓扑**。♣

注意，根据定义，$\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$ 是使 $\mathcal{S}$ 中的所有集合都是开集的拓扑中最弱的拓扑。一个自然的问题是：$\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$ 是什么？

命题 1.78.（集族生成拓扑的基）

设 $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ 为子集族，并记

$$\mathcal{B} = \{B \mid \exists S_1, \cdots, S_m \in \mathcal{S} \text{ 使得} B = S_1 \cap \cdots \cap S_m\}. \tag{1.4.4}$$

则

(1) 如果 $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$，那么 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基，且 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}} = \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$.

(2) 一般地，如果 $X' = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} \subset X$，那么 $\mathcal{B}$ 是 X' 上的一个拓扑基，且 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}} = \{X\} \cup \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$. ♠

证明 (1) 由定义，$\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$. 所以条件 $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} = X$ 意味着 $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} = X$，这等价于集族 $\mathcal{B}$ 满足条件 (B1). 由构造，$\mathcal{B}$ 也满足条件 (B2). 所以 $\mathcal{B}$ 是一个拓扑基. 显然对于任意拓扑 $\mathscr{T}'$，

$$\mathscr{T}' \supset \mathcal{S} \iff \mathscr{T}' \supset \mathcal{B}.$$

所以 $\bigcap_{\mathcal{S} \subset \mathscr{T}'} \mathscr{T}' = \bigcap_{\mathcal{B} \subset \mathscr{T}'} \mathscr{T}'$，即由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑就是 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$.

(2) 由 (1)，$\{X\} \cup \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$ 是 X 上的一个拓扑。根据构造，它是 X 上使 $\mathcal{S}$ 中的所有集合都是开集的拓扑中最弱的拓扑。 □

¶ 用子基定义的拓扑

鉴于命题 1.78，我们自然地定义

定义 1.79.（拓扑子基）

如果集族 $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ 满足 $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$，则我们称 $\mathcal{S}$ 是 X 的一个**拓扑子基**，而称 $\mathscr{T}_{\mathcal{S}}$ 为**由子基 S 生成的拓扑**。♣

我们给出由拓扑基或拓扑子基所生成拓扑的一些例子：

例 1.80.

(1) 对于 $\mathbb{R}$ 上的标准欧氏拓扑，

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a < b\}$$

是一个拓扑基，而

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, a), (a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

是一个子基。

(2) 对于 $X \times Y$ 上的乘积拓扑，

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathscr{T}_X, V \in \mathscr{T}_Y\}$$

是一个拓扑基，而

$$\mathcal{S} = \{U \times Y \mid U \in \mathscr{T}_X\} \bigcup \{X \times V \mid V \in \mathscr{T}_Y\}$$

是一个子基。

(3) 对于 $\mathcal{M}([0, 1], \mathbb{R})$ 上的逐点收敛拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$，

$$\mathcal{B} = \{\omega(f; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) \mid f \in \mathcal{M}([0, 1], \mathbb{R}), n \in \mathbb{N}, x_1, \cdots, x_n \in [0, 1], \varepsilon > 0\}$$

是一个拓扑基，而

$$\mathcal{S} = \{\omega(f; x; \varepsilon) \mid f \in \mathcal{M}([0, 1], \mathbb{R}), x \in [0, 1], \varepsilon > 0\}$$

是一个子基。

¶ 基和子基的判据

一个自然的问题是：给定集族 $\mathcal{B}$，我们如何判断它是否是生成给定拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个拓扑基？下面是一个简单的判据：

命题 1.81.（拓扑基的判据）

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，则集族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 是生成 $\mathscr{T}$ 的一个拓扑基当且仅当

(1) $\mathcal{B} \subset \mathscr{T}$,

(2) 对于任意 $U \in \mathscr{T}$ 和任意 $x \in U$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset U$. ♠

证明 由定义, 如果 $\mathcal{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个基，则 (1), (2) 成立。

反之，显然由 (2) 可以推出 (B1)，并且 (1)(2) 一起可以推出 (B2)。所以 $\mathcal{B}$ 是一个基。此外, 由 (2) 可知 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_{\mathcal{B}}$. 但根据最小性, $\mathscr{T}_{\mathcal{B}} \subset \mathscr{T}$. 所以 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑就是 $\mathscr{T}$. □

类似地，不难证明

命题 1.82.（拓扑子基的判据）

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间，则集族 $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ 是生成 $\mathscr{T}$ 的一个子基当且仅当

(1) $\mathcal{S} \subset \mathscr{T}$,

(2) 对任意 $U \in \mathscr{T}$ 和任意 $x \in U$, 存在 $S_1, \cdots, S_n \in \mathcal{S}$ 使得 $x \in \cap_{i=1}^n S_i \subset U$.

¶ 用基和子基刻画连续性

我们已经看到，拓扑空间之间的映射 $f : X \to Y$ 是连续的当且仅当任意开集的原像依然是开集。事实上，为了判定一个映射是否连续，我们只需要验证一部分集合的原像是否开集：我们只需验证一个拓扑基或子基中的元素的原像是否开集即可。

定理 1.83.（连续映射的刻画：拓扑基与子基）

假设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathscr{T}_Y$ 的一个拓扑基，$\mathcal{S}$ 是 $\mathscr{T}_Y$ 的一个子基。那么

$$\begin{aligned} &\text{映射} f : (X, \mathscr{T}_X) \to (Y, \mathscr{T}_Y) \text{是连续映射} \\ \Longleftrightarrow &\text{对于任意} B \in \mathcal{B}, \text{其原像} f^{-1}(B) \text{在} X \text{中是开集} \\ \Longleftrightarrow &\text{对于任意} S \in \mathcal{S}, \text{其原像} f^{-1}(S) \text{在} X \text{中是开集}. \end{aligned}$$

证明 我们只需证明

$$f^{-1}(S) \in \mathscr{T}_X, \forall S \in \mathcal{S} \Longrightarrow f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_X, \forall V \in \mathscr{T}_Y,$$

而这是如下事实的直接推论：f^{-1} 保并集和交集（见注1.58），即

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha} \bigcap_{i=1}^{n(\alpha)} S_{\alpha,i}\Big) = \bigcup_{\alpha} \bigcap_{i=1}^{n(\alpha)} f^{-1}(S_{\alpha,i}).$$

□

¶ 例子：序拓扑

事实上，例1.80(1) 中的构造适用于任何全序集。我们先给出定义：

定义 1.84.（偏序集与全序集）

设 X 是一个集合。

(1) 若 X 上存在一个关系 $\leq$，满足
- $x \leq x$,
- 如果 $x \leq y, y \leq z$, 则 $x \leq z$,
- 如果 $x \leq y, y \leq x$, 则 $x = y$.

则称 $\leq$ 为 X 上的一个**偏序关系**，而称 $(X, \leq)$ 为一个**偏序集**。

(2) 若 $\leq$ 是 X 上的一个偏序，且对任意 x, y 都有 $x \leq y$ 或 $y \leq x$，则称 $\leq$ 为 X 上的一个**全序关系**，而称 $(X, \leq)$ 为一个**全序集**。

注意，给定任何序关系 $\leq$，我们可以定义 $<$ 如下

$$x < y \Longleftrightarrow x \leq y \text{ 且} x \neq y.$$

现在我们将例 1.80(1) 定义拓扑拓展到任意全序集：

定义 1.85. (序拓扑)

设 $(X, \leq)$ 为全序集，令

$$\mathcal{S} = \{\{x \mid x < a\}, \{x \mid x > a\} \mid a \in X\}.$$

则以 $\mathcal{S}$ 为子基所生成的拓扑 $\mathscr{T}_{order}$ 称为 X 的**序拓扑**。♣

不难看出，由所有形如

$$\{x \mid x < a\}, \{x \mid x > a\}, \{x \mid a < x < b\}$$

的集合构成的集族为序拓扑 $\mathscr{T}_{order}$ 的一个拓扑基。

¶ 例子：乘积拓扑

设 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 为一族拓扑空间。现在我们在笛卡尔积 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上定义乘积拓扑。我们已经看到，通过将例 1.80(2) 中的拓扑基 $\mathcal{B}$ 推广到任意多个空间的笛卡尔积 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上，我们可以在 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上定义箱拓扑。现在我们将推广例 1.80(2) 中的子基 $\mathcal{S}$ 来构造 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上的乘积拓扑。注意对于 $X \times Y$，如果我们记 $\pi_X : X \times Y \to X$ 为典范投影，那么 $U \times Y = \pi_X^{-1}(U)$。于是，$X \times Y$ 的乘积拓扑就是以所有形如 $\pi_X^{-1}(V)$ 以及 $\pi_Y^{-1}(U)$ 的集合为子基所生成的拓扑。

一般地，对于任意多个空间的笛卡尔积，我们记

$$\pi_\beta : \prod_\alpha X_\alpha \to X_\beta, \quad (x_\beta) \mapsto x_\alpha$$

为“向 α 分量的典范投影”。

定义 1.86. (乘积拓扑)

设 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 为一族拓扑空间。我们称 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上由子基

$$\mathcal{S} = \bigcup_\beta \{\pi_\beta^{-1}(V_\beta) \mid V_\beta \in \mathscr{T}_\beta\}$$

生成的拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 为 $\prod_\alpha X_\alpha$ 的**乘积拓扑**。♣

根据定义，显然 $\mathscr{T}_{product}$ 弱于 $\mathscr{T}_{box}$。

注 1.87. 虽然乘积拓扑看起来不像箱拓扑那么自然，但事实证明乘积拓扑更重要：它具有很多很好的拓扑性质。另一方面，箱拓扑有很多不好的性质，因而在拓扑学里常常扮演反面角色，被广泛用作反例。、当然，对于有限乘积空间，这两种拓扑是一样的。

注 1.88. 事实上，例1.80(3)所描述的用子基生成逐点收敛拓扑的方式，跟上面定义任意多个拓扑空间的乘积拓扑是一致的：首先，作为集合我们有

$$\mathcal{M}([0,1], \mathbb{R}) (= \mathbb{R}^{[0,1]}) = \prod_{x \in [0,1]} \mathbb{R}$$

其对应方式是

$$f:[0,1]\to\mathbb{R} \quad \leftrightsquigarrow \quad (f(x))_{x\in[0,1]}.$$

在这个对应下，例1.80(3)中的子基元素 $\omega(f;x;\varepsilon)$ 恰好对应到乘积空间里的集合 $\pi_x^{-1}((f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon))$. 由此我们可得：逐点收敛拓扑空间 $(\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}),\mathscr{T}_{p.c.})$ 跟乘积拓扑空间 $(\prod_{x\in[0,1]}\mathbb{R},\mathscr{T}_{product})$ 是同胚的。

在命题1.62中我们证明了从两个拓扑空间的乘积空间到每个分量的典范投影映射是连续的开映射。现将该性质推广到任意多个拓扑空间的乘积上去：

命题 1.89.（投影映射是连续开映射）

设 $(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ 为一族拓扑空间。则无论赋予 $\prod_\alpha X_\alpha$ 乘积拓扑还是箱拓扑，对任意 β，典范投影映射 $\pi_\beta:\prod_\alpha X_\alpha\to X_\beta$ 都是连续的开映射。

证明 因为乘积拓扑弱于箱拓扑，因此只需在 $\mathscr{T}_{product}$ 下证明 π_β 是连续映射，在 $\mathscr{T}_{Box}$ 下证明 π_β 是开映射。

- 在 $\mathscr{T}_{product}$ 下，π_β 是连续映射，因为 $(X_\beta,\mathscr{T}_\beta)$ 中的任意开集 V_β 的原像 $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ 是 $(\prod_\alpha X_\alpha,\mathscr{T}_{product})$ 中的开集。
- 在 $\mathscr{T}_{Box}$ 下，π_β 是开映射，因为对任意开集 $W\subset\mathscr{T}_{Box}$ 和任意 $x\in W$，存在 $U_\alpha\in\mathscr{T}_\alpha$ 使得 $x\in\prod_\alpha U_\alpha$. 因此，$\pi_\beta(x)\in U_\beta\subset\pi_\beta(W)$.

□

事实上，乘积拓扑可以用投影映射 π_β 来刻画：

命题 1.90.（乘积拓扑的刻画）

乘积拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 是在 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上使所有典范投影映射 π_β 都连续的拓扑中最弱的拓扑。

证明 我们已经看到所有 π_β 关于 $\mathscr{T}_{product}$ 都是连续的。反之，如果所有 π_β 关于 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上的某个拓扑 $\mathscr{T}$ 都连续，那么每个 $\pi_\beta^{-1}(V_\beta)$ 在 $\mathscr{T}$ 中是开集，所以 $\mathscr{T}_{product}$ 比 $\mathscr{T}$ 弱。□

¶ 乘积拓扑的泛性质

乘积拓扑也可以通过如下泛性质来刻画：

定理 1.91.（乘积拓扑的泛性质）

设 X, X_α 是拓扑空间，$f_\alpha: X\to X_\alpha$ 是映射。赋予空间 $\prod_\alpha X_\alpha$ 乘积拓扑。则映射

$$f: X\to\prod_\alpha X_\alpha,\ x\mapsto(f_\alpha(x))$$

是连续映射当且仅当所有 $f_\alpha=\pi_\alpha\circ f$ 都是连续映射。更进一步，乘积拓扑是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上唯一一个满足这个性质的拓扑。

证明

- $(\Rightarrow)$ 如果 f 是连续的，则 $f_\beta=\pi_\beta\circ f$ 是连续的。

- ($\Leftarrow$) 假设 f_α 都是连续的。为了证明 f 是连续的，由命题 1.83，只需证明 $f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(V_\beta))$ 在 X 中都是开集，其中 V_β 是 X_β 中的开集。事实上我们有
$$f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(V_\beta)) = (\pi_\beta \circ f)^{-1}(V_\beta) = f_\beta^{-1}(V_\beta).$$
所以由 f_β 的连续性，上述集合在 X 中是开集。
- 最后我们证明乘积拓扑可以用泛性质刻画：假设 $\mathscr{T}$ 是 X 上满足泛性质的拓扑。
  - 由 $\mathscr{T}$ 的泛性质和 $\pi_\beta : (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product}) \to X_\beta$ 的连续性，恒等映射
  $$\mathrm{Id} : (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product}) \to (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T})$$
  是连续的。
  - 而且，由 $\mathscr{T}$ 的泛性质和恒等映射 $\mathrm{Id} : (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \to (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T})$ 的连续性，我们发现所有投影映射 $\pi_\beta : (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \to X_\beta$ 也都是连续的.
  - 再由投影映射 $\pi_\beta : (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \to X_\beta$ 的连续性和 $\mathscr{T}_{product}$ 的泛性质，我们得出恒等映射 $\mathrm{Id} : (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}) \to (\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product})$ 是连续的。

  所以 $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{product}$.

□

作为推论，我们有

推论 1.92.（嵌入映射的连续性） 固定一个指标 α，并对任意 $\beta \neq \alpha$，取定 $x_\beta \in X_\beta$。设
$$g_\alpha : X_\alpha \to \prod_\beta X_\beta$$
为从 X_α 到 $\prod_\beta X_\beta$ 的由这些 x_β 所确定的“嵌入映射”，即满足
$$\pi_\beta(g_\alpha(x)) = \begin{cases} x_\beta, & \beta \neq \alpha \\ x, & \beta = \alpha \end{cases}$$
的映射，则 g_α 是连续映射。

注 1.93. 箱拓扑不满足泛性质。例如，我们令
$$X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R},$$
并考虑映射
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ t \mapsto (t, t, t, \cdots).$$
则 f 的每个分量都是 $\mathbb{R}$ 到自身的恒等映射，从而 f 的每个分量都连续。但是如果我们赋 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ 箱拓扑，那么 f 不是连续的。这是因为笛卡尔积
$$(-1,1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times \cdots$$
在箱拓扑中是开集，但
$$f^{-1}\left((-1,1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times \cdots\right) = \{0\}$$
在 $\mathbb{R}$ 中不是开集.

1.4.2 由映射定义的拓扑

¶ 诱导拓扑

我们比较一下命题1.90以及命题1.60，

- 乘积拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上使所有典范投影 $\pi_\beta : \prod_\alpha X_\alpha \to (X_\beta, \mathscr{T}_\beta)$ 都连续的拓扑中最弱的拓扑。
- 拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的子集 A 上的子空间拓扑 $\mathscr{T}_A$ 是 A 上所有使得包含映射 $\iota : A \hookrightarrow X$ 连续的拓扑中最弱的拓扑。

一般地，我们可以用“使得给定映射都连续的最弱拓扑”来在原像空间上构造拓扑：

定义 1.94.（诱导拓扑）

设 $(Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间，设

$$\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}$$

是一族映射。则 X 上使所有 f_α 都是连续映射的拓扑中最弱的拓扑 $\mathscr{T}_{\mathcal{F}}$ 称为 X 的 $\mathcal{F}$-**诱导拓扑** (也称 **始拓扑** 或 **弱拓扑** 或 **极限拓扑**)。 ♣

注 1.95. 我们需要稍微解释一下定义。

- 首先，我们在例 1.59中已经看到，如果我们赋予 X 最强的拓扑，即离散拓扑，那么任何 f_α 都是连续的。这并不有趣。
- 如果在 X 上的一族拓扑 $\mathscr{T}_\beta$ 使得每个 f_α 关于每个 $\mathscr{T}_\beta$ 都是连续的，那么根据命题 1.41，$\mathscr{T} := \cap_\beta \mathscr{T}_\beta$ 是一个 X 上的拓扑，而且根据定义，f_α 关于 $\mathscr{T}$ 是连续的。因此，在 X 上存在唯一一个最弱拓扑使得每个 f_α 都是连续的。

我们不难找出这个拓扑。根据定义，$\mathscr{T}_{\mathscr{F}}$ 恰好是由子基

$$\mathcal{S}_{\mathscr{F}} = \bigcup_\alpha \{f_\alpha^{-1}(V_\alpha) \mid V_\alpha \in \mathscr{T}_\alpha\}.$$

所生成的拓扑。注意，在只有一个目标空间 $(Y, \mathscr{T}_Y)$ 和一个映射 $f : X \to (Y, \mathscr{T}_Y)$ 的特殊情况下，子基

$$\mathcal{S}_f = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{T}_Y\}.$$

本身就是 X 上的一个拓扑。所以此时

$$\mathscr{T}_f = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathscr{T}_Y\}.$$

重复定理 1.91 的证明过程，我们可以证明

命题 1.96.（诱导拓扑的泛性质）

设 $(Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间，$\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to (Y_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)\}$ 为一族映射。赋予 X 由 $\mathcal{F}$ 诱导的拓扑。那么对于任意拓扑空间 Z，映射 $f : Z \to X$ 连续当且仅当所有 $f_\alpha \circ f : Z \to Y_\alpha$ 都是连续的。更进一步，$\mathcal{F}$ 所诱导的拓扑是 X 上唯一满足该性质的拓扑。 ♠

¶ 诱导拓扑的更多例子

我们已经看到子空间拓扑和乘积拓扑都可以解释为诱导拓扑。下面给出更多例子：

例 1.97.

(1) **(作为诱导拓扑的度量拓扑)** 对于任意度量空间 (X, d)，度量拓扑是由所有度量球 $\{B(x, r) \mid x \in X, r > 0\}$ 生成的。换言之，度量拓扑是由映射族 $\{d_x \mid x \in X\}$ 生成的诱导拓扑, 其中 $d_x : X \to (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{usual})$ 是距离函数 $d_x(y) := d(x, y)$.

(2) **(作为诱导拓扑的逐点收敛拓扑)** 设 $X = \mathcal{M}([0,1], \mathbb{R})$ 是 $[0,1]$ 上所有实值函数构成的空间。对任意 $x \in [0,1]$, 令 $ev_x : X \to \mathbb{R}$ 为赋值映射

$$ev_x(f) := f(x).$$

注意这里的赋值映射就是把 $\mathcal{M}([0,1], \mathbb{R})$ 视作乘积空间时的投影映射。于是我们得到：在 X 上由 $\{ev_x \mid x \in [0,1]\}$ 生成的诱导拓扑是逐点收敛拓扑。

(3) **(弱拓扑和弱 * 拓扑)** 设 X 是拓扑向量空间，X^* 为其对偶空间，即

$$\begin{aligned} X^* &= X \text{ 上所有连续线性泛函构成的空间} \\ &= \{f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{线性且（关于 } X \text{ 的原拓扑）连续}\}. \end{aligned}$$

然后我们可以在 X 上定义一个新的拓扑，并在 X^* 上定义一个自然的拓扑：

- X 上的**弱拓扑**是 X^* 生成的诱导拓扑, 即 X 上使所有 $f \in X^*$ 连续的拓扑中最弱的拓扑。[因此，X 上的弱拓扑比 X 上的原始拓扑更弱。]
- X^* 上的**弱 $*$ 拓扑**是由 $\{ev_x \mid x \in X\}$ 生成的诱导拓扑，即 X^* 上使所有赋值映射

$$ev_x : X^* \to \mathbb{R}, \quad l \mapsto l(x)$$

都连续的拓扑中最弱的拓扑。

弱拓扑和弱 $*$ 拓扑是泛函分析和偏微分方程中非常重要的拓扑。

¶ 余诱导拓扑

映射不仅可以用来将拓扑从映射的像空间“拉回”到原像空间，还可以用于将拓扑从映射的原像空间“推出”到像空间。更准确地说，设 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间，Y 是一个集合，$f_\alpha : X_\alpha \to Y$ 是一族映射。我们可以赋予 Y 一个拓扑，使得每个 f_α 都是连续的。当然，为了这个目的，我们不能在 Y 中定义太多的开集。另一方面，我们也不想使用 Y 中的平凡拓扑，因为它太弱了以至于从任何拓扑空间到 Y 的任何映射都是连续的。所以这里问题是要在 Y 上找到一个尽可能强的拓扑结构，而且使得每个 f_α 都是连续的。因此我们自然地定义

定义 1.98.（余诱导拓扑）

设 $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间, Y 是一个集合，$\mathcal{F} = \{f_\alpha : X_\alpha \to Y\}$ 是一族映射。在 Y 上使得所有 f_α 都连续的拓扑中最强的拓扑 $\mathscr{T}$ 被称为是由 $\mathcal{F}$ 诱导的 **余诱导拓扑** (也称为 **终拓扑** 或 **强拓扑** 或 **余极限拓扑**) ♣

我们必须要小心一点：是否存在这种最强的拓扑结构？请注意，在定义由映射族 $\mathcal{F}$ 诱导的弱拓扑时，我们使用了这样一个事实，即 X 上的一族拓扑的交集仍然是 X 上的拓扑（参见命题 1.41 ）。通常，X 上的一族拓扑的并集并不是 X 上的拓扑。（找出一个例子！）但是，如果认真思考这个问题，你会发现我们其实处于比弱拓扑更简单的情况：

- 在只有一个映射 $f:(X,\mathscr{T}_X)\to Y$ 的情况下，Y 上的余诱导拓扑可以直接给出：
$$\mathscr{T}=\{V\subset Y\mid f^{-1}(V)\in\mathscr{T}_X\}.$$
不难验证它是 Y 上的一个拓扑。
- 在余诱导拓扑是由一族映射 $\mathcal{F}=\{f_\alpha\}$ 诱导的情况下，我们有一系列约束需要要同时满足。为此，我们要做的并不是把 Y 上相应的一族拓扑并起来，而是应该取 Y 上相应的拓扑族的交集，从而我们依然可以显式地给出该拓扑：

定理 1.99.（余诱导拓扑的显式表达）

设 $(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间，$f_\alpha:X_\alpha\to Y$ 是一族映射. 那么由 $\{f_\alpha\}$ 诱导的 Y 上的余诱导拓扑为
$$\mathscr{T}=\bigcap_\alpha\{V\subset Y\mid f_\alpha^{-1}(V)\in\mathscr{T}_\alpha\}.$$
♡

证明 根据定义容易验证 $\mathscr{T}$ 是 Y 上的一个拓扑，并且每个 f_α 关于这个拓扑是连续的。另一方面，如果我们再加入任何其他集合 V_0，则根据构造，存在 α 使得 $f_\alpha^{-1}(V_0)\notin\mathscr{T}_\alpha$，所以 f_α 不连续。 □

与诱导拓扑一样，余诱导拓扑也可以通过以下泛性质来刻画：

命题 1.100.（余诱导拓扑的泛性质）

设 $(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间，$\mathcal{F}=\{f_\alpha:X_\alpha\to Y\}$ 是一族映射。赋予 Y 以 $\mathcal{F}$ 诱导的拓扑。那么对于任意拓扑空间 X，映射 $f:Y\to Z$ 连续当且仅当每个 $f\circ f_\alpha:X_\alpha\to Z$ 都是连续的。此外，由 $\mathcal{F}$ 诱导的 Y 上的余诱导拓扑是唯一满足该性质的拓扑。
♠

最后我们再给出诱导拓扑与余诱导拓扑的几个例子：

例 1.101.

(1)（**拓扑的交集**）设 $\mathscr{T}_\alpha$ 是 X 上的一族拓扑。现在我们有一种不同的方式来考察拓扑 $\mathscr{T}=\bigcap_\alpha\mathscr{T}_\alpha$，其中 $\mathscr{T}_\alpha$ 是 X 上的一族拓扑。设 $\mathrm{Id}_\alpha:(X,\mathscr{T}_\alpha)\to X$ 是恒等映射. 则 $\mathscr{T}$ 是 X 上由 $\{\mathrm{Id}_\alpha\}$ 诱导的余诱导拓扑。

(2)（**拓扑的并 (join)**）设 $\mathscr{T}_\alpha$ 是 X 上的一族拓扑。一般而言，$\bigcup_\alpha\mathscr{T}_\alpha$ 不再是 X 上的拓扑。但是我们可以考虑由恒等映射族 $\{\widetilde{\mathrm{Id}}_\alpha:X\to(X,\mathscr{T}_\alpha)\}$ 在 X 上诱导的拓扑，该拓扑被称为 X 上给定拓扑族的**并拓扑**。由定义，它就是 $\bigcup_\alpha\mathscr{T}_\alpha$ 生成的最弱拓扑。

(3)（**拓扑并**）设 $(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ 是一族拓扑空间，且交集 $X_\alpha\cap X_\beta$ 上由 X_α 所确定的子空间拓扑与由 X_β 所确定的子空间拓扑是一致的，那么我们可以在并集 $X=\cup X_\alpha$ 上定义拓扑 $\mathscr{T}$ 为使所有 $\iota_\alpha:X_\alpha\hookrightarrow X$ 都连续的拓扑中最强的拓扑。换言之，$\mathscr{T}$ 是包含映射族 $\{\iota_\alpha\}$ 诱导的余诱导拓扑。拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 称为 $(X_\alpha,\mathscr{T}_\alpha)$ 的 **拓扑并**。

1.4.3 商拓扑

¶ 商拓扑

余诱导拓扑的最重要的例子是所谓的**商拓扑**。因为它非常具体且"可以看见"，因此在几何和代数拓扑中被广泛使用。其定义如下：

定义 1.102.（商拓扑）
设 $(X,\mathscr{T}_X)$ 是拓扑空间, Y 是集合, $p: X \to Y$ 是满射.

(1) 我们称 Y 上由 p 诱导的余诱导拓扑 $\mathscr{T}_Y$ 为 Y 上的 **商拓扑**，称 $(Y,\mathscr{T}_Y)$ 为 $(X,\mathscr{T}_X)$ 的 **商空间**，称 $p:(X,\mathscr{T}_X)\to(Y,\mathscr{T}_Y)$ 为 **商映射**。

(2) 给定商映射 p, 我们称 $p^{-1}(y)$ 为 p 在点 $y \in Y$ 上的 **纤维**。 ♣

根据定义，在商拓扑 $\mathscr{T}_Y$ 中，

$$\text{集合 } V \subset Y \text{ 是开集当且仅当 } p^{-1}(V) \text{ 在 } (X,\mathscr{T}_X) \text{ 中是开集。}$$

由此易见，两个商映射的复合也是一个商映射。

根据余诱导拓扑的泛性质即命题1.100，我们有

定理 1.103.（商拓扑的泛性质）
设 X,Y,Z 为拓扑空间，$p: X \to Y$ 为商映射，$f: Y \to Z$ 为映射。那么 f 是连续的当且仅当 $g = f\circ p$ 是连续的。此外，Y 上的商拓扑是唯一满足该性质的拓扑。 ♡

作为推论，我们得到

推论 1.104
如果 $p: X \to Y$ 是一个商映射，而 $f: X \to Z$ 是一个连续映射，且 f 在每个纤维上都是常值的，那么自然诱导映射

$$\bar{f}: Y \to Z, \qquad \bar{f}(y) := f(p^{-1}(y))$$

是连续的。 ♡

¶ 作为等价类的商空间

下面是构建商映射/商拓扑的典型方法：从拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_X)$ 开始，先在 X 上选定一个等价关系 $\sim$. 回想一下，这意味着

- $x \sim x$;
- $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$;
- $x \sim y, y \sim z \Longrightarrow x \sim z$.

然后我们得到一个由所有等价类构成的抽象空间

$$Y = X/\sim$$

和一个自然的投影映射

$$p: X \to X/\sim,\ x \mapsto [x],$$

从而可以在等价类集合 Y 上构造商拓扑。在这种情况下，每个纤维恰是一个等价类。注意“用满映射定义商空间”的描述和“用等价关系定义商空间”的描述是等价的：给定等价关系的描述，我们有一个如上所示的投影映射作为我们的商映射；反之，给定任何商映射 $f: X \to Y$，我们可以通过 $x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$ 来定义 X 上的一个等价关系，其等价类集合恰为 Y.

例 1.105.

(1)（**作为商空间的圆**）我们可以用两种不同的方式视圆 S^1 为商空间：

(a). $S^1 \simeq [0,1]/\{0,1\}$: 在集合 $[0,1]$ 上定义一个等价关系，其中唯一的非平凡等价为 $0 \sim 1$，则所得的商空间为圆 S^1。

(b). $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$[14]: 在 $\mathbb{R}$ 上考虑等价关系

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z},$$

所得的商空间也是圆 S^1。

不难证明，上面这两种方式得到的商空间，跟平面中的单位圆是同胚的。

(2)（**与原拓扑相差悬殊的商拓扑**）我们可以把上面例子中的 $\mathbb{Z}$ 换成 $\mathbb{Q}$，在 $\mathbb{R}$ 上定义一个等价关系 $\sim$ 如下：

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

为了找到 $X = \mathbb{R}/\sim$ 上的商拓扑，我们设 $U \subset X$ 是开集，则 $p^{-1}(U)$ 在 $\mathbb{R}$ 中也是开集。特别地，U 包含某个开区间 (a, b). 由等价关系 $\sim$ 的定义，任意实数 $x \in \mathbb{R}$ 都等价于 (a, b) 中的某个数，所以 $p^{-1}(U) = \mathbb{R}$。所以 X 上的商拓扑是平凡拓扑。

¶ 实射影空间

下面我们给出一个商空间的重要例子：实射影空间。我们给出两种描述。

例 1.106.（实射影空间）

- 在 $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 上我们可以定义等价关系：

$$x \sim y \iff \exists 0 \neq \lambda \in \mathbb{R} \text{ 使得} x = \lambda y.$$

赋以商拓扑的商空间

$$\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}/\sim$$

称为实射影空间。由此我们得到实射影空间的一种几何解释:

$$\boxed{\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} \text{ 中所有经过原点 } O \text{ 的直线构成的空间.}}$$

- 我们也可以从单位球 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 出发，定义等价关系

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; x = \pm y.$$

由于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中通过原点 O 的直线与 S^n 正好在两个对径点相交，因此最终得到的商空间是相同的。

---

[14]在这里，我们把 $\mathbb{Z}$ 视作加法群作用于 $\mathbb{R}$ 上，见下文的例1.115(1)。在文献中 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 常常还表示另外一个完全不同的商空间：视 $\mathbb{Z}$ 为 $\mathbb{R}$ 的子集，而 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 表示把整个子集 $\mathbb{Z}$ 收缩到一个点（见下文的“收缩”构造），此时 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 在拓扑上是可数个圆的楔和空间，见的“楔和”构造。

注意，当 $n=1$ 时，$\mathbb{RP}^1$ 实际上同胚于 S^1，因为根据第二种描述方式，我们可以从一个半圆开始，然后将两个端点等同起来。然而，即使 $n=2$ 时的实射影平面，其几何图像也是非常复杂的：我们可以从一个半球开始构造，

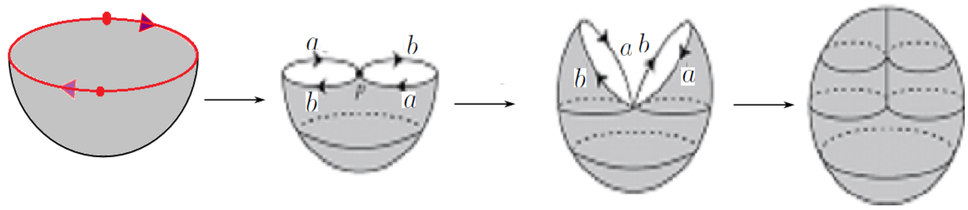


图 1.1: $\mathbb{RP}^2$ 的“图像”

可以看出，图中有“自相交”。但是，$\mathbb{RP}^2$ 的真实“图像”中不应该存在自相交。事实上，我们不能将 $\mathbb{RP}^2$ 嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中，而只能将它嵌入到 $\mathbb{R}^4$ 中。此外，跟 Möbius 带一样，当 n 为偶数时 $\mathbb{RP}^n$ 都是不可定向的。

注 1.107. 类似地，可以构造 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中复直线所构成的空间，即**复数射影空间** $\mathbb{CP}^n$：

$$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\sim,$$

其中

$$x \sim y \iff \exists 0 \neq \lambda \in \mathbb{C} \text{ 使得 } x = \lambda y.$$

更一般地，可以在向量空间 V 的所有 k 维子空间构成的空间上定义合适的拓扑，得到所谓的**格拉斯曼流形** $Gr(k,V)$[15] 注意，$\mathbb{RP}^n$ 只是一个特殊的格拉斯曼流形：

$$\mathbb{RP}^n = Gr(1, \mathbb{R}^{n+1}).$$

¶ 构造：在同一空间中将一个点与另一个点黏合

下面我们介绍许多从已知空间出发构造商空间非常具体的几何方法。第一个是：

> $\boxed{\text{黏合}}$：设 X 是一个拓扑空间，**黏合**X 中的点 a 和 b 是指：考虑从仅包含一个非平凡等价 $a \sim b$ 的等价关系获得的商空间。类似地，我们可以通过将子集 A 中的每一点等同于 B 中的某一点来将子集 A 黏合到 X 中的子集 B。

这广泛用于拓扑地从平面多边形构造曲面：只需使用规定的方式黏合边界线段。

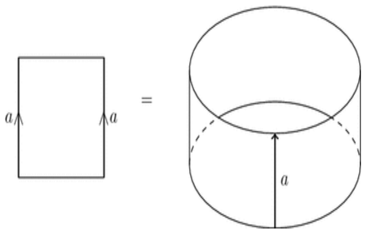


图 1.2: The cylinder

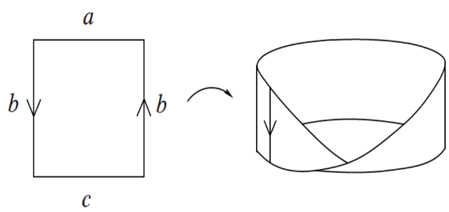


图 1.3: Möbius 带

[15]然而，对于 $k>1$，$Gr(k,V)$ 不能实现为 V 的商空间。不过，它可以实现为更大空间（比如 $\mathrm{GL}(V)$）的商空间。

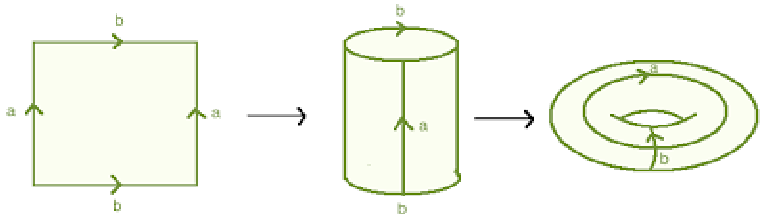


图 1.4: 环面

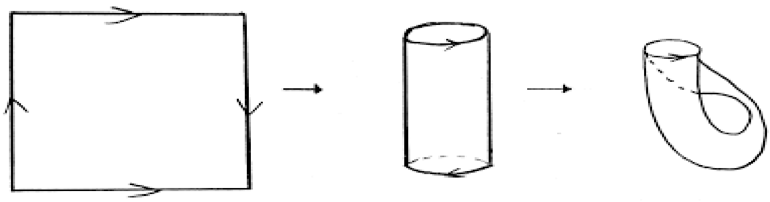


图 1.5: Klein 瓶

事实上，任何 (紧的) 曲面都可以通过从一个合适的多边形开始并以合适的方式黏合其边界来构造。这是一个更复杂的例子：

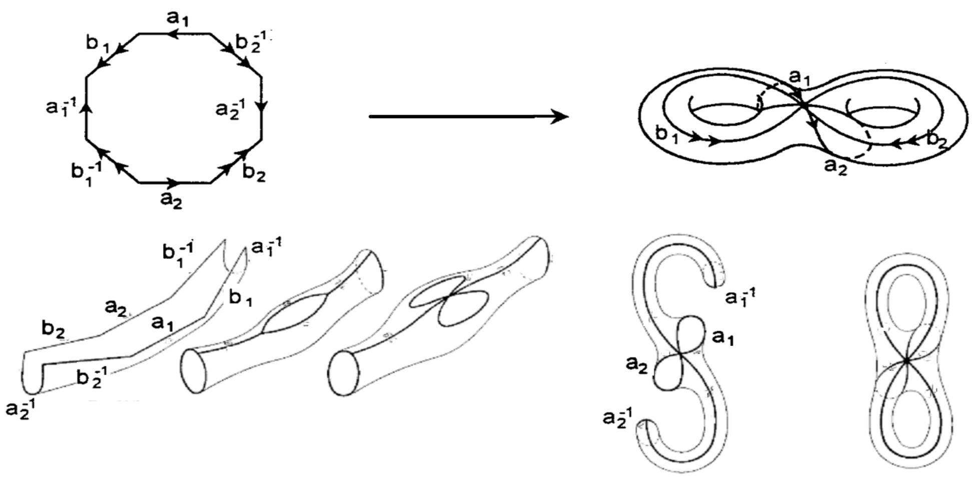


图 1.6: 2-环面

在本学期末，我们将用这样的多边形表示来证明紧致曲面的分类定理。

¶ 构造：附加空间 (黏着空间)

我们可以按照给定的映射将一个空间黏着到另一个空间：

$\boxed{\text{黏着空间}}$: 设 X, Y 是拓扑空间, $A \subset Y$ 是子空间, $f : A \to X$ 是连续映射. 那么黏着空间 $X \cup_f Y$ 是取 X 的 Y 无交并，然后将 $a \in A$ 和 $f(a) \in X$ 等同起来, 即

$$X \cup_f Y = X \sqcup Y / \{a \sim f(a)\}.$$

例如，我们可以将两个单位圆盘在边界圆上黏合起来，得到一个球面：

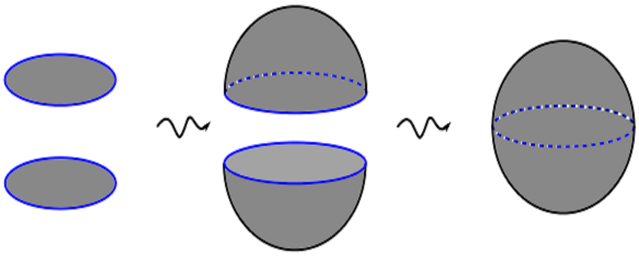


图 1.7: 从圆盘到球面

稍后我们将用到两种特殊情况：

1. (楔和) 给定两个拓扑空间 X 和 Y, X 和 Y 的**楔和** $X \vee Y$ 是将 X 中的一点和 Y 中的一点黏合起来构成的：

$$X \vee Y = X \sqcup Y / \{x_0 \sim y_0\}.$$

更一般地，给定一族空间 X_α，并选定点 $x_\alpha \in X_\alpha$，我们可以通过将所有 X_α 在点 x_α 处黏合在一起来构造 **楔和** $\bigvee_\alpha X_\alpha$。

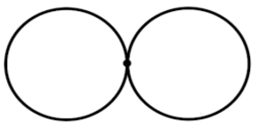


图 1.8: $S^1 \vee S^1$

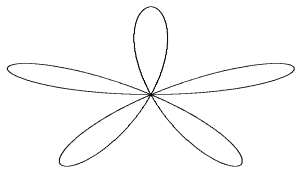


图 1.9: $S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1 \vee S^1$

注 1.108. 讨论楔和时，我们实际上是在研究“带基点的空间”(X, x_0)，即选择了一个点 x_0 的空间。(X, y_0) 和 (Y, y_0) 的楔和也是一个带基点的空间 $(X \vee Y, \{x_0\})$。这样，在研究多个空间的楔和时，我们总是将基点黏合到一个点上。

2. (连通和)

给定两个局部欧几里得的几何对象 A 和 B（“流形”），**连通和** $A\#B$ 构造如下：从每个对象中去掉一个小球（或圆盘），然后粘合边界球面（或圆），使它们“连通在一起”。[16]

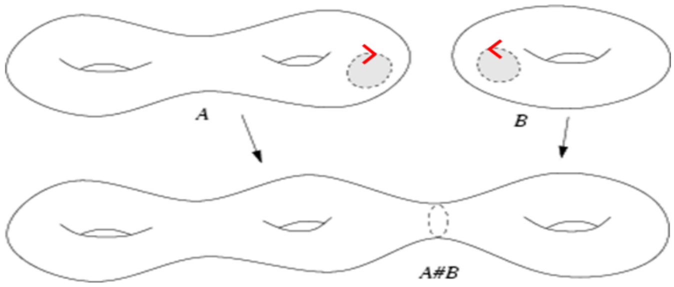


图 1.10: 连通和 $A\#B$

[16]这广泛用于从给定曲面构造新曲面，也多用于流形理论中从给定流形构造新流形。

换言之，

$$A\#B=(A-D_1)\cup_f(B-D_2),$$

其中 D_1, D_2 分别是 A, B 上的小圆盘, f 是黏合映射，将 ∂D_1 和 ∂D_2 如图所示等同起来.

¶ 构造：将一个子集收缩到一点

接下来我们考虑

$\boxed{\text{收缩}}$: 设 X 是一个拓扑空间, $Y\subset X$. 我们可以定义 X 上的等价关系如下: $y_1\sim y_2$ 当且仅当 $y_1,y_2\in Y$。换言之，在商空间中，我们将 Y 中的所有点“收缩”到一个点。为简单起见，我们将商空间记为 X/Y。

例如，我们考虑 $\mathbb{R}^2$ 中的单位盘 D。我们可以把它的边界圆收缩成一个点。我们得到了什么？一个球体 S^2！类似地，我们可以在 $\mathbb{R}^n$ 中收缩单位球 $B(0,1)$ 的边界球 S^{n-1}，得到 S^n。

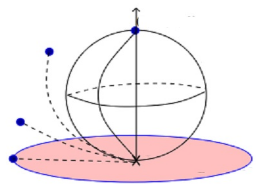


图 1.11: 收缩边界圆来得到球面

再举一个例子：我们固定 $x_0\in X$ 和 $y_0\in Y$. 通过将 X 等同于 $X\times\{y_0\}$，并将 Y 等同于 $\{x_0\}\times Y$，我们可以将楔和 $X\vee Y$ 视为 $X\times Y$ 的子空间。在乘积空间 $X\times Y$ 中将楔和 $X\vee Y$ 收缩成一个点，所得的空间被称为 X 和 Y 的 **smash 积**，记为 $X\wedge Y$：

$$X\wedge Y=X\times Y/X\vee Y.$$

¶ 构造：锥空间和纬垂

给定任意拓扑空间 X，可以构造 X 的锥空间和（代数拓扑会用到的）纬垂，两者都是柱体 $X\times[0,1]$ 的商空间：

1. X 的 **锥空间**, 记为 $C(X)$, 是将 $X\times[0,1]$ 中的子集 $X\times\{0\}$ 收缩为一个点构成的, 即 $C(X)=X\times[0,1]/X\times\{0\}$:

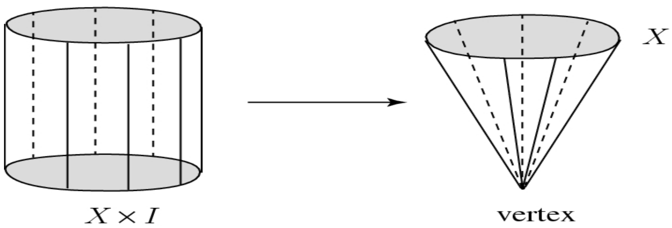


图 1.12: 锥空间 $C(X)$

2. X 的 **纬垂**, 记为 $S(X)$, 是将 $X \times \{0\}$ 收缩为一点, 同时将 $X \times \{1\}$ 收缩为另一点构成的.

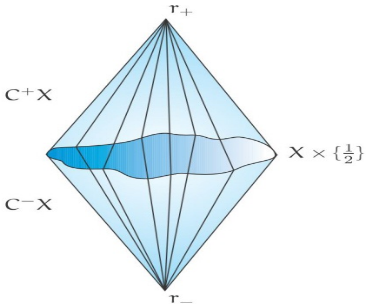


图 1.13: 纬垂 $S(X)$

3. 更一般地, 给定拓扑空间 X 和 Y, X 和 Y 的 **统联 (join)**, 有时记为 $X \star Y$, 定义为 $X \star Y = X \times Y \times I/\sim$, 其中等价关系 $\sim$ 为

$$(x, y_1, 0) \sim (x, y_2, 0), (x_1, y, 1) \sim (x_2, y, 1), \qquad \forall x, x_1, x_2 \in X; y, y_1, y_2 \in Y.$$

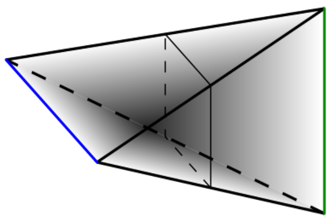


图 1.14: 统联 $X \star Y$

¶ 构造: 映射柱，映射锥和映射环面

我们也可以研究与映射相关的空间，这些空间在代数拓扑中是常见的:

(1) 给定连续映射 $f : X \to Y$, f 的 **映射柱**, 是指

$$M_f = (X \times [0, 1]) \sqcup_{\tilde{f}} Y,$$

是 $X \times [0, 1]$ 和 Y 按映射 $\widetilde{f} : X \times \{0\} \to Y, f(x, 0) := f(x)$ 黏合得到的空间。

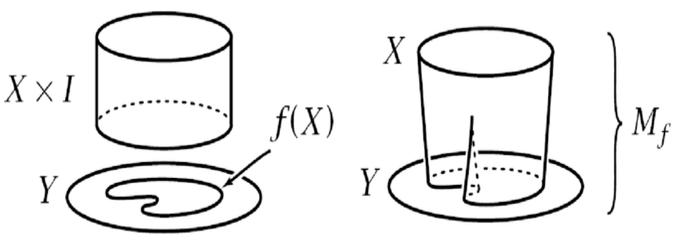


图 1.15: 映射柱

(2) 给定连续映射 $f : X \to Y$, f 的 **映射锥**, 记为 C_f, 是指商空间

$$C_f = (X \times [0, 1]) \sqcup_{\tilde{f}} Y/\sim,$$

即映射锥 M_f 在等价关系下

$$(x_1, 1) \sim (x_2, 1), (x, 0) \sim f(x), \qquad \forall x, x_1, x_2 \in X.$$

的商空间。

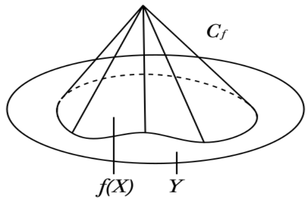


图 1.16: 映射锥

(3) 给定同胚 $f : X \to X$, f 的 **映射环面** 是指

$$T_f := X \times [0, 1]/(1, x) \sim (0, f(x)).$$

曲面同胚的映射环面在 3 维流形理论中起着关键作用，并得到了深入的研究。

1.4.4 群作用的商

¶ 同胚群

我们知道，对称性在数学的所有分支中都起着至关重要的作用，而描述对称的数学语言是群。在拓扑学里面，任给一个拓扑空间，我们都可以得到一个描述该空间自身“拓扑对称性”的群：

命题 1.109.（自同胚构成一个群）

设 X 是拓扑空间，令

$$\mathrm{Hom}(X) = \{f : X \to X \mid f\text{是同胚}\}.$$

那么在通常的“映射复合”运算下，$\mathrm{Hom}(X)$ 是一个群。

证明 很容易验证 $\mathrm{Hom}(X)$ 中“映射复合”运算是群运算：

- 给定 X 的两个同胚 f 和 g，复合映射 $g \circ f$ 也是 X 的同胚，并且根据定义，结合性也是成立的，
- 恒等映射 Id 是群中的单位元，
- 同胚映射 f 的逆映射 f^{-1} 依然是同胚，并且是“映射复合”运算下元素 f 的逆。

□

我们给这个描述拓扑空间自身“拓扑对称性”的群一个名字：

定义 1.110.（同胚群）

我们称 $\mathrm{Hom}(X)$ 为拓扑空间 X 的 **同胚群**。

注意，对于任意元素 $f \in \mathrm{Hom}(X)$，我们说 f “作用”在空间 X 上是指将元素 $x \in X$ 映射到像 $f(x) \in X$.

¶ 群作用

我们定义

定义 1.111.（群作用）

设 G 为一个群，其单位元记为 e. 设 X 为一个集合。

(1) 群 G 在集合 X 上的一个 **(左) 作用**[a] 是指映射

$$\alpha : G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

使得

- 对任意 $x \in X$, 都有 $e \cdot x = x$,
- 对任意 $g, h \in G$ 和 $x \in X$, 都有 $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

(2) 若 X 是拓扑空间, 且群 G 在 X 上的 (左) 作用跟拓扑结构相容，即：对任意 $g \in G$, 映射

$$\tau_g : X \to X, \quad x \mapsto \tau_g(x) := g \cdot x$$

是连续映射，则称该作用为 **群 G 在拓扑空间 X 上的 (左) 作用**

(3) 若 X 是拓扑空间，G 是拓扑群，且群 G 在 X 上的作用映射 α 是连续映射，则我们称该群作用是一个**连续作用**。

[a] 跟左作用类似，我们也可以定义**右作用**的概念：对于右作用，一般记为 $x \cdot g$, 只要把定义中的第二个条件改为 $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$ 即可。右作用的理论与左作用相似。

♣

注 1.112. 根据定义，若群 G 作用在拓扑空间 X 上，则每个映射 τ_g 都是一个 X 到自身的同胚，因为根据定义，我们有 $(\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}}$，从而 τ_g 不仅可逆而且其逆映射也是连续的。于是，群 G 的每个元素 g 都关联一个同胚 $\tau_g : X \to X$, 且这些同胚满足

$$\tau_g \circ \tau_h = \tau_{gh}, \quad \forall g, h \in G.$$

换言之，群 G 在拓扑空间 X 上的作用实际上是一个群同态

$$\tau : G \to \mathrm{Hom}(X) = \{f : X \to X \mid f\text{是同胚}\}.$$

请注意，我们将（总是）假设 τ 是单射：若 G 不是单射，我们可以将 G 替换为商群 $G/\ker(\tau)$，它在 X 上的作用是显然的。这样的群作用称为**忠实作用**。

¶ 轨道和轨道空间

定义 1.113.（轨道）

给定 G 在集合 X 上的群作用，对于任意 $x \in X$，我们称集合

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G.\}$$

为 x 在该群作用下的 **轨道**。

♣

我们可以在 X 上定义一个等价关系 $\sim$ 如下：

$$x_1 \sim x_2 \iff \exists\, g \in G \ \text{ 使得} x_1 = g \cdot x_2.$$

换言之，X 中的两个元素等价当且仅当它们落在同一轨道上。易验证这是一个等价关系。

定义 1.114.（轨道空间）

给定拓扑空间 X 上的群作用 G，我们称按照以上等价关系所得的商空间

$$X/G = X/\sim$$

为该群作用的**轨道空间**。♣

所以根据定义，轨道空间是“由轨道构成的空间”，并赋以商拓扑。

¶ 例子

例 1.115. 我们列出几个简单的轨道空间的例子，我们将在本学期晚些时候学习覆叠空间时用到这些例子。

(1) $G = \mathbb{Z}$ 在 $X = \mathbb{R}$ 上的群作用

$$\tau(n)(x) = n + x. \qquad \text{(平移)}$$

$\rightsquigarrow\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$.

(2) $G = \mathbb{Z}_n$ 在 $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ 上的群作用

$$\tau(k)(z) = e^{2\pi ik/n}z. \qquad \text{(旋转)}$$

$\rightsquigarrow\ S^1/\mathbb{Z}_n \simeq S^1$.

(3) $G = \mathbb{Z}_2$ 在 $\widetilde{X} = S^n$ 上的群作用

$$\tau(1)(x) = x \quad \text{以及} \quad \tau(-1)(x) = -x. \qquad \text{(对径点)}$$

$\rightsquigarrow\ S^n/\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{RP}^n$.

(4) $G = \mathbb{Z}^n$ 在 $X = \mathbb{R}^n$ 上的群作用

$$\tau(m_1, \cdots, m_n)(x_1, \cdots, x_n) = (x_1 + m_1, \cdots, x_n + m_n).$$

$\rightsquigarrow\ \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq \mathbb{T}^n \simeq S^1 \times \cdots \times S^1$.

(5) 设 p, q 是互素的。我们定义 $G = \mathbb{Z}_p = \{1, e^{2\pi i/p}, \cdots, e^{2\pi i(p-1)/p}\}$ 在 $X = S^3 \subset \mathbb{C}^2$ 上的群作用

$$\tau(e^{2\pi ik/p})(z_1, z_2) = (e^{2\pi ik/p}z_1, e^{2\pi ikq/p}z_2).$$

$\rightsquigarrow\ L(p;q) := S^3/\mathbb{Z}_p$ 称为**透镜空间**.

例 1.116. 接下来我们举两个具有轨道空间具有较坏拓扑的例子。

(1) 考虑 $\mathbb{R}_{>0}$ (作为乘法群) 在 $\mathbb{R}$ 上的乘法作用，即

$$a \cdot x := ax.$$

那么存在三个轨道：$\mathbb{R}_{>0}$、$\{0\}$、$\mathbb{R}_{<0}$。因此，轨道空间由 $\{+, 0, -\}$ 三个元素组成，轨道空间上的拓扑为

$$\{\emptyset, \{+\}, \{-\}, \{+, -\}, \{+, 0, -\}\}.$$

(2) 任给正实数 r，考虑实数加法群 $\mathbb{R}$ 在 $S^1 \times S^1$ 上的群作用

$$t \cdot (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) := (e^{i(\theta_1+t)}, e^{i(\theta_2+rt)}).$$

那么

(a). 若 $r = p/q$，其中 p, q 互素，则此时 $\mathbb{R}$ 作用不是忠实作用（见注记1.112），且它诱导了一个 $\mathbb{R}/\{2kq\pi\} = S^1$ 作用，其每条轨道都是一个绕环面很多圈的圆，而轨道空间同胚于 S^1.

(b). 若 r 是无理数，则每条轨道都是环面 $S^1 \times S^1$ 上的一条“稠密曲线”，而且类似于例1.105(2)，其轨道空间的拓扑则是平凡拓扑。

¶ 阅读材料: Hopf 纤维化

下面这个例子在几何与拓扑中有着重要作用。我们考虑群 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 在三维球面

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

上的群作用

$$z \cdot (z_1, z_2) := (zz_1, zz_2). \tag{1.4.6}$$

可以验证这是一个连续群作用，且每条轨道 $S^1 \cdot (z_1, z_2)$ 都是 S^3 里面的一个大圆。我们有：轨道空间 S^3/S^1 同胚于 S^2.

证明概要：我们令

$$X = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_1| \le |z_2|\},$$
$$Y = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_1| \ge |z_2|\}.$$

注意到 X 在 S^1-作用下不变的，即若一个点落在 X 里面，则整条轨道都落在 X 里面。同理 Y 和 $X \cap Y$ 也是在 S^1-作用下不变的。所以 S^3/S^1 可以通过如下构造得到：将 X/S^1 和 Y/S^1 沿着“边界” $X \cap Y/S^1$ 黏合。

- 根据定义，
  $$X \cap Y = \{(z_1, z_2) \in S^3 \mid |z_1| = |z_2|\}.$$
  是一个环面，于是 $X \cap Y/S^1$ 是该环面在 S^1 作用 (1.4.6) 下的商空间, 不难验证该作用对应于例 1.116(2)中有理数情形, 从而商空间是一个圆 S^1。
- 现在考虑 X/S^1. 我们可以定义映射
  $$f : D^2 \to X, z \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(z, 1)$$
  并证明 f 是一个同胚，它将 D^2 的边界圆映射到边界圆 $X \cap Y/S^1$。
- 类似地，Y/S^1 同胚于一个圆盘，其边界映射到 $X \cap Y/S^1$。

因此，商 S^3/S^1 同胚于两个单位圆盘沿边界圆黏合得到的空间，即球面 S^2!

商映射 $p : S^3 \to S^2$ 被称为 **Hopf 纤维化**，它的每个纤维都是 S^3 里面的大圆。【我们将会证明，S^3 在拓扑上与 $S^2 \times S^1$ 不同胚。】

1.5 拓扑空间中的点与集合

1.5.1 闭集与极限点

¶ 开集与闭集

设 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间。则 X 中的开集恰好是集族 $\mathscr{T}$ 里的那些集合，而 X 中的闭集则是其补集 $F^c = X \setminus F$ 是开集的那些集合 F。子集 $A \subset X$ 可以是开集，也可以是闭集，或两者都不是，或两者都是。我们称既是开集又是闭集的那些子集为 **闭开集 (clopen)**[17]

例 1.117.

(1) 在任意拓扑空间中，$\emptyset$ 和 X 总是闭开集。

(2) 对于离散拓扑 $\mathscr{T}_{discrete}$, 所有子集都是闭开集。

(3) 在实直线 $\mathbb{R}$（赋以通常的拓扑）中，

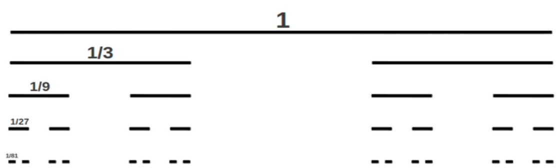
(a). 任意单点集 $\{x\}$ 是闭集。

(b). 任意开区间 (a, b) 是开集，任意闭区间 $[a, b]$ 是闭集。

(c). Cantor 集

$$C = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right)$$

是一个开集的补集，因此是闭集。



注意

- 在 $\mathbb{R}$ 中，任意开集都是开区间的可数并。因为 $\mathbb{R}$ 有 $\aleph_1$ 个开区间，所以在 $\mathbb{R}$ 中有 $\aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$ 个开集。
- 闭集的结构可能要复杂得多，例如，康托集不能写成闭区间的可数并集。但是，由于开集和闭集是一一对应的，所以在 $\mathbb{R}$ 中也存在 $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ 个闭集。
- 由于 $\mathbb{R}$ 有 $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ 子集，我们得出结论：

  $\mathbb{R}$ 中**几乎所有**的子集既不开也不闭！

(4) 视 $\mathbb{Q}$ 为 $\mathbb{R}$ 的子空间，赋予 Q 子空间拓扑。在 $\mathbb{Q}$ 中考虑形如 $(a, b) \cap \mathbb{Q}, (a < b)$ 的集合。那么对于 $a \in \mathbb{Q}$，集合 $(-\infty, a] \cap \mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中不是开集，而对于 $a \in \mathbb{Q}^c$，集合 $(-\infty, a] \cap \mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中是开集。因此，我们有

(a). 如果 $a \in \mathbb{Q}$ 或 $b \in \mathbb{Q}$, 则 $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中是开集但不是闭集.

(b). 如果 $a, b \in \mathbb{Q}^c$, 则 $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{Q}$ 中是闭开集.

[17]在英语中这样的词称为 **混成词 (portmanteau)**：多个词的一部分混合组合成一个新词。比较常见的混成词包括：brunch = breakfast + lunch，Microsoft = microcomputer + software 等。有趣的是，第一个在文学中创造一个混成词的人是数学家 Charles Dodgson，他可能是历史上最"有名"的数学家，不过他主要是以笔名 Lewis Carroll（即两部著名儿童小说《爱丽丝梦游仙境》和《爱丽丝镜中奇遇记》的作者）而为人所知。

¶ 闭集的刻画：一个反例

乍一看，$(\sqrt{2},\pi)\cap\mathbb{Q}$ 这样的子集在 $\mathbb{Q}$ 中是闭集可能看起来很奇怪。然而，根据我们在欧氏拓扑中的经验，一个集合是闭集当且仅当它里面的任何收敛序列都收敛到该集合中的一个点。事实上该准则对于 $\mathbb{Q}$ 中的闭集 $(\sqrt{2},\pi)\cap\mathbb{Q}$ 仍然成立：如果 $r_n\in(\sqrt{2},\pi)\cap\mathbb{Q}$ 且 $r_n\to r_0\in\mathbb{Q}$，我们有 $r_0\in[\sqrt{2},\pi]\cap\mathbb{Q}$，因此 $r_0\in(\sqrt{2},\pi)\cap\mathbb{Q}$.

不过我们还是得小心一点：我们从欧氏拓扑中得到的经验，对于一般拓扑空间是否依然成立呢?

定义 1.118.（序列极限点）

设 A 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中的子集，x 为 X 中的一个点。如果存在序列 $a_n\in A$ 使得 $a_n\to x$，则我们称点 x 为 A 的**一个序列极限点**。♣

一个自然的问题是：

> 在一般的拓扑空间中，“一个集合是闭集**当且仅当**它包含其所有序列极限点”这一论断是否依然成立?

例 1.119. 考虑赋有逐点收敛拓扑的空间 $X=\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$。令

$$A=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\mid \text{仅对可数多的 } x\in[0,1] \text{ 有 } f(x)\neq 0\}.$$

那么如果 $f_n\in A$ 且 f_n 逐点收敛于 f_0, 则一定有 $f_0\in A$，因为

$$\{x\mid f_0(x)\neq 0\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\mid f_n(x)\neq 0\}$$

是可数集。

但是, A 不是 X 中的闭集, 即 $A^c=X\setminus A$ 不是开集。为了看到这一点, 我们任取 $g\in A^c$. 令 U 是 g 的任意开邻域。根据定义, $\exists x_1,\cdots,x_n$, $\varepsilon>0$, 使得$\omega(g;x_1,\cdots,x_n;\varepsilon)\subset U$. 现在我们定义

$$\tilde{g}(x)=\begin{cases} g(x), & x\in\{x_1,\cdots,x_n\},\\ 0, & x\notin\{x_1,\cdots,x_n\}.\end{cases}$$

则 $\tilde{g}\in A\cap\omega(g;x_1,\cdots,x_n;\varepsilon)\subset A\cap U$. 换言之，$g\in A^c$ 的任意开邻域 U 都包含 A 中的一个元素。所以 A^c 不是开集，即 A 不是闭集。

让我们强调一下从上述例子而得到的以下事实：

> **警告:** 在拓扑空间中, 你不能通过证明“如果 $x_n\in A$ 且 $x_n\to x_0$, 则 $x_0\in A$”来断言集合 A 是闭集。

¶ 度量空间中的闭集的刻画

所以在欧氏空间中我们有一个很好的判据来判断一个集合是否闭集，但是在一般拓扑空间中该判据失效了。一个自然的问题是：在中间地带，即度量空间中，会发生什么?

幸运的是，在度量空间中，这个闭性的良好判据是成立的：

命题 1.120. (度量空间中闭集的刻画)

度量空间 (X,d) 中的子集 F 是闭集当且仅当 F 包含其所有序列极限点，即 F 满足：若 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x_0 \in X$，则 $x_0 \in F$.

证明 假设 F 是 (X,d) 中的一个闭集。设 (x_n) 为 F 中的收敛序列，$x_n \to x_0 \in X$. 我们用反证法来证明 $x_0 \in F$。假设 $x_0 \notin F$，即 $x_0 \in F^c$。由于 F^c 是开集，所以存在 ε_0 使得 $B(x_0,\varepsilon_0) \subset F^c$。根据收敛的定义，存在 k 使得对于所有 $n > k$ 都有 $d(x_n,x_0) < \varepsilon_0$. 这意味着当 $n > k$ 时有 $x_n \in F^c$，跟我们的选取即 "(x_n) 为 F 中的收敛序列" 矛盾。

反之，假设 F 包含其所有序列极限点，即只要 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x_0 \in X$，就有 $x_0 \in F$. 为证明 F 是闭集我们再次用反证法。假设 F 不是闭集，即 F^c 不是开集，则存在 $x_0 \in F^c$ 使得对任意 n，开球 $B(x_0,1/n)$ 不包含于 F^c. 于是存在 $x_n \in B(x_0,1/n)$ 使得 $x_n \notin F^c$，即 $x_n \in F$。对于这样选出的 x_n，我们有 $x_n \to x_0$。所以 $x_0 \in F$，矛盾。 □

注 1.121. 在第 1.3 节，我们已经看到 $X = \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$ 中的逐点收敛正是关于逐点收敛拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 的拓扑收敛。现在通过将例 1.119 与命题 1.120 结合起来，我们得出结论：

> 在 $X = \mathcal{M}([0,1],\mathbb{R})$ 上不存在度量结构使得逐点收敛是度量收敛。

这从侧面说明了引入拓扑结构的必要性：仅研究度量结构是不够的。

¶ 拓扑空间中的闭集

那么在拓扑空间中会发生什么？我们应该分析命题 1.120 的证明，看看什么仍然正确，什么不再正确。在 "将度量拓扑中的证明推广到更一般的拓扑空间" 方面，我们已有丰富的经验：只需用开邻域替换度量下的开球！事实证明，这一招对于命题 1.120 证明的前半部分依然有效：

命题 1.122. (闭集总包含其序列极限点)

设 F 是拓扑空间 X 中的闭子集。如果 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x_0 \in X$，则极限 $x_0 \in F$。

证明 我们用反证法来证明 $x_0 \in F$. 设 $x_0 \notin F$，即 $x_0 \in F^c$. 由于 F^c 是开集，可以找到 x_0 的开邻域 U，使得 $U \subset F^c$。根据收敛的定义，存在 k 使得对所有 $n > N$ 都有 $x_n \in U$，即对于所有 $n > k$ 有 $x_n \in F^c$，跟命题的条件 $x_n \in F$ 矛盾。。 □

对于命题 1.120的另一半，我们试试重复相应的证明并像上面一样用开邻域替换开球：

> [错误证明] 反之，假设 F 包含其所有序列极限点，即只要 $x_n \in F$ 且 $x_n \to x_0 \in X$，就有 $x_0 \in F$. 为证明 F 是闭集我们再次用反证法。假设 F 不是闭集，即 F^c 不是开集，则存在 $x_0 \in F^c$ 使得对于 x_0 的任意开邻域 U，都有 $U \not\subset F^c$，即 $U \cap F \neq \emptyset$。我们取 x_0 的一列越来越小的开邻域 U_n，则存在点列 $x_n \in U_n$ 使得 $x_n \notin F^c$，即 $x_n \in F$。由于我们选取的开邻域 U_n 越来越小，我们得出结论 $x_n \to x_0$，从而 $x_0 \in F$，这与我们选取的 $x_0 \in F$ 矛盾。

看起来是对的，但这肯定是错的，因为我们已经看到了反例 1.119。错在哪？在拓扑学这样的高尚课程中，不允许使用“越来越小的开邻域”之类的模棱两可的词！

¶ 补救措施：可数邻域基

当然，找出错误证明中的谬误之处并不是我们的目标。如果我们进一步思考，我们会发现情况没有那么坏：只要我们能给“越来越小的 x 的开邻域”一个精确的定义，上述“错误的证明”对于相应的拓扑空间其实还是成立的。这里的关键是：首先，我们需要的是一列（即可数个）开邻域，不能太多；其次，这列邻域要能够做到“要多小就可以有多小”，即可以比任何一个给定的邻域小。于是我们定义

定义 1.123.（第一可数性公理）

设 $(X, \mathscr{T})$ 为拓扑空间。如果

> 对于任意 $x \in X$，都存在 x 的可数个开邻域 $\{U_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$，使得 x 的每个邻域 U^x 都包含某个 U_n^x，

则我们称 X 满足**第一可数性公理**，或者说它是 **第一可数的**，简称为 (A1)-**空间**。[a]

[a]也有书把第一可数空间简称为 (C1)-**空间**。

♣

回忆一下第 1.4 节习题 1，上述定义中的集族 $\{U_n^x \mid n \in \mathbb{N}\}$ 构成在 x 处的一个**邻域基**。因为它是一个可数族，所以我们称它为 x 处的一个**可数邻域基**。简而言之，

> 第一可数空间是在每个点处都有可数邻域基的拓扑空间。

显然，任意度量空间是第一可数的，因为对于任何 x，$\{B(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是 x 处的一个可数邻域基。由于命题1.122之后的“错误证明”其实是对于第一可数空间的正确证明，我们得到：[18]

命题 1.124.（第一可数空间中闭集的刻画）

在第一可数空间 $(X, \mathscr{T})$ 中，子集 F 是闭合的当且仅当对于任意序列 $\{x_n\} \subset F$ 满足 $x_n \to x_0 \in X$，都有 $x_0 \in F$。

♠

特别地，$(\mathcal{M}([0,1], \mathbb{R}), \mathscr{T}_{p.c.})$ 不是第一可数的。(该结论对不可数个非平凡空间的乘积拓扑均成立。注意在第 1.4 节中我们已经知道 $(\mathcal{M}([0,1], \mathbb{R}), \mathscr{T}_{p.c.}) \simeq (\mathbb{R}^{[0,1]}, \mathscr{T}_{product})$.)

¶ 极限点

我们将在本课程中一次又一次地看到，反例不仅仅是“反例”，它们往往可以揭示如何发展正确的理论。我们可以从上面的反例中挖掘出更多内容：在例 1.119 中我们看到，任意函数 $g \in A^c$ 都不是包含在子集 A 中的任何函数序列的极限。然而，我们仍然可以

[18]这**确实是** 命题 1.120的一个推广，因为我们将看到，存在 (A1) 空间，其拓扑不能实现为度量拓扑。

认为 g 在 X 中 "与子集 A **无比接近**"，因为对 g 的任何邻域 U，都存在元素 $\tilde{g} \neq g$ 使得 $\tilde{g} \in U \cap A$. 这启发我们给出以下定义：

定义 1.125. (极限点)

设 X 为拓扑空间，$A \subset X$ 为子集。如果对于 x 的任意邻域 U 都有

$$U \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset,$$

则我们称 $x \in X$ 是 A 的 **极限点** (或 **聚点**)。我们把 A 的所有极限点的集合称为 A 的 **导集**，并记为 A'，即

$$A' = \{x \mid x \text{ 是 } A \text{ 的一个极限点}\}.$$

♣

注意，在极限点的定义中，我们要求集合 $U \cap A$ 至少包含一个不是 x 本身的点。

注 1.126. 至此我们已经有了序列收敛、序列连续、序列极限点等概念。对于度量空间而言，序列是一个比较好的刻画度量的工具，但对于一般拓扑空间，序列则往往并不那么有效。在一般拓扑空间中，可以类似于在度量空间中使用 "序列" 那样，采用一种叫做 "**网**" 的概念来处理问题 (见本节习题)。网是 "序列" 概念的推广，可以定义诸如 **收敛网** 这样的概念，并证明：

- 如果点 x 是 A 的极限点，那么在 A 中存在一个收敛到 x 的网.
- 函数 f 在 x 处是连续的当且仅当它将任意收敛到 x 的网映射到收敛到 $f(x)$ 的网。

例 1.127.

(1) 对于 $\mathbb{R}$ 的子集 $A = (0,1) \cup (1,3) \cup \{5\}$，我们有 $A' = [0,3]$. 注意 5 是 A 的序列极限点，但不是 A 的极限点。

(2) 在 $(X, \mathscr{T}_{discrete})$ 中, 对任意 $A \subset X$ 都有 $A' = \emptyset$.

(3) 考虑 $(X, \mathscr{T}_{cocountable})$，其中 X 是不可数集。则根据定义，对于任意不可数子集 $A \subset X$，我们有 $A' = X$。特别地，对于任何 $x_0 \in X$，我们有 $x_0 \in (X \setminus \{x_0\})'$。然而，我们在第 1.3 节中已经看到，$X$ 中仅有那些 "最终常值的序列" 是收敛序列 (且收敛到该常值)。因此 x_0 是 $A \setminus \{x_0\}$ 的极限点，但不是 $A \setminus \{x_0\}$ 的序列极限点。【注意：这给出了另一个 "拓扑收敛 $\neq$ 度量收敛" 的例子。】

由上述例子可见，集合 A 的序列极限点和其极限点之间的关系是微妙的：序列极限点不必是极限点，极限点也不必是序列极限点。下面我们列出导集的几个性质，其证明留作习题：

命题 1.128. (导集的性质)

设 X 为拓扑空间，$A, B \subset X$。则

(1) $\emptyset' = \emptyset$.

(2) $a \in A' \Longrightarrow a \in (A \setminus \{a\})'$.

(3) $A \subset B \Longrightarrow A' \subset B'$.

(4) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

(5) $(A')' \subset A \cup A'$.

♠

与极限点的概念相反，我们也可以定义 **孤立点**：

定义 1.129.（孤立点）
设 A 是拓扑空间 X 的子集。对于点 $x \in A$，如果存在开集 $U \ni x$ 使得 $U \cap A = \{x\}$，则我们称 x 是 A 的**孤立点**。♣

由定义，点 x 是 A 的孤立点当且仅当 $x \in A$ 但 $x \notin A'$.

¶ 用极限点刻画闭集

借助极限点的概念，我们可以给出一般拓扑空间中闭集的刻画：

定理 1.130.（拓扑空间中闭集的刻画）
拓扑空间 X 中的子集 A 是闭集当且仅当 $A' \subset A$. ♡

证明 如果 A 是闭集，且 $x \in A^c$，则存在 x 的开邻域 U 使得 $U \subset A^c$ 即 $U \cap A = \emptyset$. 所以根据定义，$x \notin A'$。因此 $A' \subset A$.

反之，假设 $A' \subset A$, 且 $x \in A^c$。则 $x \in (A')^c$，即存在 x 的邻域 U 使得

$$U \cap A = U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset.$$

所以 $U \subset A^c$。于是由定义，A^c 是开集，即 A 是闭集。 □

换句话说，

$$\boxed{\text{一个集合是闭集当且仅当它包含其所有极限点。}}$$

这就是我们用定义1.125来定义极限点，而不是把序列极限点叫做极限点的原因。

1.5.2 闭包，内点与边界点

¶ 子集的闭包

闭集包含它的所有极限点。如果 A 不是闭集呢？通过仔细观察定理 1.130 证明的后半部分，我们可以证明

定理 1.131.（闭包是闭集）
对于拓扑空间 X 的任意子集 A，并集 $A \cup A'$ 都是闭集。♡

证明 （我们重复定理 1.130 证明的后半部分）对任意 $x \in (A \cup A')^c = A^c \cap (A')^c$, 存在 x 的邻域 U 使得

$$U \cap A = U \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset.$$

这意味着

- $U \subset A^c$.
- $U \subset (A')^c$：对任意 $y \in U$, 我们必有 $y \notin A'$，因为

$$U \cap (A \setminus \{y\}) \subset U \cap A = \emptyset.$$

所以 $U \subset A^c \cap (A')^c = (A \cup A')^c$，即 $(A \cup A')^c$ 是开集。所以 $A \cup A'$ 是闭集。 □

事实上, $A \cup A'$ 是包含 A 的最小闭集：如果 F 是一个闭集并且 $F \supset A$, 那么

$$F \supset A \cup F' \supset A \cup A'.$$

于是我们得到

推论 1.132.（闭包的最小性）

$A \cup A'$ 是包含 A 的 **最小的闭集**:

$$A \cup A' = \bigcap_{\substack{F\text{是闭集} \\ F \supset A}} F.$$

♡

定义 1.133.（闭包）

对于拓扑空间 X 的子集 A，我们称

$$\overline{A} := \mathrm{Cl}(A) = A \cup A'$$

为 A 的**闭包**.

♣

¶ 闭包的性质

以下性质比较直观，其证明留作习题：

命题 1.134.（闭包的性质）

设 X 为拓扑空间，$A, B \subset X$. 则

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(5) A 是闭集 $\iff A = \overline{A}$.

(6) 如果 $A \subset B$, 则 $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(7) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(8) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. (该性质对 $A \subset X, B \subset Y$ 也成立.)

♠

注意 (7) 的反包含关系并不成立：不难构造出满足 $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ 的例子。

我们给出闭包 $\overline{A}$ 的另一种刻画，它在应用中非常有用。【请将它与 A' 的定义加以比较。】

命题 1.135.（闭包的刻画）

$x \in \overline{A} \iff$ 对任意开集 $U \ni x$, 有 $U \cap A \neq \emptyset$.

♠

证明 ($\Longleftarrow$) 用反证法。设 $x \notin \overline{A}$，即 $x \in (\overline{A})^c$. 因为 $\overline{A}$ 是闭集, 故存在 x 的开邻域 U 使得 $U \subset (\overline{A})^c$，即 $U \cap \overline{A} = \emptyset$. 特别地，$U \cap A = \emptyset$，矛盾。

($\Longrightarrow$) 反之，设存在开集 $U \ni x$, 使得 $U \cap A = \emptyset$, 则 $x \notin A$ 且 $x \notin A'$. 所以 $x \notin \overline{A}$. □

¶ 用闭包刻画连续性

我们也可以使用闭包来刻画映射的连续性。

命题 1.136.（用闭包刻画连续性）

设 X, Y 为拓扑空间。那么映射 $f: X \to Y$ 是连续的当且仅当对于任意 $A \subset X$,

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

证明 假设 $f: X \to Y$ 是连续的，$A \subset X$ 是一个子集。则由连续性，$f^{-1}(\overline{f(A)})$ 是一个包含 A 的闭集。所以 $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$，即 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$。

反之，假设 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ 对任何 $A \subset X$ 成立。要证明 f 是连续的，只需证明 $f^{-1}(\text{闭集}) =$ 闭集。我们取任意闭集 $B \subset Y$. 则

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{f(f^{-1}(B))} \subset \overline{B} = B.$$

所以 $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(B)$，即 $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ 是闭集。 □

¶ 集合的内部

在第 1.2 节中，我们定义了拓扑空间中一个集合的 **内部** 的概念。我们重述一下：

定义 1.137.（内部）

拓扑空间 X 中的集合 A 的 **内部** 定义为

$$\mathring{A} := \mathrm{Int}(A) = \{x \in A \mid \text{ 存在开集 } U \ni x \text{ 使得 } U \subset A\}.$$

注意 $\mathring{A}$ 总是一个开集：如果 $x \in \mathring{A}$，那么我们可以找到一个开集 $U \ni x$ 使得 $U \subset A$。根据定义，对于任意 $y \in U$，我们也有 $y \in \mathring{A}$。所以 $U \subset \mathring{A}$，即 $\mathring{A}$ 是开集。

事实上，内部的概念与闭包的概念是对偶的。首先我们有

命题 1.138.（内部的刻画）

设 A 是拓扑空间 X 的子集，则 A 的内部 $\mathring{A}$ 是包含在 A 中的最大开集[a]：

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \text{是开集} \\ U \subset A}} U.$$

[a]我们永远不会说出“含于给定集合中的最大闭集”或“包含给定集合的最小开集”这样的说法，因为它们通常不存在。

证明 根据定义，$\mathring{A}$ 是开集并且 $\mathring{A} \subset A$。所以只需证明：如果 $U \subset A$ 是开集，那么 $U \subset \mathring{A}$。但这是显然的：对于任意 $x \in U$ 且 $U \subset A$，根据定义我们有 $x \in \mathring{A}$。所以 $U \subset \mathring{A}$. □

应用第 1.2 节的“开-闭”对偶，我们得到 $\mathring{A}$ 的另一种描述：

命题 1.139.（内部-闭包对偶）

对于拓扑空间 X 中的任意子集 A，都有

$$\mathring{A} = \overline{A^c}^c.$$

证明 作为闭集的补集，$\overline{A^c}^c$ 是开集. 另一方面，对 $A^c \subset \overline{A^c}$ 取补集，我们得到 $\overline{A^c}^c \subset A$. 所以 $\overline{A^c}^c \subset \mathring{A}$.

反之, 如果 $x \in \mathring{A}$, 则存在开集 $U \ni x$ 使得 $U \subset \mathring{A} \subset A$. 所以 $U \cap A^c = \emptyset$, 由此推出 $x \notin \overline{A^c}$, 即 $x \in \overline{A^c}^c$. □

当然我们也可以在等式 $\mathring{A} = \overline{A^c}^c$ 两边的取补集，得到

$$(\mathring{A})^c = \overline{A^c}.$$

¶ 内部的性质

作为内部-闭包对偶性的推论，我们可以将关于闭包 $\overline{A}$ 的命题 1.134 “翻译” 为关于内部 $\mathring{A}$ 的以下命题:

命题 1.140.（内部的性质）

设 A, B 是拓扑空间 X 的子集。则

(1) $\mathring{A} \subset A$.

(2) $(A \overset{\circ}{\cap} B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

(3) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

(4) $\mathring{X} = X$.

(5) A 是开集 $\Leftrightarrow$ $A = \mathring{A}$.

(6) $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

(7) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \overset{\circ}{\cup} B)$.

(8) $\mathring{A} \times \mathring{B} = A \overset{\circ}{\times} B$. (对 $A \subset X, B \subset Y$ 成立.) ♠

注 1.141. 你可能已经注意到，命题 1.140 中的 (1) - (4) 正是第 1.2 节中的 “内部公理” (I 1)-(I 4)。因此，根据对偶性，我们可以称命题 1.134 中的 (1) - (4) 为 “闭包公理”。Kuratowski 首先将它们用作一组替代公理来定义集合上的拓扑结构。[19]让我们再次列出它们：

(K1) $A \subset \overline{A}$.

(K2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(K3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

(K4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

¶ 稠密集和疏集

使用闭包和内部，可以定义

定义 1.142.（稠密集和疏集）

设 A 是拓扑空间 X 中的一个子集。

(1) 如果 $\overline{A} = X$，我们称 A 是 X 中的 **稠密集**。

(2) 如果 $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$，我们称 A 是 **疏集** （或 **无处稠密的**）。 ♣

[19]你可能会怀疑 Kuratowski 公理是否真的被数学家用来定义合理的拓扑。答案是肯定的，比如人们用这组公理来定义 C^*-代数的谱上的 Jacobson 拓扑，有兴趣的同学可以自行查阅相关资料。

例 1.143. (稠密集)

(1) 在欧氏拓扑下，$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

(2) 在 $(X, \mathscr{T}_{\text{trivial}})$ 中， $A \neq \emptyset \implies \overline{A} = X$.

(3) 可数点集 $\{(n, e^n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}^2$ 在 $(\mathbb{C}^2, \mathscr{T}_{Zariski})$ 中是稠密的。

(4) (Weierstrass) 全体多项式构成的集合在 $[0,1]$ 上的全体连续函数构成的空间中 (赋以一致度量拓扑) 是稠密的。

(5) 在例 1.119中，我们实际上证明了子集 A 在 X 中是稠密的。

例 1.144. (疏集)

(1) $\mathbb{N}$ 在 $(\mathbb{R}, d_{Euclidian})$ 中是疏集。.

(2) Cantor 集在 $[0,1]$ 中是疏集。

¶ 集合的边界

有了闭包和内部的概念，我们还可以定义集合的边界。

定义 1.145. (集合的边界)

拓扑空间 X 中集合 A 的 **边界** ∂A 是

$$\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}.$$

♣

根据定义，我们可以将全空间 X 分解为不交并

$$X = \mathring{A} \dot{\bigcup} \partial A \dot{\bigcup} \overline{A}^c.$$

请注意，根据命题 1.139，

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap (\mathring{A})^c = \overline{A} \cap \overline{A^c}.$$

所以由命题 1.135，我们有

命题 1.146. (边界点的刻画)

点 x 位于集合 A 的边界 ∂A 上当且仅当对任意包含 x 的开集 U，我们有

$$U \cap A \neq \emptyset \qquad \text{且} \quad U \cap A^c \neq \emptyset.$$

♠

下面我们列出拓扑空间中集合边界的一些性质：（尝试证明它们！）

命题 1.147. (边界的性质)

对于拓扑空间 X 中的子集 A, B，有

(1) ∂A 总是闭集。

(2) $\partial A = \partial A^c$.

(3) $\partial \mathring{A} \subset \partial A, \partial \overline{A} \subset \partial A$.

(4) $\partial\partial A \subset \partial A$.

(5) 如果 A 是开集或者闭集, 则 $\partial\partial A = \partial A$.

(6) 如果 A 是开集或者闭集, 则 $\mathring{\overbrace{\partial A}} = \emptyset$. (从而对于开集或闭集，$\partial A$ 是疏集.)

(7) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

♠

¶ 拓扑空间"范畴"：不同的描述

最后我们从宏观的角度重新认识我们在过去几节中所做的事情，以此来结束本章。

定义 1.148.（范畴）

一个**范畴** $\mathcal{C}$ 包含

1. 一个类 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，其中的元素称为 **对象**，
2. 一个类 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$，其中的元素称为对象间的 **态射**，满足
   - 每个态射 f 都有一个 **始对象** $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 和一个 **终对象** $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
     - 我们记 $f : X \to Y$ 并称"f 是从 X 到 Y 的态射".
     - 我们将从 X 到 Y 的态射全体记为 $\mathrm{Mor}(X, Y)$. [a]
   - 态射 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 的复合是态射 $g \circ f : X \to Z$，且满足
     (a). (结合性) 设 $f : X \to Y, g : Y \to Z$ 和 $h : Z \to W$, 则
     $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$
     (b). (单位元) 对 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, 存在 **单位态射** $\mathrm{Id}_X : X \to X$, 使得对于任意态射 $f : Z \to X$ 和 $g : X \to Y$，都有
     $$\mathrm{Id}_X \circ f = f \quad 且 \quad g \circ \mathrm{Id}_X = g.$$

[a] 对于一些对象 X 和 Y, 可能并不存在从 X 到 Y 的态射, 此时 $\mathrm{Mor}(X, Y) = \emptyset$.

♣

例 1.149.

(1) 拓扑空间范畴 $\mathcal{TOP}$,
- $\mathrm{Ob}(\mathcal{TOP})$ = 所有的拓扑空间,
- 态射是拓扑空间之间的连续映射。

(2) 向量空间范畴 $\mathcal{VECT}$,
- $\mathrm{Ob}(\mathcal{VECT})$ = 所有的向量空间,
- 态射是向量空间之间的线性映射。

(3) 群范畴 $\mathcal{GROUP}$,
- $\mathrm{Ob}(\mathcal{GROUP})$ = 所有的群,
- 态射是群同态。

(4) 集合范畴 $\mathcal{SET}$,
- $\mathrm{Ob}(\mathcal{SET})$ = 所有集合，（"所有集合"不是集合，所以我们用"类"这个词）
- 态射是"关系"[20]

(5) 单独一个拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 也是一个范畴:[21]
- $\mathrm{Ob}(\mathcal{SET})$ = X 中的所有开子集,
- 态射是"包含映射"。

[20] 我们称 $A \times B$ 的任意子集为从 A 到 B 的一个"关系"，记为 $A \Rightarrow B$；两个关系 $A \Rightarrow B$ 和 $B \Rightarrow C$ 的复合关系是集合 $\{(a, c) \mid 存在 b \in B 使得 (a, b) \in \text{“}A \Rightarrow B\text{”} 且 (b, c) \in \text{“}B \Rightarrow C\text{”}\}$.

[21] 这是定义 **Grothendieck 拓扑**的第一步。Grothendieck 拓扑是拓扑概念的扩展。它不是我们在本课程中所定义和研究的在 **集合** 上的结构，而是通过公理化"开覆盖"的概念而得到的在 **范畴**上的结构。

我们在第 1.2 节中提到，有多个不同的公理体系，都可以被用来“定义”拓扑空间。事实上，至今为止我们不仅列出了至少五种不同的“定义”拓扑结构的方法，而且在每种公理体系里，我们都给出了映射连续性的刻画。换句话说，我们至少有五种方式来构建拓扑空间的“范畴”! 我们把这些方式列在下面表格里:

	对象：拓扑空间	态射：连续映射
描述拓扑的方式	集合满足的公理	映射满足的条件
开集	(O1) - (O3)	f^{-1}(开集) = 开集.
闭集	(C1) - (C3)	f^{-1}(闭集) = 闭集.
邻域	(N1) - (N4)	$f^{-1}(f(x)$ 的邻域$)$ = x 的邻域.
闭包	(K1) - (K4)	$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
内部	(I 1) - (I 4)	习题：找条件

注 1.150. 除了以上五种方式外，其它可能描述拓扑的方式还有

- 用网的收敛来刻画拓扑和连续性（参见注记1.126以及习题），
- 用“导集运算”将一个集合 A 映为其导集 A'（该运算要满足 5 个公理，见命题 1.128），
- 用“边界运算”将一个集合 A 映为其边界 ∂A（需要哪些公理呢?）。

第 2 章 紧性、可数性与分离性

2.1 拓扑空间的各种紧性

在拓扑学中，“局部性质”这个词往往表示“在点的邻域内成立的性质”。在第 1.5 节的习题中我们看到了“局部有限性”的定义，在本章和下一章中我们将定义和研究更多的“局部性质”。从某种意义上说，“局部性”是拓扑的根本，这一点在拓扑学的定义中就已经明确显现出来：我们的研究对象，拓扑空间，是由邻域结构确定的；拓扑空间之间的态射，连续映射，也是由映射在每个点的邻域内的性态决定的。

另一方面，“整体性质”才是拓扑学的灵魂，无论是拓扑学的“分析部分”还是“几何部分”，都离不开对拓扑空间或其中特定子集的整体信息的刻画。例如所有的曲面在每个点的局部都跟平面圆盘在拓扑上是一样的，但整体上看曲面却是五花八门的。

在从分析到几何到数论等各个数学分支中，都存在各种从局部信息过渡到整体信息的方式，我们不妨把这些方式统称为“局部-整体原理”，而该原理甚至在物理、生物等科学领域也多有呈现。我们在第 1.3 节和第 1.5 节的习题中已经看到了“有限性”是如何帮助我们从局部过渡到整体。在本章中我们将会看到，在拓扑学中，紧性（及其推广），作为一种广义的有限性，是如何让我们从局部信息中获取全局信息的。从某种意义上来说，紧性是最重要也最有用的拓扑性质。

2.1.1 紧性的定义与例子

¶ 闭区间 $[0,1]$ 紧性的表现形式

我们知道，在欧氏空间中，一个集合是紧集当且仅当它是有界闭集。为了理解“紧性是广义的有限性”这一论断，让我们比较一下有限集，$[0,1]$ 和看似类似却非紧的 $(0,1]$：

	$X=$ 有限集	$X=[0,1]$	$X=(0,1]$
设 $f:X\to\mathbb{R}$ 是连续函数，则	f 必有界，并达到其最大/最小值。	**(最值性质)** f 必有界，并达到其最大/最小值。	f 可以无界或有界但取不到极值。
设 $x_1,x_2,\cdots$ 是 X 中的点列，则	(x_n) 必有常值子列 $x_{n_1}=x_{n_2}=\cdots=c$。	**(Bolzano-Weierstrass 定理)** (x_n) 必有收敛子列 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots\to c\in X$.	例如 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$ 没有收敛子列
设 A 是 X 的一个无限子集，则	——	A 必有一个极限点 $c\in X$.	$\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\}$ 没有极限点
设 $X=\bigcup_\alpha U_\alpha$，其中 U_α 是开集，则	必有有限个子集 $U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_k}$ 使得 $X=\bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}$.	**(Heine-Borel 定理)** 必存在有限个子集 $U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_k}$ 使得 $X=\bigcup_{i=1}^k V_{\alpha_i}$.	$\bigcup_{n=1}^\infty(\frac{1}{n},1)$ 没有有限子覆盖.
设 $F_1\supset F_2\supset\cdots$ 是一列递降闭集，则	必有 $\bigcap_k F_k\neq\emptyset$	**(Cantor 闭集套定理)** 必有 $\bigcap_k F_k\neq\emptyset$.	交集可以为空，例如 $\bigcap_k(0,\frac{1}{k}]=\emptyset$.

¶ 紧性的各种定义

我们知道，对于欧氏空间而言，“紧”跟“有界闭”是等价的，而上表中 $[0,1]$ 的五种性质都是紧性的不同表现形式。然而对于拓扑空间而言，一方面我们并没有“有界闭”这样的概念[1]。下面我们将把表中紧性的五个表现形式推广到一般的拓扑空间。跟欧氏空间不同的地方在于，我们将会得到各种不同的紧性概念！

从“局部-整体原理”的角度来看，表中的 Haine-Borel 定理是最便于使用的紧性，因为它可以把一族“局部”所承载的信息化归为有限个“局部”所承载的信息，从而也最完美地诠释了“紧性是有限性的推广”这一论断。因此，人们将把 Heine-Borel 定理抽象出来，作为“标准”紧性的定义，而把别的性质抽象出来叫做“某某紧性”。[2]

我们从一些关于覆盖的定义开始：

定义 2.1.1.（覆盖）
设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$A\subset X$ 为子集。

(1) 若子集族 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 满足 $A\subset\bigcup_\alpha U_\alpha$，则称 $\mathscr{U}$ 为 A 的一个 **覆盖**.

(2) 若覆盖 $\mathscr{U}$ 是有限族，则称 $\mathscr{U}$ 为一个 **有限覆盖**。

(3) 若覆盖 $\mathscr{U}$ 中的元素 U_α 都是开集，则称 $\mathscr{U}$ 为一个 **开覆盖**.

(4) 若 $\mathscr{U}$，$\mathscr{V}$ 都是覆盖，且 $\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$，则称为覆盖 $\mathscr{V}$ 是覆盖 $\mathscr{U}$ 的 **子覆盖**.

(5) 若 $\mathscr{U}$，$\mathscr{V}$ 都是覆盖，且对任意 $V\in\mathscr{V}$，都存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $V\subset U$，则称覆盖 $\mathscr{V}$ 为覆盖 $\mathscr{U}$ 的**加细**. ♣

下面我们定义拓扑空间中不同的紧性概念：[3]

定义 2.1.2.（三种不同的紧性）
设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间。

(1) 如果 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 都有有限子覆盖，即存在 $\mathscr{U}$ 中有限个集合 $\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\cdots,U_{\alpha_k}\}$ 使得 $X=\bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}$，则我们称 X 是 **紧的**.

(2) 如果 X 中任意点列 $x_1,x_2\cdots\in X$ 都有收敛子列 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots\to x_0\in X$，则我们称 X 是 **序列紧的**.

(3) 如果 X 中的任意无限子集 S 都有极限点，则我们称 X 是 **极限点紧的** .

(4) 设 $A\subset X$ 是一个子集，如果 $(A,\mathscr{T}_{subspace})$ 在子空间拓扑下是紧的/列紧的/极限点紧的，那么我们说 A 是 X 中的**紧集/列紧集/极限点紧集**。 ♣

---

[1]我们将会看到，虽然在度量空间中，我们可以定义集合的“有界性”，但该性质也不是一个拓扑概念，从而在一般度量空间中“有界闭”跟“紧性”是不等价的。

[2]紧性的历史：1906 年 Fréchet 通过将 Bolzano-Weierstrass 定理推广至函数空间，首次在形式上引入了“紧”的概念。这种紧性后来被推广为“序列紧性”或者更一般的“极限点紧性”，常见于分析中的存在性定理如 Arzela-scoli 定理或者 Peano 存在性定理等，在偏微分方程等方面有广泛应用。紧性作为广义有限性的“有限开覆盖”定义，最早是由 Alexandrov 和 Urysohn 在 1929 年引入。这种紧性最初被称为“bicompactness”，但很快就因为其定义简洁（仅依赖于拓扑最本质的概念即“开集”）、适用面广（直接体现了有限性）而成为了占主导地位的“紧性”。需要注意的是，在部分分支如代数几何中，由“有限开覆盖”定义的紧性被称为“quasi-compact”，而“compact”则特指本节最后提到的“紧 Hausdorff 空间”。

[3]我们这里只给出了上表中的三个不同方面的抽象推广。剩余两个的抽象推广分别被称为“可数紧”和“伪紧”，将在习题以及后文中出现。

根据定义，我们有

命题 2.1.3.（紧子集的刻画）

拓扑空间 X 中的子集 A 是紧子集当且仅当：对 X 中的任意满足 $A\subset\bigcup_\alpha U_\alpha$ 的开集族 $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}$，都存在有限子族 $U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_k}\in\mathcal{U}$ 使得 $A\subset\bigcup_{j=1}^k U_{\alpha_j}$.

¶ 紧集的例子

例 2.1.4. 我们给出紧集的一些例子：

(1) 在欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中，我们有

$$\text{有界闭}\iff\text{紧}\iff\text{列紧}\iff\text{极限点紧}.$$

(2) 考虑赋以余有限拓扑的拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_{\text{cofinite}})$，则

- X 是紧的：

  设 $X\subset\bigcup_\alpha U_\alpha$. 任取 α_1. 根据定义，U_{α_1} 是开集，因此它的补集 $X\setminus A_{\alpha_1}$ 是有限集，于是可以在 $\mathscr{U}$ 中选取有限多个集合来覆盖它。

- X 也是列紧的：

  由例1.3.2，若序列 $x_1,x_2,\cdots$ 中没有点出现无限次，那么整个序列会收敛到任意一点；若该序列中至少有一个点出现无限次，那么我们就得到一个由该点组成的“常值”子序列。

- X 也是极限点紧的：

  若 $S\subset X$ 是无限集，则对 X 中任意开集 U 都有 $U\cap S\neq\emptyset$，故 $S'=X$.

(3) 考虑乘积拓扑空间 $X=(\mathbb{N},\mathscr{T}_{\text{discrete}})\times(\mathbb{N},\mathscr{T}_{\text{trivial}})$.

- X 不是紧的：

  取 $U_n=\{n\}\times\mathbb{N}$. 则 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 的开覆盖，但没有有限子覆盖。

- X 也不是列紧的：

  令 $x_n=(n,1)$，则序列 $\{x_n\}$ 没有收敛子列。

- 但是，X 是极限点紧的：

  事实上，对于任意 $S\neq\emptyset$，我们都有 $S'\neq\emptyset$，因为只要 $(m_0,n_0)\in S$ 且 $n_1\neq n_0$，就有 $(m_0,n_1)\in\{(m_0,n_0)\}'\subset S'$。

¶ 各种紧性的关系

不难看出“极限点紧”是三者中最弱的：

命题 2.1.5.（紧，序列紧 $\Longrightarrow$ 极限点紧）

设 X 为任意拓扑空间。若 X 是紧的或是列紧的，则 X 是极限点紧的.

证明 先设 X 是紧集。若 $S\subset X$ 且 S 没有极限点，则 S 是闭集，因为 $S'=\emptyset\subset S$. 对于任意 $a\in S$，因为 $a\notin S'$，故存在开集 $U_a\subset X$ 使得 $S\cap U_a=\{a\}$. 于是 $\{S^c,U_a\mid a\in S\}$

是 X 的一个开覆盖. 根据紧性，存在 $a_1, \cdots, a_k \in S$ 使得

$$X = S^c \cup (\bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i}).$$

由此可知

$$S = S \cap X = (\bigcup_{i=1}^{k} U_{a_i}) \cap S = \{a_1, \cdots, a_k\}$$

是一个有限子集。

再设 X 是列紧的且 $S \subset X$ 是任意无限集. 任取无限序列 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset S$ 使得对任意 $i \neq j$，都有 $x_i \neq x_j$. 由列紧的定义，存在子列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots \to x_0 \in X$. 于是

$$x_0 \in \{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots\}' \subset \{x_1, x_2, \cdots\}' \subset S'.$$

所以 $S' \neq \emptyset$. □

我们在后文中将会举例说明，对于拓扑空间而言，“紧”与“列紧”互不蕴含。在下一节我们还将证明，对于度量空间，“紧”、“列紧”、“极限点紧”都是等价的，但它们并不等价于“有界闭”。

¶ 用闭集刻画紧性

应用“开闭对偶”，我们可以将“紧集的开覆盖定义”转换为用闭集给出的等价定义：

$X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, U_α 为开集 $\Longrightarrow \exists U_{\alpha_i}, X = \bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i}$.	$\Leftrightarrow$	$\emptyset = \bigcap_\alpha F_\alpha$, F_α 为闭集 $\Longrightarrow \exists F_{\alpha_i}, \emptyset = \bigcap_{i=1}^k F_{\alpha_i}$.	$\Leftrightarrow$	对任意有限族 $\{F_{\alpha_1}, \cdots, F_{\alpha_k}\}$ 都有 $\bigcap_{i=1}^k F_{\alpha_i} \neq \emptyset$ $\Longrightarrow \bigcap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$.

所以我们得到

命题 2.1.6.（用闭集刻画紧性：有限交性质）

一个拓扑空间 X 是紧的当且仅当它满足以下性质：

[有限交性质] 如果 $\mathscr{F} = \{F_\alpha\}$ 是任意一族闭集，且任意有限交集

$$F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_k} \neq \emptyset,$$

则 $\cap_\alpha F_\alpha \neq \emptyset$. ♠

作为推论，我们得到

推论 2.1.7.（闭集套定理）

设 X 是紧的，且

$$X \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots$$

是非空闭集的降链，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. ♡

¶ 用基和子基刻画紧性

因为开集可以由基里的元素生成，所以很自然地，可以通过“基覆盖”来刻画紧性：

命题 2.1.8.（用拓扑基刻画紧性）

设 $\mathcal{B}$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 的一个拓扑基，则 X 是紧的当且仅当 X 的任意基覆盖 $\mathscr{U}\subset\mathcal{B}$ 都存在有限子覆盖。

证明 设 X 是紧的，且 $\mathscr{U}\subset\mathcal{B}$ 是 X 的一个基覆盖，则 $\mathscr{U}$ 也是 X 的一个开覆盖，从而存在有限子覆盖。

反之，设 X 的任意基覆盖都存在有限子覆盖，而 $\mathscr{U}$ 是 X 的任意开覆盖。由拓扑基的定义，对于任何 $x\in X$, 都存在 $U^x\in\mathscr{U}$ 和 $U_x\in\mathcal{B}$ 使得

$$x\in U_x\subset U^x.$$

由于 $\{U_x\}$ 是 X 的基覆盖，所以存在 $U_{x_1},\cdots,U_{x_m}$ 使得 $X=\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. 因此对于 $U^{x_1},\cdots,U^{x_n}\in\mathscr{U}$，我们有 $X=\bigcup_{i=1}^n U^{x_i}$, 即 X 是紧的。 □

一个自然的问题是：可否把“基覆盖”进一步减弱为“子基覆盖”？答案是肯定的：

定理 2.1.9.（Alexander 子基定理）

设 $\mathcal{S}$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 的一个子基. 则 X 是紧的当且仅当 X 的任意子基覆盖 $\mathscr{U}\subset\mathcal{S}$ 都存在有限子覆盖。

然而，令人惊讶的是，这个定理的证明要困难得多，而且它等价于选择公理！我们将在第 2.3 节证明这个定理。

2.1.2 紧集的性质

¶ 紧性和连续映射

在三种不同的紧性中，紧性和列紧性更为重要，原因之一在于

命题 2.1.10.（紧与列紧的不变性）

设 $f:X\to Y$ 是连续映射。

(1) 如果 $A\subset X$ 是紧集，则 $f(A)$ 在 Y 中也是紧集。

(2) 如果 $A\subset X$ 是列紧集，则 $f(A)$ 在 Y 中也是列紧集。

证明 (1) 设 A 是紧集. 给定 $f(A)$ 的任意开覆盖 $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}$，其原像 $\mathscr{U}=\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ 是 A 的一个开覆盖。根据 A 的紧性，存在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 使得 $A\subset\bigcup_{i=1}^k f^{-1}(V_{\alpha_i})$. 因此 $f(A)\subset\bigcup_{i=1}^k V_{\alpha_i}$, 即 $f(A)$ 也是紧集。

(2) 对 $f(A)$ 中的任意点列 $y_1,y_2,\cdots$，存在 A 中的点列 $x_1,x_2,\cdots$ 使得 $f(x_i)=y_i$. 因此 A 是列紧的，所以存在收敛子列 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots\to x_0\in A$. 又因为 f 是连续映射，所以 $y_{n_1},y_{n_2},\cdots\to f(x_0)\in f(A)$. 所以 $f(A)$ 是列紧集。 □

然而，极限点紧的空间在连续映射下的的像集不一定是极限点紧的：

例 2.1.11. 我们刚刚看到的，乘积空间 $X = (\mathbb{N}, \mathscr{T}_{\text{discrete}}) \times (\mathbb{N}, \mathscr{T}_{\text{trivial}})$ 是极限点紧的. 我们也知道投影映射

$$\pi_1 : (\mathbb{N}, \mathscr{T}_{\text{discrete}}) \times (\mathbb{N}, \mathscr{T}_{\text{trivial}}) \to (\mathbb{N}, \mathscr{T}_{\text{discrete}})$$

是连续的。然而，像集 $(\mathbb{N}, \mathscr{T}_{\text{discrete}})$ 不是极限点紧的，因为对于任何具有离散拓扑的空间中的任何子集，都有 $A' = \emptyset$。

由于 $\mathbb{R}$ 中的子集（在通常的拓扑下）是紧的当且仅当它是列紧的，也当且仅当它是有界闭的，我们立即得到

推论 2.1.12.（最值性质）

设 $f : X \to \mathbb{R}$ 为任意连续映射。如果 $A \subset X$ 在 X 中是紧的或列紧的，则 $f(A)$ 在 $\mathbb{R}$ 中有界，且存在 $a_1, a_2 \in A$ 使得 $f(a_1) \le f(x) \le f(a_2)$ 对于所有 $x \in A$ 都成立。 ♡

因为商映射都是连续的，我们有

推论 2.1.13

任何紧/列紧空间的商空间仍然是紧/列紧的。 ♡

所以，特别地，$\mathbb{RP}^n$ 和 Klein 瓶是紧的。

¶ 逆紧映射

一般来说，紧集在连续映射下的原像不再是紧集。这样的例子很容易构造。

定义 2.1.14.（逆紧映射）

设 X, Y 为拓扑空间。对于映射 $f : X \to Y$，如果 Y 中任意紧集 B 的原像 $f^{-1}(B)$ 在 X 中是紧集，则称 f 为 **逆紧**映射。 ♣

注 2.1.15. 我们为什么要研究逆紧映射？这里给出一个原因：回想一下，拓扑空间之间的态射是连续映射，因为它们将开集拉回到开集。另一方面，通常紧集的拓扑性质更容易研究（因为我们有“局部到全局”原则）。因此，一些拓扑不变量只对紧的或“紧支的”对象定义。对于后一种情况，正确的“态射”应该是连续的逆紧映射，因为逆紧映射可以将紧支的对象拉回到紧支的对象。例如，在研究非紧空间的紧支的上同调群时，就要考虑逆紧映射。

¶ 紧空间的子空间

像往常一样，我们想从已有的紧空间甚至非紧空间构造新的紧空间。容易想到的第一个备选操作是考虑紧空间的子空间。然后，很容易看出紧空间的子空间有可能是非紧的，例如 $(0,1)$ 是 $[0,1]$ 的非紧子空间。

我们可以仔细考虑这个问题：$[0,1]$ 的哪些子集仍然是紧的？我们知道 $\mathbb{R}$ 中一个集合是紧的当且仅当它是有界且闭的。如果 A 是 $[0,1]$ 的子集，则它自动是有界的。因此，要使子集 $A \subset [0,1]$ 是紧集，只需要 A 是闭集就足够了。

事实证明，对于更一般的紧拓扑空间，子集的闭性也足够保证其紧集：

命题 2.1.16.（紧集的闭遗传性）

设 A 是拓扑空间 X 的闭子集。

(1) 如果 X 是紧集，则 A 也是紧集。

(2) 如果 X 是列紧集，则 A 也是列紧集。

(3) 如果 X 是极限点紧集，则 A 也是极限点紧集。

证明 (1) 设 $\mathscr{U}$ 是 A 的开覆盖，则 $\mathscr{U}\cup\{A^c\}$ 是 X 的开覆盖，故存在有限子覆盖 $U_1,\cdots,U_m,A^c$. 于是

$$A\subset U_1\cup\cdots\cup U_m,$$

即 $\{U_1,\cdots,U_m\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的有限子覆盖。

(2) A 中的任意点列 $x_1,x_2,\cdots$ 也是 X 中的点列，因此存在收敛子列 $x_{n_k}\to x_0\in X$. 因为 A 是闭集所以 $x_0\in A$.

(3) 设 S 是 A 的无限子集，则在 X 中有 $S'\neq\emptyset$. 又 $S'\subset A'\subset A$, 所以在 A 同样有 $S'\neq\emptyset$. □

¶ 紧性和 Hausdorff 性质

需要指出的是，一个紧集的紧子集不一定是闭集。例如，根据定义 $(X,\mathscr{T}_{trivial})$ 是紧空间，而且它的任意子集都是紧集，但除了 X 和 $\emptyset$ 外其它子集都不是闭集。

定义 2.1.17.（Hausdorff 性质）

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间。如果对于任意 $x_1\neq x_2\in X$, 都存在开集 $U_1\ni x_1$ 和 $U_2\ni x_2$ 使得 $U_1\cap U_2=\emptyset$，则我们称 X 是 **Hausdorff 空间**。

Hausdorff 性质是应用最广泛的分离性质之一。例如，可以很容易地证明

命题 2.1.18

在 Hausdorff 空间中，任何收敛序列的极限是唯一的。

尽管紧性和 Hausdorff 性质看起来完全不同，但它们在以下的意义下彼此“对偶”：

命题 2.1.19.（紧性与 Hausdorff 性的对偶）

(1) 如果 $(X,\mathscr{T})$ 是紧空间，则

(a) X 中的闭子集都是紧集。

(b) 如果 $\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}$, 则 $(X,\mathscr{T}')$ 是紧空间。

(c) $(X,\mathscr{T}_{\text{trivial}})$ 总是紧空间。

(2) 如果 $(X,\mathscr{T})$ 是 Hausdorff 空间，则

(a) X 中的每个紧子集都是闭集。

(b) 如果 $\mathscr{T}'\supset\mathscr{T}$, 则 $(X,\mathscr{T}')$ 是 Hausdorff 空间.

(c) $(X,\mathscr{T}_{\text{discrete}})$ 总是 Hausdorff 空间.

证明 我们已经证明了 (1)(a)。验证 (1)(b)、(1)(c) 和 (2)(b)、(2)(c) 是很简单的。

所以还有待证明 (2)(a): 设 $A \subset X$ 是紧集, $x_0 \in X \setminus A$. 由 Hausdorff 性质，对任意 $y \in A$, 存在开集 $U_y \ni x_0$ 和 $V_y \ni y$ 使得 $U_y \cap V_y = \emptyset$. 因为 $A \subset \cup_{y\in A} V_y$, 所以由紧性，存在 $y_1, \cdots, y_m$ 使得 $A \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}$. 于是

$$U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_m} \subset X \setminus (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_m}) \subset X \setminus A,$$

从而 $X \setminus A$ 是开集，即 A 是闭集。 □

于是紧拓扑 “趋于偏弱”，Hausdorff 拓扑 “趋于偏强”。因此，从紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射往往具有很好的性质。比如，我们有下面几个性质，其证明均留作习题:

引理 2.1.20.（闭映射引理）

设拓扑空间 X 是紧的，Y 是 Hausdorff 的. 则任意连续映射 $f : X \to Y$ 既是闭映射，也是逆紧映射。 ♡

闭映射引理有一个非常有用的推论，常被用于判定同胚:

推论 2.1.21.（一个有用的同胚判据）

设拓扑空间 X 是紧的，Y 是 Hausdorff 的. 则任意连续双射 $f : X \to Y$ 是同胚。 ♡

特别地，紧 Hausdorff 空间形成了一类非常特殊的拓扑空间:

命题 2.1.22.（紧 Hausdorff 拓扑之间不可比较）

如果 $\mathscr{T}$ 是 X 上的紧 Hausdorff 拓扑，且 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 是 X 上的两个拓扑，满足 $\mathscr{T}_1 \subsetneq \mathscr{T} \subsetneq \mathscr{T}_2$，则 $(X, \mathscr{T}_1)$ 不是 Hausdorff 的，而 $(X, \mathscr{T}_2)$ 不是紧的。 ♠

换而言之，紧 Hausdorff 拓扑是一种恰到好处的拓扑，如同宋玉的邻人东家之子那般，“增一个开集则太强，减一个开集则太弱”！（注意同一个集合上可能有很多不同的、两两不可比较的紧 Hausdorff 拓扑。）

2.2 乘积空间的紧性：Tychonoff 定理

2.2.1 有限积的紧性

¶ 管形邻域引理

为了证明有限个紧空间的乘积空间的紧性，我们需要如下的“管形邻域引理”。请仔细体会证明中是如何利用紧性从局部过渡到整体的：

引理 2.2.1.（管形邻域引理）

设 $x_0 \in X$，B 是 Y 的紧子集。则 $\{x_0\} \times B$ 在 $X \times Y$ 中的任意开邻域 N 都包含 $\{x_0\} \times B$ 的一个“管形邻域”，即存在 $\{x_0\}$ 的开邻域 U 以及 B 的开邻域 V，使得

$$\{x_0\} \times B \subset U \times V \subset N.$$

♡

证明 对于任意 $(x_0, y) \in \{x_0\} \times B \subset N$，存在 X 中的开集 $U_{x_0}^y$ 及 Y 中的开集 V_y 使得

$$(x_0, y) \in U_{x_0}^y \times V_y \subset N.$$

因为 $B = \bigcup_{y \in B}\{y\} \subset \bigcup_{y \in B} V_y$，由 B 的紧性，存在 $y_1, \cdots, y_k \in B$ 使得

$$B \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_k} =: V.$$

设 $U = \bigcap_{i=1}^k U_{x_0}^{y_i}$, 则 U 是开集且对任意 $1 \le i \le k$，都有 $x_0 \in U \subset U_{x_0}^{y_i}$，从而

$$N \supset \bigcup_y (U_{x_0}^y \times V_y) \supset \bigcup_{1 \le i \le k} (U_{x_0}^{y_i} \times V_{y_i}) \supset \bigcup_{1 \le i \le k} (U \times V_{y_i}) = U \times V.$$

□

注意若 B 是非紧的，则很容易构造一个反例：

例 2.2.2. 在 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 中, 我们有

$$\{0\} \times \mathbb{R} \subset N = \{(x, y) \mid |xy| < 1\},$$

但不存在 0 的开邻域 U 使得 $U \times \mathbb{R} \subset N$.

使用“管形邻域引理”的结论以及方法，可得更一般的“方形邻域引理”：

引理 2.2.3.（方形邻域引理）

设 A 是 X 的紧子集，B 是 Y 的紧子集，则对 $A \times B$ 在 $X \times Y$ 中的任意开邻域 N，都存在 A 在 X 中的开邻域 U 以及 B 在 Y 中的开邻域 V，使得

$$A \times B \subset U \times V \subset N.$$

♡

证明 对任意 $x_0 \in A$, 由管形邻域引理, 存在开集 U_{x_0} 和 V_{x_0} 使得

$$\{x_0\} \times B \subset U_{x_0} \times V_{x_0} \subset N.$$

因为 A 是紧的，存在 $x_1, \cdots, x_m \in A$ 使得

$$A \subset U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m} =: U.$$

令 $V = \bigcap_{i=1}^m V_{x_i}$, 则 $B \subset V$ 且 V 是开集，而且

$$A \times B \subset U \times V \subset \bigcup_{1 \le i \le m} (U_{x_i} \times V_{x_i}) \subset N.$$

□

¶ 有限乘积空间的紧性

下面我们应用管形邻域引理证明

命题 2.2.4.（乘积的紧性）

设 A 是 X 的紧子集，B 是 Y 的紧子集，则 $A\times B$ 是 $X\times Y$ 的紧子集。

证明 设 $\mathscr{W}$ 是 $A\times B$ 的任意开覆盖. 对于任意 $x\in A$, 由定义易知 $\{x\}\times B$ 是紧集, 故存在 $W_1^x,\cdots,W_k^x\in\mathscr{W}$ 使得

$$\{x\}\times B\subset W_1^x\cup\cdots\cup W_k^x.$$

根据管形邻域引理，在 X 中存在包含 x 的开集 U_x 使得

$$U_x\times B\subset W_1^x\cup\cdots\cup W_k^x.$$

因为 $\{U_x\,|\,x\in A\}$ 是 A 的开覆盖，由紧性，存在 $x_1,\cdots,x_m$ 使得 $A\subset U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_m}$. 根据上面的讨论，对于 $1\le i\le m$, 我们已经找到 $W_1^{x_i},\cdots,W_{k(i)}^{x_i}\in\mathscr{W}$ 使得

$$U_{x_i}\times B\subset W_1^{x_i}\cup\cdots\cup W_{k(i)}^{x_i}.$$

因此

$$A\times B\subset(U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_m})\times B\subset\bigcup_{1\le i\le m,1\le j\le k(i)}W_j^{x_i},$$

即 $\{W_j^{x_i}\,|\,1\le i\le m,1\le j\le k(i)\}$ 是 $\mathscr{W}$ 的有限子覆盖。 □

由归纳法，我们立刻得到

推论 2.2.5.（有限积的紧性）

若 $A_1,\cdots,A_k$ 分别是 $X_1,\cdots,X_k$ 中的紧集，则 $A_1\times\cdots\times A_k$ 在 $X_1\times\cdots\times X_k$ 中紧。

¶ Tychonoff 定理

现在我们陈述点集拓扑学最重要、最有用的定理之一：Tychonoff 定理[4]。

定理 2.2.6.（Tychonoff 定理）

如果对任意 α，X_α 都是紧空间，则乘积空间 $(\prod_\alpha X_\alpha,\mathscr{T}_{product})$ 也是紧空间。

乍一看，Tychonoff 定理是反直觉的：紧性是一种广义的“有限性”，那么无限甚至不可数个拓扑空间的乘积怎么可能是紧的?! 仔细思考一下，会发现这件事情也并不难理解：乘积拓扑是一个很弱的拓扑（“使得投影映射连续的最弱的拓扑”），而紧拓扑也是“趋于偏弱”的拓扑。从定义上来看，生成乘积拓扑的子基元素 $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 具有很好的“有限性”：仅在一个分量即 α 分量上要求元素落在集合 U_α 中，而对其它分量的元素没有任何限制。进一步地，基元素（作为子基元素的有限交）依然具有类似的“有限性”。作为

[4]吉洪诺夫（A. N. Tychonov, 也被英译为 Tikhonov 等，1906-1993），前苏联/俄罗斯数学家、地球物理学家，在拓扑学、泛函分析、数学物理、不适定问题等领域有突出贡献。在 1930 年, Tychnoff 首次对于闭区间的乘积空间证明了这一定理，之后 1935 年他陈述了该定理的一般版本（但该定理第一个正式发表的证明是 Cech 在 1937 年给出的）。事实上，乘积拓扑的定义最早就是由 Tychonoff 在 1935 年这篇论文中引入的。

对比，很容易看出，一般情况下，无限多空间的乘积空间在赋箱拓扑时不是紧致的，主要原因在于箱拓扑的开集太多，而箱拓扑的基元素不具有类似的有限性。

为了体会到无限乘积的紧性，我们先看两个可数无限乘积空间的例子：

例 2.2.7. 回想一下，

$$X^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} X = \{(a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in X\}.$$

我们在第 1.4 节已经知道，$X^{\mathbb{N}}$ 上的乘积拓扑等同于 $\mathcal{M}(\mathbb{N}, X)$ 上的逐点收敛拓扑。

(a) 取 $X = \{0, 2\}$，即仅含两点的集合，于是 $X^{\mathbb{N}}$ 是由 0 和 2 构成的序列所组成的空间。注意到每个 0、2 序列都对应于在 Cantor 集的构造中出现的一个闭集降链，从而对应于 Cantor 集合中的一个点。（我们也可以把该 0、2 序列通过实数的三进制表示对应于 $[0,1]$ 中的数，而这些书恰为落在 Cantor 集中的数。）可以证明（留作习题）：

命题 2.2.8.（作为乘积空间的 Cantor 集）

乘积拓扑空间 $(\{0,2\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{product})$ 同胚于 Cantor 集 C. ♠

因此，无穷乘积拓扑空间 $(\{0,2\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{product})$ 是紧的！

(b) 取 $X = [0,1]$，于是 $X^{\mathbb{N}}$ 中的元素是由 $[0,1]$ 中的数所构成的数列 $a = (a_1, a_2, \cdots)$. 下面我们利用对角线技巧，证明 $X^{\mathbb{N}}$ 是列紧的：

证明 考虑 $X^{\mathbb{N}}$ 中的一列元素 $a^1, a^2, \cdots$，其中 $a^n = (a_1^n, a_2^n, \cdots)$. 因为 a_1^n 是 $[0,1]$ 中的一个数列，由 $[0,1]$ 的列紧性，存在点列 a^n 的子列 $a^{n(1,i)}$，使得数列 $a_1^{n(1,i)}$ 收敛于某个实数 a_1^∞. 继续对数列 $a_2^{n(2,i)}$ 用 $[0,1]$ 的列紧性，可知存在点列 $a^{n(1,i)}$ 的子列 $a^{n(2,i)}$，使得数列 $a_2^{n(2,i)}$ 收敛于某个实数 a_2^∞. 继续这个过程，我们得到一个各元素都是点列的方阵

$$\begin{matrix} a^{n(1,1)} & a^{n(2,1)} & a^{n(3,1)} & \cdots \\ a^{n(1,2)} & a^{n(2,2)} & a^{n(3,2)} & \cdots \\ a^{n(1,3)} & a^{n(2,3)} & a^{n(3,3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

其中每一列是左边列的子列。最后，取该方阵的对角线子列 $a^{n(i,i)}$. 则由构造可知这是点列 (a^n) 在乘积拓扑（即逐点收敛拓扑）下的收敛子列。□

我们在下一节将会看到，对于度量空间而言，列紧性与紧性是等价的。另外我们在习题中将会证明，可数个紧度量空间的乘积空间，其乘积拓扑事实上是一个度量拓扑。因此，$X^{\mathbb{N}}$ 不仅是列紧的，而且是紧的。

用完全同样的论证可得

命题 2.2.9.（列紧空间的可数乘积依然列紧）

可数多个列紧空间的乘积（赋乘积拓扑）仍然是列紧的。 ♠

¶ 紧 v.s. 列紧

例 2.2.10. 作为 Tychonoff 定理的推论，我们举例说明 “紧 $\not\Leftrightarrow$ 列紧”。

(a) **[紧 $\not\Rightarrow$ 列紧]**：根据 Tychonoff 定理，$([0,1]^{[0,1]}, \mathscr{T}_{product}) = (\mathcal{M}([0,1],[0,1]), \mathscr{T}_{p.c.})$ 是紧空间。下证它不是列紧的。

证明 定义 $f_n : [0,1] \to [0,1]$ 为将 x 映射到其二进制表示中的第 n 位 [5]的映射。我们断言 f_n 没有收敛子列。事实上，对任意子列 f_{n_k}，如果取 $x_0 \in [0,1]$ 为这样的数：对每个 k，其二进制表示的第 n_{2k} 位为 0 而第 n_{2k+1} 位为 1，则有

$$f_{n_{2k}}(x_0) = 0 \quad 且 \quad f_{n_{2k+1}}(x_0) = 1.$$

因此 f_{n_k} 在 x_0 处不收敛，从而不是逐点收敛的。 □

(b) **[列紧 $\not\Rightarrow$ 紧]** 设 A 是 $(\mathcal{M}([0,1],[0,1]), \mathscr{T}_{p.c.})$ 的由仅在可数个点上非零的函数组成的子集，即

$$A = \{f : [0,1] \to [0,1] \mid 仅对可数多 x \in [0,1] 有 f(x) \neq 0\}.$$

下证 A 是列紧的但不是紧的：

证明 先说明A是列紧的：给定 A 中的任意点列 (f_n)，则集合 $S = \{x \mid \exists n 使得 f_n(x) \neq 0\}$ 是可数集，而在研究函数列 f_n 的逐点收敛时，我们可以认为 $f_n \in [0,1]^S$。但是，由命题2.2.9，$[0,1]^S$ 是列紧的。因此 f_n 具有收敛子列。

再说明A不是紧的：对任意 $t \in [0,1]$，如果我们记

$$A_t := \{f \in A \mid f(t) = 1\},$$

则 $\{A_t\}$ 是 A 中的一族闭集（因为赋值映射是连续的，而 $A_t = \mathrm{ev}_t^{-1}(1)$），且

$$\bigcap_{t\in[0,1]} A_t = \emptyset.$$

但对于任意有限个点 $t_1, \cdots, t_k \in [0,1]$，我们有

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_{t_i} \neq \emptyset.$$

所以 A 不满足有限交性质，从而不是紧的。 □

2.2.2 Tychonoff 定理的证明

¶ Tychonoff 定理的证明

根据定义，在 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上的乘积拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 是由如下子基生成的：

$$\mathcal{S} = \bigcup_\alpha \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid U_\alpha \subset X_\alpha 是开集\},$$

其中 $\pi_\alpha : \prod_\beta X_\beta \to X_\alpha$ 是典范投射。所以使用下述 Alexander[6]子基定理来证明 Tychonoff 定理是自然的：

定理 2.2.11.（Alexander 子基定理）

$(X, \mathscr{T})$ 是紧的当且仅当 X 的任意“子基覆盖”具有有限子覆盖。 ♡

[5]若 x 是一个有限二进制小数 $x = 0.\overline{a_1 \cdots a_n 1}$，我们取其“无限循环小数表示” $x = 0.\overline{a_1 \cdots a_n 0111 \cdots}$.

[6]亚历山大 (James Waddell Alexander II, 1888-1971)，美国拓扑学家，在同调论、上同调论、纽结理论等方面都做出了奠基性的工作。他在 1924 年发现的“Alexander 带角球”（见本书后文）揭示了高维与二维的差别。

【Tychonoff 定理的证明】

证明 设 $\mathscr{A}$ 是 $X=\prod_\alpha X_\alpha$ 的一个子基覆盖。换言之，$\mathscr{A}$ 形如

$$\mathscr{A}=\{\pi_\alpha^{-1}(U)\mid U\in\mathscr{A}_\alpha\},$$

其中 $\mathscr{A}_\alpha\subset\mathscr{T}_\alpha$ 是 X_α 中的一族开集。因为 $\mathscr{A}$ 是 $X=\prod_\alpha X_\alpha$ 的覆盖，所以存在 α_0 使得 $\mathscr{A}_{\alpha_0}$ 是 X_{α_0} 的覆盖，否则

$$\begin{aligned}\forall\,\alpha, X_\alpha\setminus\bigcup\nolimits_{U\in\mathscr{A}_\alpha}U\neq\emptyset &\implies \prod_\alpha(X_\alpha\setminus\bigcup\nolimits_{U\in\mathscr{A}_\alpha}U)\neq\emptyset\\ &\implies \mathscr{A}\text{ 不是 } X \text{ 的覆盖!}\end{aligned}$$

于是由 X_{α_0} 的紧性, $\mathscr{A}_{\alpha_0}$ 具有有限子基覆盖 $\{U_1,\dots,U_m\}$. 因此 $\{\pi_{\alpha_0}^{-1}(U_1),\cdots,\pi_{\alpha_0}^{-1}(U_m)\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的有限子基覆盖。所以由 Alexander 子基定理, X 是紧空间。 □

¶ 选择公理及其等价陈述

令人惊讶的是，Alexander 子基定理的证明非常不平凡：我们需要用到**选择公理**!

定理 2.2.12.（选择公理）

对于集合 X 的任意一个由非空子集构成的集族 $\mathscr{A}$，都存在一个映射 $f:\mathscr{A}\to X$，使得对任意 $A\in\mathscr{A}$，都有 $f(A)\in A$。这样的 f 被称为集族 $\mathscr{A}$ 的一个**选择函数**. ♡

在数学中，“选择公理”看起来像一个双面怪兽 [7]. 一方面，使用选择公理，我们可以得到很多漂亮的结果，包括

- 每个向量空间都有 Hamel 基，每个含幺环都有极大理想，每个域都有代数闭包⋯⋯
- Hahn-Banach 定理，泛函分析最核心的结果之一，广泛用于构造特定的线性泛函，
- 任意连通图都有生成树.

另一方面，选择公理也蕴含了很多违反直觉甚至匪夷所思的结果：

- $\mathbb{R}$ 中存在不可测子集，实数加法群与复数加法群同构，⋯⋯
- **Banach-Tarski 悖论**：可以将 3 维单位球 $B^3(1)\subset\mathbb{R}^3$ 分解为有限多块，然后仅使用旋转和平移，将这些块拼成两个大小和 $B^3(1)$ 一样的单位球。

选择公理有许多等价的陈述方式，其中一些看起来非常反直觉，而另一些看起来是“显然成立的”，例如我们在上面给出的 Tychonoff 定理的证明过程中已经偷偷使用过下面

[7]选择公理的最佳解释之一是由英国哲学家、数学家、逻辑学家 Russell（罗素）给出来的：

“从无数双袜子中选择一只袜子时需要选择公理，但对于鞋子来说，则不需要选择公理。”

一个广为流传的笑话来自美国数学家 Jerry Bona，

“选择公理显然是正确的，良序定理显然是错误的，至于 Zorn 引理，谁能看出对错呢?”

此外，维基百科还记载了一个让人哭笑不得的故事，

1924 年波兰与美国数学家、逻辑学家 Tarski 证明了如下定理：

选择公理和“每个无限集 A 具有与 $A\times A$ 相同的基数”是等价的。

他把文章投给数学期刊 Comptes Rendus，但两位审稿人 Fréchet 和 Lebesgue 都拒绝发表这一定理. Fréchet 的审稿意见是“两个众所周知的 [真] 命题之间的相互蕴涵并不是一个新结果”，而 Lebesgue 的意见则是“两个假命题之间的相互蕴涵是没有意义的”。最后该文章发表在了 Fundamenta Mathematicae 杂志上。

这个选择公理的等价陈述：

定理 2.2.13.（选择公理的等价陈述）

对于任意一族非空集合 X_α，其笛卡尔积 $\prod_\alpha X_\alpha$ 也是非空的。♡

选择公理的另外两个广泛使用的等价陈述是**良序定理**和 **Zorn 引理**。为了叙述它们，我们需要

定义 2.2.14.（上界与极大元）

设 $(P, \preceq)$ 是一个非空偏序集.

(1) 对于 P 的非空子集 Q，若 $c \in P$ 满足 "对于 Q 中的任意元素 a，都有 $a \preceq c$ 成立"，则我们称 c 是 Q 的一个 **上界**. 类似地，我们可以定义**下界**的概念。

(2) 如果 $c \in P$ 且不存在 P 中的元素 $b \neq c$ 使得 $b \preceq c$，则我们称 c 是 P 中的**极大元**. 类似地，我们可以定义**极小元**的概念。♣

定理 2.2.15.（Zorn 引理）

设非空偏序集 $(\mathcal{P}, \preceq)$ 的每个全序子集在 $\mathcal{P}$ 中都有一个上界，则 $\mathcal{P}$ 必有极大元。♡

从某种意义上说，Zorn 引理是 "打包的超限归纳法"：为了证明某个偏序集中极大元的存在性，一种做法是假设极大元不存在，然后用超限归纳法推出矛盾。而 Zorn 引理则将这个繁琐的过程（及其所需要的条件）打包在一起，成为一个便于使用的工具。[8]

最后我们叙述良序定理：

定义 2.2.16.（良序集）

设 $(P, \preceq)$ 是一个全序集.

(1) 若 Q 是 P 的子集，c 是 Q 的一个上界，且 $c \in Q$，则我们称 c 是 Q 的**最大元**. 类似地，我们可以定义**最小元**的概念。

(2) 若 P 的任意非空子集都有最小元，则我们称 P 是 **良序集**。♣

根据定义，$\mathbb{N}$（在标准序下）是良序集，但 $\mathbb{Z}$ 在标准序下不是良序集。当然，不难在 $\mathbb{Z}$ 上定义一个良序。但是，要想在实数集 $\mathbb{R}$ 构造良序则是很困难的。事实上，选择公理最初是 1904 年由德国数学家、逻辑学家 Zermelo 引入的，其目的就是用选择公理这个 "无可非议的逻辑原理" 来证明任何集合都存在良序：

定理 2.2.17.（良序定理）

任意集合上都存在一个全序关系，使之成为一个良序集。♡

---

[8]菲尔兹奖获得者，英国数学家 Gowers 在 "如何使用 Zorn 引理" 一文中总结道：

> "当你在一步步构造某个数学对象，但发现
> - 即使归纳性地重复了无穷多次构造，你的构造过程依然未结束，
> - 看似没有什么可以让你停止继续构造，
>
> 那么 Zorn 引理可能可以帮到你。"

¶ Alexander 子基定理的证明

证明 定理的一半是显然的。我们只需要证明：**如果 X 的任意子基覆盖具有有限子覆盖，那么 X 是紧的**。我们采用反证法。假设 X 不是紧的，但任意子基覆盖都具有有限子覆盖. 下面我们通过 Zorn 引理构造一个没有有限子覆盖的子集覆盖。为此，我们令

$$\boxed{\text{科}}^{9} = \{\mathscr{A} \subset \mathscr{T} \mid \mathscr{A} \text{ 是 } X \text{ 的开覆盖但没有有限子覆盖}\} \in 2^{2^{2^X}}.$$

那么

- 因为 X 不是紧的，$\boxed{\text{科}} \neq \emptyset$.
- “集合间的包含关系 $\subset$” 是$\boxed{\text{科}}$上的一个偏序。

于是 $(\boxed{\text{科}}, \subset)$ 是一个非空偏序集。取 $\boxed{\text{科}}$ 的任意一个非空全序子集 科[10]，那么

(1) $\mathscr{E} = \bigcup_{\mathscr{A} \in \text{科}} \mathscr{A} \subset \mathscr{T}$,

(2) $\mathscr{E}$ 是 X 的开覆盖，

(3) $\mathscr{E}$ 是 科 的一个上界。

下证 $\mathscr{E} \in \boxed{\text{科}}$: 如若不然，则存在 $\mathscr{E}$ 的有限子覆盖 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$. 根据构造，$\exists \mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n \in$ 科 使得 $A_i \in \mathscr{A}_i$. 因为科 是全序集，$\exists k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 使得

$$\mathscr{A}_i \preceq \mathscr{A}_k, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

因此 $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{A}_k$, 即 $\mathscr{A}_k$ 具有有限子覆盖，矛盾！

所以由 Zorn 引理，$\boxed{\text{科}}$ 有最大元 $\mathscr{A}$.

现在考虑子基 $\mathcal{S}$. 我们断言

断言 2.2.18

$\mathcal{S} \cap \mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖。 ♡

让我们暂且假设断言成立。换句话说，我们得到了 X 的覆盖 $\mathcal{S} \cap \mathscr{A}$。一方面，因为 $\mathscr{A}$ 没有有限的子覆盖，这个覆盖不可能有有限的子覆盖。但另一方面，因为它是一个子基覆盖，所以它一定有有限的子覆盖。矛盾！这样就完成了证明。 □

证明 [断言2.2.18的证明] 对任意 $x \in X$, $\exists A \in \mathscr{A}$ 使得 $x \in A$. 根据子基的定义，$\exists S_1, \cdots, S_m \in \mathcal{S}$ 使得 $x \in S_1 \cap \cdots \cap S_m \subset A$. 下面我们证明

$$\exists 1 \leq k \leq m \ \text{ 使得} S_k \in \mathscr{A}.$$

这意味着 $S_k \in \mathcal{S} \cap \mathscr{A}$ 且 $x \in S_k$, 从而完成了证明。

再次应用反证法。如若不然，则对 $\forall 1 \leq k \leq m$,

$$\mathscr{A} \prec \mathscr{A}_k := \mathscr{A} \cup \{S_k\}.$$

[9]这是一个新字符，读音为 $w\check{o}\, k\bar{e}$. 在本课程中，我们
- 用 a, b, x 等小写字母来表示 X 中的元素；
- 用 A, B, U 等大写字母表示 X 中的子集，即 2^X 中的元素；
- 用花体大写字母 $\mathscr{A}, \mathscr{T}$ 等来表示 X 中的子集族，即 2^{2^X} 中的元素；
- 创造字符来表示 X 中子集族的集合, 即 $2^{2^{2^X}}$ 中的元素。

[10]读音：$n\check{i}\, k\bar{e}$

因为 $\mathscr{A}$ 是$\boxed{科}$的最大元，我们有 $\mathscr{A}_k \notin \boxed{科}$，即 $\mathscr{A}_k$ 有有限子覆盖 $\{S_k, A_{k,1}, \cdots, A_{k,j(k)}\}$，其中每个 $A_{k,i} \in \mathscr{A}$. 因此

$$X = \bigcap_{k=1}^{m} (S_k \cup A_{k,1} \cup \cdots \cup A_{k,j(k)}) = (S_1 \cap \cdots \cap S_m) \cup (\bigcup_{k,j} A_{k,j}),$$

这里我们用到如下事实：$(A \cup B) \cap (C \cup D) \subset (A \cap C) \cup B \cup D$. 因此

$$\{A, A_{k,j} \mid 1 \le k \le m, 1 \le j \le j(k)\}$$

是 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖。矛盾！ □

¶ Tychonoff 定理 $\Longrightarrow$ 选择公理

在证明 Tychonoff 定理时，选择公理起到了重要作用。可能有人会问：是否可以不使用选择公理来证明 Tychonoff 定理？答案是否定的。事实上，不难证明 Tychonoff 定理蕴含了选择公理的等价陈述，定理2.2.13，从而 Tychonoff 定理等价于选择公理：

命题 2.2.19. （Kelley: Tychonoff 定理 $\Longrightarrow$ 选择公理）

假设 Tychonoff 定理成立，则定理2.2.13成立，即

$$X_\alpha \neq \emptyset, \forall \alpha \Longrightarrow \prod_\alpha X_\alpha \neq \emptyset.$$

证明 令 $\widetilde{X}_\alpha := X_\alpha \cup \{\infty_\alpha\}$，并赋予拓扑 $\widetilde{\mathscr{T}}_\alpha = \{\emptyset, X_\alpha, \{\infty_\alpha\}, \widetilde{X}_\alpha\}$，则 $\widetilde{X}_\alpha$ 是紧的. 由 Tychonoff 定理，$X = \prod_\alpha \widetilde{X}_\alpha$ 在乘积拓扑下是紧的. 注意到 $\{\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)\}$ 是 X 中的一族闭集，且任意有限交

$$\pi_{\alpha_1}^{-1}(X_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(X_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_k}^{-1}(X_{\alpha_k}) \supset X_{\alpha_1} \times \cdots \times X_{\alpha_k} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_1, \cdots, \alpha_k} \{\infty_\alpha\},$$

即 $\{\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)\}$ 满足有限交性质。于是由 X 的紧性得

$$\bigcap_\alpha \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha) \neq \emptyset.$$

根据定义，$\cap_\alpha \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)$ 中的任意元素都是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 的一个元素。 □

2.2.3 阅读材料：Tychonoff 定理的一些应用

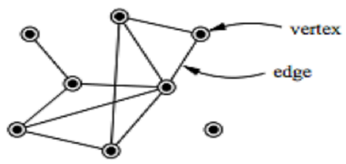
我们在这里给出 Tychonoff 定理的几个“非拓扑”应用。

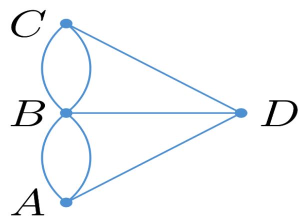
¶ 应用 1: 图染色

定义 2.2.20. （图）

在图论中，**图** G 是指一个有序对 $G = (V, E)$，其中

- V 是一个集合，其中的元素被称为 **顶点**，
- $E \subset V \times V$，其中的元素被称为 **边** (可以是“多重集”).





定义 2.2.21.（子图与染色）

设 $G=(V,E)$ 是一个图。

(1) 若图 $\widetilde{G}=(\widetilde{V},\widetilde{E})$ 满足 $\widetilde{V}=V$, $\widetilde{E}\subset E$，则称 $\widetilde{G}$ 是 G 的一个 **子图**. [a]

(2) 若子图 $\widetilde{G}$ 的边集 $\widetilde{E}$ 是有限集，则称之为一个 **有限子图**。

(3) 设 $k\in\mathbb{N}$. 若映射 $f:V\to[k]:=\{1,2,\cdots,k\}$ 满足

$$\text{对任意边}\overline{ab}\in E,\text{都有}f(a)\neq f(b),$$

则称 f 为图 G 的一个 **k-染色**.

[a]在子图的定义中，通常仅要求 $\widetilde{V}\subset V$ 而不是 $\widetilde{V}=V$. 但就我们下面要讨论的内容而言，这两者是等价的，而且要求 $\widetilde{V}=V$ 会更方便.

♣

图的着色问题是图论里面最经典也最重要的问题之一。1951 年，荷兰数学家 N. de Bruijn 和匈牙利数学家 P. Erdös [11] 应用超限归纳法证明了无限图的着色问题可以被化归为其有限子图的着色问题。我们这里给出由美国数学家 Gottschalk 发现的用 Tychonoff 定理的简单证明:

定理 2.2.22.（de Bruijn-Erdös 定理）

设 G 是任意图 (其中 V 可以是无限集), $k\in\mathbb{N}$. 如果 G 的任意有限子图是 k-可染色的，则 G 是 k-可染色的.

♡

证明 赋予 $[k]=\{1,2,\cdots,k\}$ 离散拓扑并考虑乘积空间

$$X:=\prod_V[k]=\{f:V\to[k]\}.$$

因为 $[k]$ 是紧的，由 Tychonoff 定理知 X 也是紧的。对任意子集 $F\subset E$, 我们定义

$$X_F:=\{f:V\to[k]\mid f\text{ 是}(V,F)\text{ 的 }k\text{-染色}\}.$$

[11]埃尔德什（Paul Erdös, 1913-1996），20 世纪最多产的数学家，最著名的“问题解决者”，同时也是提出最多数学猜想的人之一，1983/1984 年 Wolf 奖获得者（同年的另一个获奖者是陈省身先生）。他的研究领域包括离散数学，图论，数论，数值分析，逼近论，集合论和概率论等。虽然他并不算一名拓扑学家，但依然对拓扑学做出过重要贡献：他在 1940 年首次给出了完全不连通的非零维空间的例子，这类空间后来被称为 Erdös 空间。他一生发表了大约 1,525 篇数学论文（对比一下：Euler 发表了大约 800 篇论文），有 511 名不同的合作者。数学家可以通过“合作距离”形成一个度量空间：如果两位数学家是研究论文的共同作者，则他们的合作距离为 1；如果他们不是任何研究论文的共同作者，但有另一个数学家是两者的合著者，则两位数学家的协作距离为 2；等等。任何数学家都有一个 **Erdös 数**：他与 P. Erdös 的合作距离。

我们首先注意到，如果 $F=\{\overline{ab}\}$，即仅仅含一条边的集合，则 X_F 是闭的，因为此时

$$\begin{aligned}X_{\{\overline{ab}\}} &= \{f:V\to[k]\mid f(a)\neq f(b)\}\\ &= \bigcup_{1\le i\neq j\le k}\{f:V\to[k]\mid f(a)=i, f(b)=j\}\\ &= \bigcup_{1\le i\neq j\le k}(\pi_a^{-1}(i)\cap\pi_b^{-1}(j))\end{aligned}$$

是闭集的有限并。进一步，由 $X_{F_1}\cap X_{F_2}=X_{F_1\cup F_2}$ 可知对于任意 $F\subset E$,

$$X_F=\bigcap_{\overline{ab}\in F}X_{\overline{ab}}$$

是一族闭集的交集，从而依然是闭集。

下面考虑闭集族

$$\mathscr{F}=\{X_F\mid F\subset E\text{ 是有限集}\}.$$

对于任意有限子族 $F_1,\cdots,F_m$，因为 $F_1\cup\cdots\cup F_m$ 是有限集，我们有

$$X_{F_1}\cap X_{F_2}\cap\cdots\cap X_{F_n}=X_{F_1\cup\cdots\cup F_m}\neq\emptyset.$$

于是 $\mathscr{F}$ 满足“任意有限交均非空”这一性质。因为 X 是紧的, 由紧集的有限交刻画，

$$\bigcap_{X_F\in\mathscr{F}}X_F\neq\emptyset.$$

根据定义, $\cap_{X_F\in\mathscr{F}}X_F$ 中的任意元素 f 都是 G 的一个 k-染色。 □

由证明过程不难发现，该定理可以被推广到“每个顶点都有一个有限色集”的情形。

¶ 应用 2: $\mathbb{Z}$ 的子集中的等差数列

拓扑学也可以被用来研究组合数论中的问题。

定义 2.2.23.（划分）

设 S 是一个集合，我们称 S 的一个无交并分解

$$S=S_1\sqcup\cdots\sqcup S_c$$

为它的一个 c-**划分**. ♣

换而言之，S 的一个 c-划分就是视 S 为一个边集为空集的图时，图 $(S,\emptyset)$ 的一个 c-着色.

1927 年，荷兰数学家 Van der Waerden 证明了如下结果：

定理 2.2.24.（Van der Waerden 定理）

对于任意正整数 c 和 k，存在 $N=N(c,k)$[a]使得 $[N]=\{1,\cdots,N\}$ 的每个 c-划分

$$[N]=S_1\sqcup\cdots\sqcup S_c$$

中，都有一个子集 S_i 包含了一个长度为 k 的等差数列.

[a] Ramsey 理论中的一个重要问题就是确定最小的 $N(c,k)$. 目前对一般情形所知的最佳上界是前文中提到的英国数学家 Gowers 在 2001 年给出来的：$N(c,k)\le 2^{2^{c^{2^{2^{k+9}}}}}$.

♡

利用紧性，人们往往可以建立与“有限系统的定量结果”等价的“相应的无限系统的定性结果”。比如，我们有

定理 2.2.25.（Van der Waerden 定理, 无限定性版本）

对于自然数集的任意划分

$$\mathbb{N} = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_c,$$

一定存在某个 S_j，使得对任意 $k \in \mathbb{N}$，S_j 都包含一个长度为 k 的等差数列。 ♡

我们来利用紧性证明定理2.2.24与定理2.2.25是等价的：

【定理2.2.24$\Longrightarrow$ 定理2.2.25】 这是显然的。

【定理2.2.25$\Longrightarrow$ 定理2.2.24】

证明 假设定理2.2.25成立但定理2.2.24不成立。换言之，存在 k, c，使得任意 $[n]$ 都有划分

$$[n] = S_{n,1} \sqcup \cdots \sqcup S_{n,c},$$

其中每个 $S_{i,j}$ 都不包含长度为 k 的等差数列。我们定义一列映射 $f_n : \mathbb{Z} \to [c]$,

$$f_n(i) = \begin{cases} j, & 若 1 \le i \le n 且 i \in S_{n,j}, \\ 1, & 若 i > n. \end{cases}$$

根据命题2.2.9，f_n 有逐点收敛子列 $f_{n_l} \to f_\infty$. 由映射 $f_\infty : \mathbb{N} \to [c]$ 可得 $\mathbb{N}$ 的一个 c-划分

$$\mathbb{N} = S_{\infty,1} \sqcup \cdots \sqcup S_{\infty,c}.$$

根据定理2.2.25，一定有某个 $S_{\infty,j}$ 包含一个长度为 k 的等差数列，$a_1, \cdots, a_k$.

另一方面，因为在 $[c]$ 上的拓扑是离散拓扑，对任意 i，存在 $m(i)$ 使得当 $l > m(i)$ 时有 $f_{n_l}(i) = f_\infty(i)$. 取 $l = \max(m(a_1), \cdots, m(a_k), a_1 + \cdots + a_k)$，我们有

$$f_{n_l}(i) = f_\infty(i), \quad 1 \le i \le a_1 + \cdots + a_k.$$

根据映射 f_{n_l} 的定义，这意味着对于 n_l 的划分 $[n_l] = S_{n_l,1} \sqcup \cdots \sqcup S_{n_l,c}$ 中，$S_{n_l,j}$ 里面含有一个长度为 k 的等差数列，矛盾。 □

1977 年，Furstenberg[12] 开创性地应用拓扑（遍历论）方法证明了 van der Waerden 定理的推广，Szemerédi 定理[13]，并进一步用该方法给出了 Szemeredi 定理的多维推广。Furstenberg 的方法被总结为“Furstenberg 对应原理”，即组合数论里面“关于整数集合的‘大子集’的结果”与拓扑动力系统里面“关于保测动力系统的‘大子集’的结果”之间的对应。下面我们陈述 van der Waerden 定理的对应的拓扑版本，并证明它跟上述数论版本的等价性。

[12]弗斯腾伯格（Hillel Fursterberg，1935-），美籍以色列数学家，沃尔夫奖 (2006/7 年) 和阿贝尔奖 (2020 年) 得主，主要贡献是“在群论、数论和组合学中开创性地使用概率和动力系统方法”。我们在第 1.2 节习题中已经看过他的对于素数无限的拓扑证明：该证明发表于 1955 年，当时他还是 Yeshiva 大学的一名本科生。

[13]该定理最早是 Erdös 和 Turán 于 1936 年提出的猜想，最终在 1975 年被 Szemerédi 证明：

Szemerédi 定理: 若 $\mathbb{N}$ 的子集 A 具有正密度，即

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, \cdots, n\}|}{n} > 0,$$

则对任意正整数 k，A 包含无限多个长度为 k 的算术级数。

定理 2.2.26.（van der Waerden 定理，拓扑动力系统版本）
设 X 是紧拓扑空间，$T: X \to X$ 是同胚，而 $\{V_1, \cdots, V_c\}$ 是 X 的一个开覆盖. 则 $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ 和开集 $V \in \{V_1, \cdots, V_c\}$ 使得

$$V \cap T^{-n}V \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}V \neq \emptyset.$$

♡

下面我们证明定理2.2.26与定理2.2.25是等价的。不难看出，定理2.2.25等价于如下的[14]

定理 2.2.27.（Van der Waerden 定理, 无限定性 $\mathbb{Z}$ 版本）
对于整数集的任意划分

$$\mathbb{Z} = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_c,$$

一定存在某个 S_j，使得对任意 $k \in \mathbb{N}$，S_j 都包含一个长度为 k 的等差数列。

♡

下面证明

【定理2.2.27$\Longrightarrow$ 定理2.2.26】

证明 取定一个点 $x_0 \in X$. 定义映射 $f: \mathbb{Z} \to [c]$ 如下：若 $T^n(x_0) \in V_i$ 且对于任意 $j < i$，都有 $T^n(x_0) \notin T_j$，则令

$$f(n) = i.$$

由定理2.2.27, 存在 j 使得 $S_j = f^{-1}(j)$ 包含长度为 k 的算术级数 $m, m+n, m+2n, \cdots, m+(k-1)n$，即 $f(m+in) = j, 0 \leq i \leq k-1$. 于是

$$T^{m+in}(x_0) \in V_j, \qquad 0 \leq i \leq k-1,$$

从而

$$T^m(x_0) \in V_j \cap T^{-n}V_j \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}V_j.$$

□

【定理2.2.26$\Longrightarrow$ 定理2.2.27】

证明 再次赋予 $[c]$ 离散拓扑. 由 Tychonoff 定理, 空间

$$\widetilde{X} = \prod_{\mathbb{Z}}[c] = \{f : \mathbb{Z} \to [c]\}$$

是紧空间. 注意到 $\mathbb{Z}$ 的任意 c-划分都对于 $\widetilde{X}$ 中的一个元素。

考虑 $\widetilde{X}$ 上的“右移”映射

$$T: \widetilde{X} \to \widetilde{X}, \qquad T(f)(n) = f(n-1).$$

则 T 是连续映射，因为我们有

$$T^{-1}(\pi_n^{-1}(i)) = \pi_{n-1}^{-1}(i),$$

而 $\{\pi_n^{-1}(i)\}$ 是 $\widetilde{X}$ 上的乘积拓扑的一个子基. 类似地可以验证“左移”映射 T^{-1} 也是连续的。所以 T 是同胚。

[14]定理2.2.25与定理2.2.27的等价性：显然，若定理2.2.25成立则定理2.2.27自动成立。反之，若定理2.2.25不成立，即存在 $\mathbb{N}$ 的一个划分，其中每个子集里都没有长度为 k 的等差数列，则不难构造 $\mathbb{Z}$ 的一个划分，其中每个子集都没有长度为 $2k+1$ 的等差数列。

设 $f \in \widetilde{X}$ 是与定理 2.2.27中的划分所对应的映射. 考虑 $\widetilde{X}$ 的闭子集

$$X = \overline{\{T^n f \mid n \in \mathbb{Z}\}} = \overline{\{\cdots, T^{-2}f, T^{-1}f, f, Tf, T^2 f, \cdots\}}.$$

由定义，X 是紧拓扑空间 $\widetilde{X}$ 中的一个闭集，从而也是紧的。注意到 $T(X)$，作为闭集在同胚映射下的像，是 $\widetilde{X}$ 的闭子集，而

$$T(X) \supset \{T^n f \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

于是我们得到 $T(X) \supset X$. 将 T 替换为 T^{-1}, 同理可得 $T^{-1}(X) \supset X$. 于是我们证明了

$$T(X) = X.$$

由推论 1.61 知 $T : X \to X$，作为同胚映射 $T : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ 在子空间 X 上的限制，是连续映射。同理 $T^{-1} : X \to X$ 连续，故 $T : X \to X$ 是同胚。

最后，对于每个 $i \in [c]$, 我们令

$$V_i = \{f \in \widetilde{X} \mid f(0) = i\} = \pi_0^{-1}(i).$$

则 V_i 在 $\widetilde{X}$ 中是开集，且构成 X 的开覆盖。由定理 2.2.26, $\forall k \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$ 和 $V_j \in \{V_i \mid 1 \le i \le c\}$ 使得

$$(V_j \cap T^{-n}V_j \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}V_j) \cap X \neq \emptyset.$$

由于 $V_j \cap T^{-n}V_j \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}V_j$ 在 $\widetilde{X}$ 中是开集，而 $X = \overline{\{T^{-n}f \mid n \in \mathbb{Z}\}}$. 所以存在 m 使得

$$T^{-m}f \in V_j \cap T^{-n}V_j \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n}V_j,$$

即

$$f \in T^m V_j \cap T^{m-n}V_j \cap \cdots \cap T^{m-(k-1)n}V_j.$$

因此

$$f(m) = f(m-n) = \cdots = f(m-(k-1)n) = j.$$

换言之,S_j 包含长为 k 的等差数列 $m, m-n, \cdots, m-(k-1)n$. □

¶ 应用 3: Banach-Alaoglu 定理

第三个应用是泛函分析。回想一下，**赋范向量空间**是指向量空间 X 同时被赋予了范数结构，即函数 $\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$ 使得对任意 $x, y \in X$ 和任意 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有

- $\|x\| \ge 0$, 且$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

在任意赋范向量空间 $(X, \|\cdot\|)$ 上, 容易验证 $d(x, y) := \|x - y\|$ 定义了一个度量结构。所以我们总可以赋予 X 度量拓扑，并讨论连续映射。特别地，我们记

$$X^* := \{l : X \to \mathbb{C} \mid l \text{ 是连续的（复）线性映射}\}.$$

空间 X^* 也是线性空间，并且在 X^* 上面我们可以定义范数

$$\|l\| := \sup_{\|x\|=1} |l(x)|.$$

新的赋范向量空间 $(X^*, \|\cdot\|)$ 称为 $(X, \|\cdot\|)$ 的 **对偶空间**. 它又是一个度量空间，所以我们可以讨论像闭单位球这样的概念

$$\overline{B^*} := \{l \in X^* \mid \|l\| \leq 1\}.$$

不幸的是，在大多数应用中，赋范向量空间及其对偶空间是无限维的，因此闭单位球相对于通常的度量拓扑不是紧的。

当然，不紧的原因是度量拓扑太强，即包含太多的开集。在例 1.97 中，我们分别在 X 和 X^* 上引入了两种更弱的拓扑：X 上的弱拓扑和 X^* 上的弱-$*$ 拓扑。X 上的弱拓扑是使所有线性泛函 $l \in X^*$ 连续的最弱拓扑，而 X^* 上的弱 $*$ 拓扑是使所有赋值映射 ev_x 连续的最弱拓扑。从定义很容易看出，如果我们将 X^* 视为 $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ 的子集，则弱-$*$ 拓扑是逐点收敛拓扑。由于 $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ 上的逐点收敛拓扑可以等同于 $\mathbb{C}^X$ 上的乘积拓扑，因此不难猜到闭单元球 $\overline{B^*}$ 在弱-$*$ 拓扑下是紧的：

定理 2.2.28.（Banach-Alaoglu 定理）

设 X 是赋范向量空间，则对偶空间 X^* 中的闭单位球 $\overline{B^*}$ 在弱-$*$ 拓扑下是紧的。♡

证明 基本想法是将 X^* 中的闭单位球 $\overline{B^*}$ 与

$$Z = \prod_{x \in X} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \|x\|\} \subset \mathbb{C}^X,$$

中的闭子集等同起来，这里我们赋 Z 乘积拓扑，所以 Z 是紧空间。

如同我们上面所解释的，我们可以视 X^* 为 $\mathcal{M}(X, \mathbb{C})$ 的子空间，因此只要 $l \in X^*$ 满足 $\|l\| \leq 1$，就可以等同于 Z 中的一个元素. 反之，Z 中的一个元素 f 属于 X^* 中的闭单位球 $\overline{B^*}$ 当且仅当它是线性的，即对任意 $x, y \in X$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，都有

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad 且 \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

换言之，Z 中的元素 $f \in \overline{B^*}$ 当且仅当它属于集合

$$\begin{aligned} D &= \{f \in Z \mid \mathrm{ev}_{x+y}(f) = \mathrm{ev}_x(f) + \mathrm{ev}_y(f), \quad \mathrm{ev}_{\alpha x}(f) = \alpha \mathrm{ev}_x(f), \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}\} \\ &= \bigcap_{x,y,\alpha} (\mathrm{ev}_{x+y} - \mathrm{ev}_x - \mathrm{ev}_y)^{-1}(0) \cap (\mathrm{ev}_{\alpha x} - \alpha \mathrm{ev}_x)^{-1}(0). \end{aligned}$$

由赋值映射的连续性，D 是 Z 中的一个闭子集。由于 Z 是紧的，所以 D 也是紧的。可以详细验证上面的等同是 $(\overline{B^*}, \mathscr{T}_{\text{weak}*})$ 和 $(D, \mathscr{T}_{product})$ 之间的同胚。所以 $\overline{B^*}$ 在弱-$*$ 拓扑下是紧的。 □

2.3 度量空间中的紧性

2.3.1 度量空间的拓扑与非拓扑性质

¶ 度量空间的一些拓扑性质

设 (X,d) 为度量空间，其上的度量拓扑 $\mathscr{T}_d$ 由基

$$\mathcal{B}=\{B(x,r)\mid x\in X,r\in\mathbb{R}_{>0}\}.$$

生成。与一般拓扑空间相比，度量空间有许多很好的性质:

(a) 任意度量空间是 **第一可数的**, 因为对任意 $x\in X$, 都存在可数邻域基

$$\mathcal{B}_x=\{B(x,r)\mid r\in\mathbb{Q}_{>0}\}.$$

由此我们得到（参见第 1.5 节及其习题）

- $F\subset X$ 是闭集当且仅当 F 包含其所有的序列极限点，
- 对于任意拓扑空间 Y，映射 $f:X\to Y$ 是连续的当且仅当 f 是序列连续的.

(b) 任意度量空间是 **Hausdorff 的**, 因为对任意 $x\neq y\in X$, 取 $\delta=d(x,y)/2>0$, 则

$$B(x,\delta)\cap B(y,\delta)=\emptyset.$$

由此我们得到（参见第 2.1 节）

- 度量空间中的紧集都是闭集。特别地，任意单点集 $\{x\}$ 是闭集。
- 度量空间中的任意收敛点列有唯一的极限。

(c) 由第一可数性以及 Hausdorff 性质可得

命题 2.3.1.（度量空间中列紧集是闭集）

度量空间 X 中的任何列紧集都是闭集。

证明 设 $F\subset X$ 是一个列紧集. 则对 F 中的任意收敛点列 x_n，由 Hausdorff 性质知 X 中由唯一的 x_0 使得 $x_n\to x_0$. 由列紧性知 $x_0\in F$. 于是 F 包含其所有序列极限点。故 F 是闭集。 □

注意仅由第一可数性不能推出列紧集是闭集，比如 $(X,\mathscr{T}_{trivial})$ 是第一可数的且任意子集都是列紧集，但不必是闭集。

(d) 事实上，在度量空间中，我们不仅可以通过不相交的开集“分离”不同的点，而且我们还可以通过不相交的开集“分离”不相交的闭集:

命题 2.3.2.（度量空间的正规性）

对于度量空间 X 中的闭集 A,B，若 $A\cap B=\emptyset$，则存在 X 中的开集 U,V 使得 $A\subset U,B\subset V$ 且 $U\cap V=\emptyset$.

证明 根据第 1.1 节习题中所给出度量空间中的 Urysohn 引理，存在连续函数 $f:X\to[0,1]$ 满足在 A 上 $f=0$ 而在 B 上 $f=1$。因此，只要取 $U=f^{-1}((-\infty,1/3))$ 和 $V=f^{-1}((2/3,+\infty))$ 即可。 □

这样用不交开集分离不交闭集的拓扑性质将被称为 **正规性** ，后文将会对此进行更

详细的研究。

注 2.3.3. 在本课程中，我们还研究其他拓扑性质，例如紧性，第二可数性，连通性等。这些性质中大多数仅被一些度量空间满足，而不是所有拓扑空间的通有性质。(但是仿紧性是所有度量空间都满足的)

¶ 度量空间的度量方面：有界性

我们在第 1.1 节定义了度量空间 (X, d) 中子集的 **直径**（以及 **有界性**）的概念：

$$diam(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\} \quad (\leq +\infty).$$

并说明了直径和有界性不是拓扑概念：如果将一个度量更改为另一个与之拓扑等价的度量，则直径可能会发生变化，有界集可能会变为无界集。然而，很容易看出，

命题 2.3.4

(X, d) 中的任何紧/列紧子集都是有界闭的。

证明 我们已经证明了度量空间中紧集/列紧集是闭集。另一方面，如果 $A \subset X$ 是无界集，则取定任意一点 $x_0 \in X$，我们有

- $\{B(x_0, n)\}_n$ 是 A 的一个开覆盖，但没有有限子覆盖，
- A 中存在一列元素 x_n 满足 $d(x_n, x_0) \to \infty$，于是该序列没有收敛子列。

故任何无界集既不是紧的，也不是列紧的。 □

反之，在度量空间中很容易找到非紧的有界闭子集：

例 2.3.5.

(1) $(\mathbb{N}, d_{\text{discrete}})$ 在 $(\mathbb{N}, d_{\text{discrete}})$ 中是有界闭的，但不是紧的.

(2) $(\mathbb{R}, \frac{d}{d+1})$ 在 $(\mathbb{R}, \frac{d}{d+1})$ 中是有界闭的，但不是紧的.

(3) $((0, 1], d_{Euclidian})$ 在 $((0, +\infty), d_{Euclidian})$ 中是有界闭的，但不是紧的.

因此，“有界闭”不是刻画度量空间紧性的等价条件。

¶ 度量空间的度量方面：完全有界性

在仔细研究了上面例子 2.3.5 中的 (1) 和 (2) 之后，你会发现它们是“坏”的有界空间：我们可以用少量半径较大的度量球（比如一个半径为 2 的球）来覆盖它们；但是我们不能用有限多个半径较小的度量球（比如半径为 $\frac{1}{2}$ 的球）来覆盖它们。例如，在 (2) 中，每个区间 $(n, n+1)$ 相对于度量 $d/(d+1)$ 的长度为 $\frac{1}{2}$。换句话说，当你用长的尺子测量这些“坏”空间时，它们是有界的，但当你用短的尺子测量它们时，它们是无界的！

定义 2.3.6.（完全有界性）

设 (X, d) 是度量空间。如果对任意 $\varepsilon > 0$，都存在有限多个半径为 ε 的球覆盖 X，则我们称 X 是 **完全有界的**。

显然，任何完全有界的空间都是有界的，但反之则不然。

注 2.3.7. 根据定义，度量空间 (X,d) 是完全有界的当且仅当对任意 $\varepsilon>0$, 存在有限集 $\{x_1,\cdots,x_{n(\varepsilon)}\}$ 满足

$$\forall y\in X,\ \text{存在}\, 1\le i\le n(\varepsilon)\ \text{使得} d(x_i,y)<\varepsilon.$$

定义 2.3.8.（ε-网）

设 N 是度量空间 (X,d) 中的一个点集。如果它满足

$$\forall y\in X,\ \text{存在} x\in N\ \text{使得} d(x,y)<\varepsilon,$$

则我们称 N 为一个 ε-**网**。如果一个 ε-网是有限集，则我们称之为一个 **有限 ε-网**。♣

所以根据定义，我们有

命题 2.3.9.（完全有界 $\iff$ 有限 ε-网）

一个度量空间 X 是完全有界的当且仅当对于任意 $\varepsilon>0$，X 中都存在有限 ε-网。♠

事实上，对于度量空间，紧性蕴含完全有界性：

命题 2.3.10.（紧性 $\Longrightarrow$ 完全有界性）

如果度量空间 (X,d) 是紧的/列紧的，那么它是完全有界的。♠

证明 若度量空间 (X,d) 是紧的，那么它必然也是完全有界的，因为对于任意 $\varepsilon>0$，集族 $\{B(x,\varepsilon)\mid x\in X\}$ 是 X 的开覆盖，必有一个有限的子覆盖。

若 (X,d) 是列紧的，反设存在 $\varepsilon>0$ 使得 X 不能被有限多个 ε-球覆盖。任取 $x_1\in X$. 由于 $X\setminus B(x_1,\varepsilon)\neq\emptyset$, 可以取到 $x_2\in X\setminus B(x_1,\varepsilon)$. 归纳地我们可以找到 $x_1,x_2,\cdots$ 使得

$$x_n\in X\setminus\bigcup_{i=1}^{n-1}B(x_i,\varepsilon),\quad \forall n.$$

于是我们得到一个点列 $\{x_n\}$，满足

$$d(x_n,x_m)>\varepsilon,\quad \forall n\neq m.$$

所以 $\{x_n\}$ 没有收敛子列。矛盾。 □

¶ 度量空间的度量方面: Lebesgue 数引理

另一个非常有用的度量性质是所谓的 Lebesgue 数引理。对于欧氏空间中的紧集，我们在数学分析中已经学过该引理。现在我们将其推广到度量空间：

命题 2.3.11.（Lebesgue 数引理）

如果 (X,d) 是列紧的，那么对于 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$，存在 $\delta>0$（取决于 $\mathscr{U}$）[a]，使得对于任意满足 $diam(A)<\delta$ 的子集 $A\subset X$，都存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $A\subset U$.

[a]这样的正实数 δ 被称为覆盖 $\mathscr{U}$ 的 **Lebesgue 数**.

♠

证明 反证法。设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖，且对于任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $C_n\subset X$ 满足 $diam(C_n)<\frac{1}{n}$ 但 C_n 不包含在任何 $U\in\mathscr{U}$ 中. 我们在每个 C_n 中取一个点 x_n，从而得到 X 中的一个点

列 $\{x_n\}$. 由于 (X,d) 是列紧的，存在一个子列 $x_{n_k} \to x_0 \in X$. 又因为 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖，所以可以找到 $U \in \mathscr{U}$ 使得 $x_0 \in U$。现在我们选取 $\varepsilon_0 > 0$ 使得 $B(x_0, \varepsilon_0) \subset U$，然后选取 n_k 使得

$$\frac{1}{n_k} < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{且} \quad d(x_{n_k}, x_0) < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

由此可得

$$C_{n_k} \subset B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(x_0, \varepsilon_0) \subset U,$$

矛盾！ □

注 2.3.12. 设 $\gamma : [0,1] \to X$ 是一个连续映射，$X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ 是 X 的一个开覆盖。那么 $\gamma^{-1}(U_\alpha)$ 是 $[0,1]$ 的开覆盖。根据 Lebesgue 数引理，存在 $\delta > 0$ 使得每个区间 $[t, t+\delta]$ 都包含在某个 $\gamma^{-1}(U_\alpha)$ 中。这个简单的事实将在第三章研究基本群的性质时发挥重要作用。

¶ 度量空间的度量方面：完备性

度量空间中，另一个非常有用的度量但非拓扑的概念是 **完备性**。我们需要定义

定义 2.3.13.（Cauchy 列）

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,d) 中的序列. 如果对于任何 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$ 使得

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m > N,$$

则我们称 $\{x_n\}$ 为一个 **Cauchy 列**。 ♣

就像欧氏空间的情况一样，用三角不等式很容易证明

引理 2.3.14.（收敛列都是 Cauchy 列）

度量空间 (X,d) 中的任意收敛列 (x_n) 都是 (X,d) 中的 Cauchy 列. ♡

但是，Cauchy 列可能不收敛：例如在 $(0,1)$ 中 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ 是一个 Cauchy 列。

定义 2.3.15.（完备性）

如果度量空间 (X,d) 中的任意 Cauchy 列都是收敛的，则我们称 (X,d) 是**完备的**。 ♣

例 2.3.16.

(1) $\mathbb{R}$ 和 $[0,1]$ 关于 $d_{\text{Euclidean}}$ 是完备的，而 $\mathbb{Q}$ 和 $(0,1)$ 不是完备的。例 2.3.5 中的 (1) 和 (2) 是完备的，而 (3) 则不是。

(2) 泛函分析分析中那些最重要的度量空间，包括 Banach 空间、Hilbert 空间、Frechét 空间等，都是完备的，因为完备性是发展分析理论的基石。

(3) 考虑从集合 X 到完备度量空间 (Y, d_Y) 的全体有界映射构成的空间

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f(X) \text{ 在 } Y \text{ 中是有界的.}\}$$

赋予 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上确界度量

$$d_\infty(f,g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\},$$

则 $(\mathcal{B}(X,Y),d_\infty(f,g))$ 是完备度量空间。细节留作练习。

(4) 对于任意度量空间 (X,d)，考虑 X 中所有 Cauchy 列组成的空间

$$\mathcal{C}=\{(a_n)\mid(a_n)\text{是}(X,d)\text{中的 Cauchy 列}\}.$$

在 $\mathcal{C}$ 定义一个伪度量

$$d_{\mathcal{C}}((a_n),(b_n)):=\lim_{n\to\infty}d(a_n,b_n).$$

根据第 1.1 节习题，伪度量空间 $(\mathcal{C},d_{\mathcal{C}})$ 模去等价关系

$$(a_n)\sim(b_n)\iff d_{\mathcal{C}}((a_n),(b_n))=0$$

后得到一个度量空间。可以验证：该空间是完备度量空间。

由于度量空间中的闭集都包含其所有序列极限点，而子度量空间中的任意 Cauchy 列自动是原空间中的 Cauchy 列，我们得出结论

命题 2.3.17.（完备度量空间的闭子集完备）

如果度量空间 (X,d) 是完备的，$F\subset X$ 是闭集，则子度量空间 (F,d) 也是完备的。♠

注 2.3.18. 若 (X,d) 是完备度量空间，A 是 X 的子集，则 A 中的任意 Cauchy 列在 X 中有极限。上述性质告诉我们，可以把 X 缩小到 $\overline{A}$，而同样性质依然成立。易见 $\overline{A}$ 是 X 中“最小的”满足该性质的子空间，因为它是 X 子空间中最小的包含 A 是完备度量空间. 于是我们定义

定义 2.3.19.（完备化）

设 (X,d) 是度量空间，$(\widehat{X},\hat{d})$ 是完备度量空间。如果存在等距嵌入 $f:X\to\widehat{X}$ 使得 $\overline{f(X)}=\widehat{X}$，则我们称 $(\widehat{X},\hat{d})$ 是 (X,d) 的一个 **完备化**. ♣

可以证明，任意度量空间都有（在等距同构意义下）唯一的完备化：

定理 2.3.20.（任意度量空间都有唯一的完备化）

任意度量空间 (X,d) 都有完备化 $(\widehat{X},\hat{d})$，且在等距同构的意义下完备化是唯一的。♡

事实上，例2.3.16的 (3) 和 (4) 给了我们两种不同的构造给定度量空间完备化的方法：我们可以把任意度量空间 (X,d_X) 都等距嵌入到完备度量空间 $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}),d_\infty)$，或者等距嵌入到由 X 中 Cauchy 列组成的完备度量空间中。

我们将看到，紧度量空间都是完备的。我们先证明

命题 2.3.21.（列紧度量空间完备）

若度量空间 (X,d) 是列紧的，则它是完备的。♠

证明 设 (X,d) 是一个列紧度量空间。给定 X 中的任意 Cauchy 列 $\{x_n\}$，由列紧性，可以找到 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_k}\}$。不妨设它收敛到 $x_0\in X$. 再根据 Cauchy 列的定义和三角不等式，易证 $x_n\to x_0$。 □

¶ 完备 = 绝对闭

我们知道，完备性是度量概念，但不是拓扑概念，因为 $(0,1)$ 不完备而 $\mathbb{R}$ 完备。但是，我们依然可以从拓扑的角度来理解完备性。我们仔细审视一下例 2.3.5 中的 (3)。度量空间 $((0,1],d)$ 是完全有界的，$(0,1]$ 在 $(0,+\infty)$ 中是闭集。但是，如果我们将 $(0,1]$ 等距嵌入到另一个度量空间，比如 $\mathbb{R}$, 那么 $(0,1]$ 不再是闭集。

定义 2.3.22.（绝对闭）

我们称度量空间 (X,d_0) 是 **绝对闭的**，如果它满足以下更强的闭性条件：

$$\begin{array}{l}\text{对于任意度量空间}(Y,d),\text{若}f:(X,d_0)\to(Y,d)\text{ 是一个}\\ \text{等距嵌入, 则}f(X)\text{ 在}Y\text{ 中是闭集.}\end{array} \quad \text{(AC)}$$

♣

事实上，绝对闭并不是一个新概念：

命题 2.3.23.（绝对闭 = 完备）

一个度量空间是绝对闭的当且仅当它是完备。♠

证明 如果 (X,d_0) 满足绝对闭条件 (AC)，并且 $\{x_n\}$ 是 (X,d) 中的 Cauchy 列。则通过将 (X,d_0) 嵌入到其完备化 $(\widehat{X},\hat{d})$ 中并将像点与原像 $x\in X$ 等同起来，我们得出 $\{x_n\}$ 是 $(\widehat{X},\hat{d})$ 中的一个 Cauchy 列。由于 $(\widehat{X},\hat{d})$ 是完备的，x_n 收敛到唯一的 $\tilde{x}\in(\widehat{X},\hat{d})$。但 (X,d) 在 $(\widehat{X},\hat{d})$ 中是闭的，故 $\tilde{x}\in X$. 所以 (X,d) 是完备的。

反之假设 (X,d) 是完备的，并且 (X,d) 可以等距嵌入到 (Y,d_Y)。则作为 (Y,d_Y) 的子集，X 包含其所有序列极限点，因此在 (Y,d_Y) 中是闭的。□

所以我们对度量空间的完备性有了新的解释：

$$\text{“完备”}=\text{“作为子空间总是闭的”}$$

注意到

- 任意等距嵌入一定是连续的映射，
- 在连续映射下，紧/列紧集的像是紧/列紧的，
- 度量空间中则紧/列紧集都是闭集。

因此我们得出结论：任意紧/列紧的度量空间都是绝对闭的，即完备的。于是我们（再次）证明了

命题 2.3.24.（紧/列紧度量空间完备）

若度量空间 (X,d) 是紧的或列紧的，则它是完备的。♠

2.3.2 度量空间中各种紧性的等价性

¶ 度量空间中极限点紧 $\Longleftrightarrow$ 列紧

我们已经看到，对于一般拓扑空间而言，

$$\text{紧}\Longrightarrow\text{极限点紧}\Longleftarrow\text{列紧}$$

对于度量空间，我们的第一个观察是

命题 2.3.25. (度量空间：极限点紧 $\Longleftrightarrow$ 列紧)

度量空间 (X, d) 是极限点紧的当且仅当它是列紧的。♠

证明 只需证明若 (X, d) 是极限点紧，则它是列紧的。设 $\{x_n\}$ 是 (X, d) 中的任意点列。如果集合 $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是有限集，那么由鸽笼原理，$\{x_n\}$ 有一个常值子列

$$x_{n_1} = x_{n_2} = \cdots = x_0,$$

这是我们正在需要的收敛子列。

现在假设集合 $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 是一个无限集，那么由极限点紧性，$A' \neq \emptyset$. 取任意 $x_0 \in A'$。根据定义，对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 我们有

$$B(x_0, 1/k) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

事实上每个 $B(x_0, 1/k) \cap (A \setminus \{x_0\})$ 都是一个无限集。否则，如果存在 k 使得

$$B(x_0, 1/k) \cap (A \setminus \{x_0\}) = \{x_{m_1}, \cdots, x_{m_k}\}$$

则我们取 N 足够大使得 $1/N < \min(d(x_0, x_{m_k}))$。那么

$$B(x_0, 1/N) \cap (A \setminus \{x_0\}) = \emptyset,$$

矛盾。所以我们可以找到 $n_1 < n_2 < \cdots$ 使得 $x_{n_k} \in B(x_0, 1/k)$。显然子列 $x_{n_k} \to x_0$. □

在证明中，我们实际上只使用了度量空间的第一可数性和 Hausdorff 性质。[用在哪里？找出来！] 稍微修改一下上面的证明，可以得到（留作习题）

命题 2.3.26. (T2+A1: 极限点紧 $\Longleftrightarrow$ 列紧)

如果拓扑空间 X 是 Hausdorff 并且第一可数的，那么在 X 中的子集是极限点紧的当且仅当它是列紧的。♠

¶ 列紧 $\Longleftrightarrow$ "完全有界且绝对闭"

现在我们给出"在 $\mathbb{R}^m$ 中紧 $\Longleftrightarrow$ 有界闭"的正确推广：对于一般的度量空间，我们需要将"闭"替换为"绝对闭"并将"有界"替换为"完全有界"，即

命题 2.3.27. 度量空间：列紧 $\Longleftrightarrow$ "完全有界且绝对闭"

度量空间 (X, d) 是列紧的当且仅当它是完备的且完全有界的。♠

证明 我们已经证明，列紧的度量空间都是完备且完全有界的。现在假设 (X, d) 是完备且完全有界的，设 $\{x_n\} \subset X$ 是一个点列。因为 X 是完全有界的，我们可以用有限个半径为 1 的开球覆盖 X。那么在这个有限覆盖中存在一个球 B_1 使得指标集

$$J_1 := \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B_1\}$$

是一个无限集。接着我们用有限多个半径为 $\frac{1}{2}$ 的开球覆盖 X。在这个新的有限覆盖中再次存在一个球 B_2，使得指标集

$$J_2 := \{n \in J_1 \mid x_n \in B_2\}$$

是一个无限集。继续这个构造，我们得到一个递降的指标序列

$$\mathbb{N} \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots,$$

其中每个 J_k 是一个无限集，并且

$$i, j \in J_k \implies d(x_i, x_j) < \frac{2}{k}.$$

最后我们取 $n_i \in J_i$ 使得 $n_1 < n_2 < \cdots$，则 $\{x_{n_i}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个子列，且是一个 Cauchy 列。由 (X, d) 的完备性，$\{x_{n_i}\}$ 收敛到某个点 $x_0 \in X$. 所以 (X, d) 是列紧的。 □

¶ 度量空间中紧性的不同刻画的等价性

最后我们将上面所有的“拼图小块”凑在一起，得到：

定理 2.3.28.（度量空间中各种紧性的等价性）

在度量空间 (X, d) 中，以下“紧性”都是等价的：

(1) A 是紧的。

(2) A 是列紧的。

(3) A 是极限点紧的。

(4) A 是完全有界且完备的。

(5) A 是可数紧的。

♡

证明 我们已经看到 (1) $\implies$ (3) $\iff$ (2) $\iff$ (4). 由第 2.1 节的习题，(2) $\implies$ (5) $\implies$ (3).

下面证明在度量空间中 (2) $\implies$ (1) 。假设 $A \subset (X, d)$ 是列紧的，并且设 $\mathscr{U}$ 是 A 的任意开覆盖。一方面，根据 Lebesgue 数引理，存在一个 Lebesgue 数 $\delta > 0$，使得任何半径小于 δ 的集合都可以被 $\mathscr{U}$ 中的开集所覆盖。另一方面，根据命题 2.3.10，A 是完全有界的，因此可以被有限多个 $\delta/2$-球覆盖。由此可见 $\mathscr{U}$ 有一个有限的子覆盖。 □

注 2.3.29. 我们将在后文中应用 Tietz 延拓定理给出度量空间中子集 A 的紧性的第 6 个等价刻画：（读者可以试试给出这个结果的直接证明）

(6) A 是伪紧的，即任意连续映射 $f: A \to \mathbb{R}$ 是有界的。

于是，对于度量空间而言，第 2.1 节开头的表格中列出的各种紧性都是等价的，且等价于“完全有界且一致闭”。

2.4 映射空间的拓扑

2.4.1 一致收敛拓扑

¶ 回顾：$\mathcal{M}(X,Y)$ 上已知的三种拓扑

对于任意集合 X 以及任意拓扑空间 Y，我们考虑所有从 X 到 Y 的映射构成的空间

$$\mathcal{M}(X,Y)=\{f: X\to Y\}.$$

作为集合，我们在 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上可以定义离散拓扑，平凡拓扑，余有限/余可数拓扑等。下面我们研究跟 $\mathcal{M}(X,Y)$ 作为"映射的集合"相关的拓扑。首先，作为映射的集合，我们有 $\mathcal{M}(X,Y)=Y^X$，于是由乘积结构我们得到该空间上的两种拓扑：

(i) 乘积拓扑，即由子基

$$\mathcal{S}_{product}=\left\{\pi_x^{-1}\left(B^Y(y_x,r_x)\right)\ \middle|\ \forall x\in X,\forall y_x\in Y,\forall r_x>0\right\}$$

生成的拓扑。我们在注 1.88 中已经看到，该拓扑即 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的逐点收敛拓扑.

(ii) 箱拓扑，即由拓扑基

$$\mathcal{B}_{box}=\left\{\prod_{x\in X}\left(B^Y(y_x,r_x)\right)\ \middle|\ \forall y_x\in Y,\forall r_x>0\right\}$$

生成的拓扑。我们在注 1.93 中已经看到该拓扑在研究连续映射时并不方便。

当 Y 是度量空间时, Y 上的度量 d_Y 在 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上诱导了一个度量（见第 1.1 节习题）[15]

$$d_u(f,g):=\sup_{x\in X}\frac{d_Y\big(f(x),g(x)\big)}{1+d_Y\big(f(x),g(x)\big)},$$

且 f_n 在 X 上一致收敛于 f 当且仅当 f_n 在 $(\mathcal{M}(X,Y),d_u)$ 中度量收敛于 f. 我们定义

定义 2.4.1.（一致度量/拓扑）

我们称 d_u 为 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的 **一致度量**，而把由 d_u 诱导的度量拓扑 $\mathcal{T}_{u.c.}$ 称为 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的 **一致收敛拓扑**。 ♣

于是对于度量空间 (Y,d)，映射空间 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上有第三种自然的拓扑：

(iii) 一致收敛拓扑，即由度量 d_u 诱导的度量拓扑。

注 2.4.2. (1) 类似于第 1.4 节习题，可以证明一致拓扑弱于箱拓扑，但强于乘积拓扑，且对于任何无限集 X 和"非平凡的" Y，这三个拓扑是两两不同的。

(2) 不难验证，一致度量 d_u 强等价于如下度量：

$$\bar{d}(f,g):=\sup_{x\in X}\min\{d_Y(f(x),g(x)),1\}.$$

(3) 另外，类似于第 2.3 节习题中 $\mathcal{B}(X,Y)$ 的完备性证明，我们有(留作练习)

命题 2.4.3.（一致度量的完备性）

若 Y 是完备度量空间，则 d_u 是 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的一个完备度量。 ♠

[15]注意，要为 $\mathcal{M}(X,Y)$ 中的映射列定义"一致收敛"，我们仅需要 Y 上有度量结构，X 上无需任何结构。

¶ $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的一致拓扑

现在假设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，而 Y 是一个度量空间，则我们可以讨论 $\mathcal{M}(X,Y)$ 中映射的连续性。特别地，我们可以研究连续映射空间，

$$\mathcal{C}(X,Y) := \{f \in \mathcal{M}(X,Y) \mid f \text{ 是连续的}\}.$$

一般来说 $\mathcal{C}(X,Y)$ 不是 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{product})$ 中的闭集（见例2.4.7）。但是在第 1.1 节习题 4(b) 中，我们证明了连续映射列的一致极限是连续的。于是我们得到

命题 2.4.4.（连续映射空间在一致拓扑下的闭性）

$\mathcal{C}(X,Y)$ 是 $(\mathcal{M}(X,Y),d_u)$ 的闭子集。 ♠

作为推论，

推论 2.4.5.（连续映射空间一致度量的完备性）

如果 X 是拓扑空间而 Y 是完备度量空间，则 $(\mathcal{C}(X,Y),d_u)$ 是完备度量空间。 ♡

注 2.4.6. 若 X 是紧拓扑空间，则 $\mathcal{C}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$。在 $\mathcal{B}(X,Y)$ 上，我们有度量

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X} |f(x)-g(x)|.$$

容易证明 d_u 和 d_∞ 在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上诱导了相同的拓扑. 特别地，在 d_u 下 $f_n \to f$ 当且仅当在 d_∞ 下 $f_n \to f$. 故如果 X 是紧拓扑空间，在考虑 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的一致拓扑时，我们将使用 d_∞ 而不是 d_u，以使计算更简单一些.

¶ $\mathcal{C}(X,Y)$ 上三种拓扑的缺点

我们想研究 $\mathcal{C}(X,Y)$ 中函数列的收敛性。然而，以上三种拓扑皆不如人意：

例 2.4.7. 考虑 $X=Y=\mathbb{R}$ 的情况，则

(1) 考虑乘积拓扑即逐点收敛拓扑：连续函数列 $f_n(x)=e^{-nx^2}$ 在 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 下收敛到一个坏的极限函数，即不连续函数 $f_0(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$.

根本原因: 逐点收敛拓扑太弱以至于不能保证收敛极限的连续性。

(2) 考虑一致收敛拓扑和箱拓扑：连续函数列 $f_n(x)=x^2/n$ 在 $\mathscr{T}_{u.c.}$ 和 $\mathscr{T}_{Box}$ 下不收敛，虽然它确实在逐点意义下收敛到一个很好的连续函数 $f_0(x)\equiv 0$.

根本原因: 一致拓扑 (和箱拓扑) 太强以至于序列难以收敛。

我们希望在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上找到一个合理的拓扑，使得“坏收敛列”在这个拓扑中不再收敛，而“好收敛列”仍然收敛。根据上面的分析，我们需要 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的一个新拓扑结构，它比 $\mathscr{T}_{u.c.}$ 要弱，但是收敛的连续函数列的极限在这个新拓扑下仍然是连续的。

> 观察 连续性是“局部”的（强于“点态”而弱于“整体”）。逐点收敛是点态的，太弱。一致收敛是整体的，太强。应该采用“局部的”一致收敛。

例如，虽然 $f_n(x)=x^2/n$ 在 $\mathbb{R}$ 上并不一致收敛于 $f(x)=0$，我们却有局部一致收敛性：

$$\text{对于任意}[a,b]\subset\mathbb{R},\ f_n(x)=x^2/n\text{在 }[a,b]\text{ 上}\underline{\text{一致收敛}}\text{ 于}f(x)=0.$$

2.4.2 紧收敛拓扑与紧开拓扑

¶ 紧收敛拓扑

设 X 是一个拓扑空间，(Y,d) 是一个度量空间。受上面最后一个例子的启发，我们可以尝试在 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上寻找一个描述"在每个紧子集上一致收敛"的拓扑。这不难找到。我们可以类比一下 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 和 $\mathcal{T}_{u.c.}$ 的构造：

- 描述"在 X 上一致收敛"的拓扑 $\mathscr{T}_{u.c.}$，其拓扑基的组成元素为度量球，即
$$B(f;X;\varepsilon)=\{g\in\mathcal{M}(X,Y)\mid \sup_{x\in K} d(f(x),g(x))<\varepsilon\}.$$
- 描述"在 X 上逐点收敛"，即"在 X 的任意有限点集里一致收敛"的拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$，其拓扑基的组成元素为
$$B(f;x_1,\cdots,x_m;\varepsilon)=\{g\in\mathcal{M}(X,Y)\mid \sup_{1\le i\le m} d(f(x_i),g(x_i))<\varepsilon\}.$$

于是对于任意紧集 $K\subset X$ 和任意 $\varepsilon>0$, 我们自然引入集合
$$B(f;K,\varepsilon)=\{g\in\mathcal{M}(X,Y)\mid \sup_{x\in K} d(f(x),g(x))<\varepsilon\}.$$
我们有

引理 2.4.8.（紧收敛拓扑的基）

设 X 为拓扑空间，Y 为度量空间，则集族
$$\mathcal{B}_{c.c.}=\{B(f;K,\varepsilon)\mid f\in\mathcal{M}(X,Y),K\text{是}X\text{ 的紧子集},\varepsilon>0\}$$
是 $\mathcal{M}(X,Y)$ 的一个拓扑基，且它所生成的拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 满足以下性质：
$$\boxed{f_n\text{ 在 }X\text{ 的所有紧子集上一致收敛于 }f\Longleftrightarrow f_n\text{ 关于 }\mathscr{T}_{c.c.}\text{ 收敛于 }f.}$$
♡

证明 集族 $\mathcal{B}_{c.c.}$ 是 $\mathcal{M}(X,Y)$ 的一个拓扑基，因为对于任意 $g\in B(f_1;K_1,\varepsilon_1)\cap B(f_2;K_2,\varepsilon_2)$，如果我们取
$$\varepsilon_0=\min(\varepsilon_1-\sup_{x\in K_1} d(f_1(x),g(x)),\ \varepsilon_2-\sup_{x\in K_2} d(f_2(x),g(x))),$$
则有
$$B(g;K_1\cup K_2,\varepsilon_0)\subset B(f_1;K_1,\varepsilon_1)\cap B(f_2;K_2,\varepsilon_2).$$

拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 满足上面所述的性质，因为
$$\begin{aligned}&f_n\text{ 在每个紧子集}K\subset X\text{ 上一致收敛于}f\\ \Longleftrightarrow&\forall\varepsilon>0,\forall\text{ 紧集}K\subset X,\exists N\text{ 使得}\forall n>N,\text{ 都有 }\sup_{x\in K} d(f_n(x),f(x))<\varepsilon\\ \Longleftrightarrow&\forall\varepsilon>0,\forall\text{ 紧集}K\subset X,\exists N\text{ 使得}\forall n>N,\text{ 都有 }f_n\in B(f;K,\varepsilon)\\ \Longleftrightarrow&f_n\text{ 关于}(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{c.c.})\text{收敛于}f.\end{aligned}$$
□

定义 2.4.9.（紧收敛拓扑）

我们称由拓扑基 $\mathcal{B}_{c.c.}$ 生成的拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 为 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的 **紧收敛拓扑**。♣

根据定义，在 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上我们总是有

$$\mathscr{T}_{product} = \mathscr{T}_{p.c.} \subset \mathscr{T}_{c.c.} \subset \mathscr{T}_{u.c.}.$$

如果 X 是紧的，则 $\mathscr{T}_{c.c.} = \mathscr{T}_{u.c.}$.

对于任意子集 $A \subset X$，又定义易知限制映射

$$r_A : \mathcal{M}(X,Y) \to \mathcal{M}(A,Y), \quad f \mapsto f|_A$$

关于 $\mathscr{T}_{p.c.}, \mathscr{T}_{c.c.}, \mathscr{T}_{u.c.}$ 都连续。由此可得

命题 2.4.10.（“限制”的连续性）

限制映射

$$r_A : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(A,Y), \quad f \mapsto f|_A$$

关于 $\mathscr{T}_{p.c.}, \mathscr{T}_{c.c.}, \mathscr{T}_{u.c.}$ 都是连续的.

证明 对 r_A 使用推论 1.61(1) 即“连续映射限制在子集上仍然连续”，我们得到

$$r_A : \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{M}(A,Y), \quad f \mapsto f|_A$$

是连续的. 再次对 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ 应用推论 1.61(1)，我们得到 $r_A(f) \in \mathcal{C}(A,Y)$. 最后应用推论 1.61(2) 即得欲证. □

¶ 局部紧 Hausdorff 空间

回到我们原来的问题。假设 $f_n \in \mathcal{C}(X,Y)$ 且在 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 下 $f_n \to f_0$ 。由引理 2.4.8，在每个紧子集 $K \subset X$ 上，f_n 一致收敛于 f_0，从而 f_0 在 K 上是连续的。我们能否就断言 f_0 是连续的呢？换而言之，

“函数 f 在 X 的每个紧子集上连续”是否意味着“f 在 X 上连续”?

很遗憾，答案是否定的：

例 2.4.11. 考虑拓扑空间 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$. 则 X 中仅有有限集是紧集，因为对于任意无限集合 A，取可数无穷点集 $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset A$，则集族

$$A \setminus \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

是 A 的开覆盖但没有有限子覆盖。显然，对于 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ 中的任意有限集，其子空间拓扑是离散拓扑。于是，定义 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ 上的任意映射限制在 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ 的任意紧子集上都是连续映射，但这样的映射在 $\mathbb{R}$ 上不必连续。

因为连续性是局部的，只要对于每个点，f 在该点的某个邻域里面连续，那么 f 就是连续映射（见第 1.3 节习题）. 于是我们很自然地引入如下概念：

定义 2.4.12.（局部紧）

如果拓扑空间 X 的每个点 $x \in X$ 都有一个紧邻域，即存在一个开集 U 和一个紧集 K 使得 $x \in U \subset K$，则我们称 X 是 **局部紧空间**。

由定义以及引理2.4.8，我们马上得到

命题 2.4.13.（局部紧 + 紧收敛 $\Longrightarrow$ 极限函数连续）

若局部紧空间 X 上的连续函数列 f_n 在紧收敛拓扑下收敛于 f，则 f 是连续的。

在绝大部分应用中，局部紧空间也是 Hausdorff 的。注意如果 X 是 Hausdorff 空间，那么 X 是局部紧的当且仅当 X 中的每个点存在一个开邻域 U 使得 $\overline{U}$ 是紧致的. 我们把局部紧 Hausdorff 空间简称为 **LCH 空间**.

例 2.4.14. 以下是 LCH 空间和非 LCH 空间的一些例子:

(1) 任意紧 Hausdorff 空间是 LCH 空间.

(2) $\mathbb{R}^n$ 是 LCH 空间. 更一般地，若 Hausdorff 拓扑空间 X 中任意一个点都有一个同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的开邻域，则 X 是 LCH 空间。

定义 2.4.15.（局部欧氏空间）

设 X 是拓扑空间. 如果对于任意 $x \in X$, 存在 x 的邻域 U 同胚于欧氏空间中的开球，则我们称 X 是一个**局部欧氏空间**.

(3) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 和 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 都不是 LCH 空间. [留作习题]

LCH 空间在分析中起着重要作用。例如,

- $\mathbb{R}^n$ 上的实分析（测度理论和积分）可以扩展到一般的 LCH 空间。[16]
- 可以证明空间 $\mathbb{Q}_p$，即 p 进度量下 $\mathbb{Q}$ 的完备化，是一个 LCH 空间。因此，LCH 空间上的分析在 p 进分析中非常有用。

在 LCH 空间上处理分析问题时，我们往往需要以下命题:

命题 2.4.16.（LCH 中紧集与闭集的分离）

设 X 是 LCH 空间，K 是 X 中的紧集，U 是 X 中包含 K 的开集. 那么存在开集 V 使得 $\overline{V}$ 是紧的，并且

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

证明 先证明特殊情况：$K = \{x\}$ 为单点集。由局部紧性，存在 x 的开邻域 W 使得 $\overline{W}$ 是 X 中的紧子集。令

$$U_1 = U \cap W,$$

则 $\overline{U}_1 \subset \overline{W}$ 是紧集的闭子集，从而是紧集. 若 $\overline{U}_1 = U_1$，则令 $V = U_1$ 即可。下设 $\overline{U}_1 \setminus U_1 \neq \emptyset$，则由 Hausdorff 性质，对于任意 $y \in \overline{U}_1 \setminus U_1$，存在开集 $V_y \ni x$ 以及开集 $U_y \ni y$ 使得 $V_y \cap U_y = \emptyset$. 我们不妨假设 $V_y \subset U_1$，否则我们将 V_y 替换为 $Y_y \cap U_1$. 因为 $\overline{U}_1 \setminus U_1$ 作为紧集 $\overline{U}_1$ 的闭子集，也是紧集，所以存在 $y_1, \cdots, y_k \in \overline{U}_1 \setminus U_1$ 使得 $U_{y_1}, \cdots, U_{y_k}$ 覆盖 $\overline{U}_1 \setminus U_1$. 令

$$V = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_k}.$$

则 V 是 x 的开邻域，且

$$\overline{V} \subset \overline{V_{y_1}} \cap \cdots \cap \overline{V_{y_k}} \subset \overline{U}_1$$

[16]参考 G. Folland, *Real analysis*, 第 7 章, 或 T. Tao, *An Epsilon of Room I: Real Analysis*, 第 1.10 节.

是紧集的闭子集，从而是紧集。但根据构造，我们有

$$\begin{aligned} &V \subset (U_{y_1} \cup \cdots U_{y_k})^c \\ \Longrightarrow &\overline{V} \cap (U_{y_1} \cup \cdots U_{y_k}) = \emptyset \\ \Longrightarrow &\overline{V} \cap (\overline{U}_1 \setminus U_1) = \emptyset. \end{aligned}$$

于是我们得到 $\overline{V} \subset U_1 \subset U$. 于是 V 即为所求的集合.

对于一般的紧集 K，我们采用标准的紧性论证：由上面所证，对于每个 $x \in K$，均可找到开集 V_x 使得 $\overline{V_x}$ 是紧集，且

$$\{x\} \subset V_x \subset \overline{V_x} \subset U.$$

由紧性，存在 $x_1, \cdots, x_m$ 使得 $V_{x_1}, \cdots, V_{x_m}$ 覆盖 K. 于是 $V = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}$ 满足条件. □

¶ 阅读材料：紧生成空间

局部紧条件保证了

"函数 f 在 X 的每个紧子集上连续" $\Longrightarrow$ "f 在 X 上连续".

但是局部紧条件不是最一般的条件。现在我们考虑

问题 X 满足什么条件时，"函数 f 在 X 的每个紧子集上连续" 意味着 "f 在 X 上连续"?

设 V 是 Y 中的任何开集。那么我们想要的是 "$f^{-1}(V)$ 在 X 中是开集"，而我们已知的是 "对于 X 的每个紧子集 K，$f^{-1}(V) \cap K$ 在 K 中是开集"。所以我们需要的条件是

$$\text{子集 } A \subset X \text{ 是开集当且仅当对于每个紧子集 } K\text{，} A \cap K \text{ 在 } K \text{ 中是开集.} \qquad (\star)$$

定义 2.4.17.（紧生成空间） 如果拓扑空间 X 满足条件 $(\star)$，则我们称 X 是 **紧生成空间** 。♣

显然，在条件 $(\star)$ 中，我们可以将 "开集" 替换为 "闭集"。

注 2.4.18. 使用例 1.101 的语言，我们得到

> X 是紧生成的 $\Longleftrightarrow$ X 是所有紧子空间 $K \subset X$ 的 **拓扑并**，其中每个紧子空间都带有子空间拓扑。

这解释了 "紧生成" 的名称：X 上的拓扑是由其所有紧子空间上的拓扑生成的。

通过以上分析以及引理2.4.8，我们可以把命题2.4.13推广为

命题 2.4.19.（紧收敛 + 紧收敛 $\Longrightarrow$ 极限函数连续） 如果 X 是紧生成的，$f_n \in \mathcal{C}(X,Y)$ 且 f_n 在 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 下收敛到 f_0，则 $f_0 \in \mathcal{C}(X,Y)$. ♠

显然，任何紧拓扑空间都是紧生成的。事实上，很多拓扑空间是紧生成的，例如

- 所有第一可数空间 (因此所有度量空间) 都是紧生成的. (留作习题)
- 所有局部紧空间都是紧生成的. (留作习题)
- 所有 CW 复形 (代数拓扑中重要的拓扑空间 [17]) 都是紧生成的.

[17] 参见 A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Appendix.

¶ 紧开拓扑

紧收敛拓扑的定义中要求 Y 是度量空间。当 Y 只是拓扑空间时，$\mathcal{M}(X,Y)$ 上无法定义紧收敛拓扑. 但只要用标准的手段，即将度量球替换为开集，就不难定义如下 "拓扑空间版本的紧收敛拓扑"：

定义 2.4.20.（紧开拓扑）

设 X, Y 为拓扑空间。对于任意紧的 $K \subset X$ 和开集 $V \subset Y$，我们记

$$S(K,V) = \{f \in \mathcal{M}(X,Y) \mid f(K) \subset V\}.$$

我们称 $\mathcal{M}(X,Y)$ 上的由子基

$$\mathcal{S}_{c.o.} = \{S(K,V) \mid K \text{是} X \text{ 的紧子集}, V \text{是} Y \text{ 的开子集}\}$$

生成的拓扑 $\mathscr{T}_{c.o.}$ 为 $\mathcal{M}(X,Y)$ 的**紧开拓扑**。♣

我们只对 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的 $\mathscr{T}_{c.o.}$ 感兴趣，因为它在这个子空间中最有用。

例 2.4.21. 取 X 为单点集 $\{*\}$，那么 $\mathcal{C}(\{*\},Y)$ 中的函数一一对应于 Y 中的点。换言之，作为集合，$\mathcal{C}(\{*\},Y)$ 与 Y 是等同的. 由紧开拓扑的定义，在上述等同下，拓扑空间 $(\mathcal{C}(\{*\},Y), \mathscr{T}_{c.o.})$ 中的开集恰好一一对应于 Y 中的开集. 于是我们得到拓扑空间的同胚：

$$(\mathcal{C}(\{*\},Y), \mathscr{T}_{c.o.}) \simeq (Y, \mathcal{T}_Y).$$

由定义不难证明（留作习题）

命题 2.4.22.（度量空间）

如果 Y 是一个度量空间，那么在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上有

$$\mathscr{T}_{c.o.} = \mathscr{T}_{c.c.}.$$ ♠

特别地，对于度量空间 Y，$\mathcal{C}(X,Y)$ 上的紧收敛拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 只依赖于 Y 上度量所生成的拓扑，而不依赖于拓扑等价的度量的选取。作为推论，若 X 是紧的，则 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上由度量诱导的一致收敛拓扑 $\mathscr{T}_{u.c.}$ 与 Y 上拓扑等价的度量的选取无关。

下面我们考虑映射的复合。我们知道，连续映射的复合依然是连续映射，于是 "映射的复合" 就给出了一个从 $\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z)$ 到 $\mathcal{C}(X,Z)$ 的映射。在考虑该 "复合映射" 的连续性时，我们需要在这些映射空间上赋予适当的拓扑。利用命题2.4.16，可以证明

命题 2.4.23.（"复合" 的连续性）

设 X, Y 和 Z 是拓扑空间，其中 Y 是局部紧 Hausdorff 空间。赋予以下每个空间紧开拓扑，则复合映射

$$\circ : \mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z), \quad (f,g) \mapsto g \circ f$$

是连续映射。♠

证明留作练习。

推论 2.4.24.（赋值的连续性）

设 X 为局部紧 Hausdorff 空间，Y 为任意拓扑空间。则当我们赋予 $\mathcal{C}(X,Y)$ 紧开拓扑时，赋值映射

$$e : X \times \mathcal{C}(X,Y) \to Y, \quad (x,f) \mapsto e(x,f) = f(x) \in Y$$

是连续的。♡

证明 根据例2.4.21，我们可以将 X 与 $\mathcal{C}(\{*\},X)$ 等同起来，将 Y 与 $\mathcal{C}(\{*\},Y)$ 等同起来，此时赋值映射 e 恰好就是复合映射

$$\circ : \mathcal{C}(\{*\},X) \times \mathcal{C}(X,Y) \to \mathcal{C}(\{*\},Y).$$

□

2.5 映射空间的紧性：Arzela-Ascoli 定理

2.5.1 等度连续性

¶ 经典 Arzela-Ascoli 定理

分析中的一个核心问题是：

> 给定一列连续映射，或者更一般地，一族连续映射，能否在其中找到一个（一致）收敛到某个连续函数的子列？

例如，为了证明某个偏微分方程或变分问题的解的存在性，可以先尝试构造该问题的一列“近似解”。如果可以证明这一列“近似解”有一个收敛到某个很好的函数的子列，那么通常加上一些额外的工作，就可以证明这个极限函数实际上是一个真正的解。这种方法被称为“紧性论证”，其背景就是我们接下来要介绍的 Arzela-Ascoli 定理。[18]

经典版本的 Arzela-Ascoli 定理是：

定理 2.5.1.（Arzela-Ascoli 定理：经典版本）
设 $\{f_n\} \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 是一个连续函数列.

(1) 如果函数列 $\{f_n\}$ 是一致有界且等度连续的，则它有一致收敛子列。

(2) 反之，如果函数列 $\{f_n\}$ 的每个子列都有一个一致收敛子列，那么它是一致有界且等度连续的.

♡

我们先回顾一下概念：我们称函数族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 是

(a) **一致有界的**，如果存在 $M>0$ 使得对任意 $x\in[0,1]$ 和任意 $f\in\mathcal{F}$, 有
$$|f(x)| \le M.$$

(b) **等度连续的**，如果对任意 $x_0 \in [0,1]$ 和任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对任意满足 $|x-x_0|<\delta$ 的 $x\in[0,1]$ 和任意 $f\in\mathcal{F}$, 都有
$$|f(x)-f(x_0)| \le \varepsilon.$$

不难看出，这两个条件是必要的：

(1) 函数列 $f_n(x)=n$ 是等度连续的，但没有收敛子列，因为它不是一致有界的（尽管该序列中的每个函数都是有界函数）。

(2) 函数列 $f_n(x)=x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致有界但在 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 中没有收敛子列（因为它在 $x=1$ 处不是等度连续的（尽管该序列中的每个函数在 $x=1$ 处都是连续的）。

¶ 等度连续性

不难把等度连续性的概念推广到从拓扑空间 X 到度量空间 Y 的连续映射族：

[18] 阿斯科利（G. Ascoli，1943-1896），意大利数学家，于 1884 年引入等度连续性的概念并用它给出了连续函数集紧致的充分条件；阿尔泽拉（C. Arzelà，1847-1912），意大利数学家，于 1895 年推广了 Ascoli 的定理，证明了条件的必要性，从而给出了完整的 Arzela-Ascoli 定理.

定义 2.5.2.（等度连续）

设 X 为拓扑空间，(Y,d) 为度量空间，$\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,Y)$ 是一族连续映射。对于 $x_0\in X$，如果对于任意 $\varepsilon>0$，都存在 x_0 的开邻域 U 使得

$$d(f(x),f(x_0))<\varepsilon,\quad \forall x\in U,\forall f\in\mathcal{F},$$

则我们称 $\mathcal{F}$ **在 x_0 处等度连续**. 如果 $\mathcal{F}$ 在任意点 $x\in X$ 处都是等度连续的，则我们称这族映射是 **等度连续的**。♣

等度连续性是度量性质，它弱于 $(\mathcal{C}(X,Y),d_u)$ 的完全有界性：

命题 2.5.3.（完全有界 $\Longrightarrow$ 等度连续）

对于任意度量空间 (Y,d)，$(\mathcal{C}(X,Y),d_u)$ 中的任何完全有界子集 $\mathcal{F}$ 是等度连续的。♠

证明 对于任意 $x_0\in X$ 和 $\varepsilon>0$，我们需要找到一个 x_0 的开邻域 U 使得

$$d(f(x),f(x_0))<\varepsilon,\quad \forall x\in U,\forall f\in\mathcal{F}.$$

由于 $\mathcal{F}$ 是完全有界的，所以在 $(\mathcal{C}(X,Y),d_u)$ 中存在 $\mathcal{F}$ 的有限 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 $\{f_1,\cdots,f_n\}$。由于每个 f_k 是连续的，因此集合

$$U=\bigcap_{k=1}^{n}f_k^{-1}\left(B(f_k(x_0),\frac{\varepsilon}{3})\right)$$

是 x_0 的开邻域。对任意 $f\in\mathcal{F}$，根据我们的选取，存在 k 使得 $d_u(f,f_k)<\varepsilon/4$。因此对任意 $x\in U$ 以及任意 $f\in\mathcal{F}$，

$$d(f(x),f(x_0))\leq d(f(x),f_k(x))+d(f_k(x),f_k(x_0))+d(f_k(x_0),f(x_0))<\varepsilon.$$

这就完成了证明。 □

为什么要引入等度连续族这么复杂的概念呢?我们知道逐点收敛拓扑刻画了映射“在有限个点处的接近性”，而紧收敛拓扑刻画了映射 “在紧集上的接近性” . 对于一个连续映射 f，要在紧集上逼近它，根据标准的紧性论证，只要在有限个点处足够逼近它就可以了，但这个用于逼近的有限点集一般而言是强烈依赖于 f 的。然而，若 $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,Y)$ 是等度连续族，由等度连续的定义，对于任意给定的紧集，我们可以为 $\mathcal{F}$ 中所有函数取同一个有限点集. 换而言之，“等度连续” 让我们把整族函数 “在某个紧集上的接近性” 同时化归为 “在某个有限点集的接近性”：

命题 2.5.4.（等度连续族：$\mathscr{T}_{p.c.}=\mathscr{T}_{c.c.}$）

设 $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,Y)$ 是等度连续族，则 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 与 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 限制在 $\mathcal{F}$ 上是相同的。♠

证明 因为我们总有 $\mathscr{T}_{p.c.}\subset\mathscr{T}_{c.c.}$，因此只要在 $\mathcal{F}$ 上证明相反的包含关系，即对于任意 $f_0\in\mathcal{F}$ 和任意 $B(f_0;K,\varepsilon)\subset\mathcal{M}(X,Y)$，其中 $K\subset X$ 是紧集，我们需要证明：存在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中的开集 U 使得

$$f_0\in U\cap\mathcal{F}\subset B(f_0;K,\varepsilon)\cap\mathcal{F}.\tag{2.5.1}$$

由等度连续的定义，对于任意 $\varepsilon > 0$ 以及 $x_0 \in K$，存在 x_0 的开邻域 U_0 使得

$$d(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in U_0, \forall f \in \mathcal{F}.$$

因为 K 是紧集，存在有限多个点 $x_1, \cdots, x_n$ 以及 X 中覆盖 K 的开集 $U_1, \cdots, U_n$，使得

$$d(f(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in V_i,\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

我们取 U 为集合

$$U = \omega(f_0; x_1, \cdots, x_n; \varepsilon) = \left\{ g \in \mathcal{M}(X,Y) | d(g(x_i), f_0(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}, 1 \leqslant i \leqslant n \right\}.$$

易验证对于这个 U，(2.5.1) 成立：设 $f \in U \cap \mathcal{F}$. 对于任意 $x \in K$，取 i 使得 $x \in U_i$. 则

$$d(f(x), f_0(x)) \leqslant d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f_0(x_i)) + d(f_0(x_i), f_0(x)) < \varepsilon,$$

即 $f \in B(f_0; K, \varepsilon)$. □

¶ 等度连续族的闭包

我们知道一族连续映射在逐点收敛拓扑下的极限点不必是连续映射，即 $\mathcal{C}(X,Y)$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中不是闭集。然而，等度连续族 $\mathcal{F}$ 里的映射在逐点收敛拓扑下的极限点一定是连续映射：

命题 2.5.5.（等度连续族的闭包等度连续）

设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ 是等度连续的，那么 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{M}(X,Y)$ 中关于 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 的闭包 $\mathcal{K}$ 是等度连续的. 特别地，$\mathcal{K} \subset \mathcal{C}(X,Y)$. ♠

证明 对于任意 $x_0 \in X$ 和 $\varepsilon > 0$,，我们需要一个 x_0 的开邻域 U 使得

$$d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon, \quad \forall x \in U,\ \forall g \in \mathcal{K}. \tag{2.5.2}$$

由 $\mathcal{F}$ 的等度连续性，我们可以找到 x_0 的开邻域 U 使得

$$d(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in U,\ \forall f \in \mathcal{F}.$$

为了证明 (2.5.2) 对于这个 U 成立，我们任取 $g \in \mathcal{K}, x \in U$ 并记 $V = \omega(g; x, x_0; \frac{\varepsilon}{3})$，那么 V 是 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中 g 的一个开邻域. 因为 $g \in \mathcal{K}$ 且 $\mathcal{K}$ 是 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y), \mathscr{T}_{p.c.})$ 中的闭包，我们有 $V \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. 任取 $f \in V \cap \mathcal{F}$, 我们得到

$$d(g(x), g(x_0)) \leqslant d(g(x), f(x)) + d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) < \varepsilon.$$

这就证明了 (2.5.2)，从而证明了 $\mathcal{K}$ 的等度连续性。 □

2.5.2 一般版本的 Arzela-Ascoli 定理

¶ Arzela-Ascoli 定理（一般版本）

为了陈述一般版本的 Arzela-Ascoli 定理，我们需要先引入几个定义：

定义 2.5.6.（预紧）

设 A 是拓扑空间 X 的子集. 若 $\overline{A}$ 是紧的，则我们称 A 为 **预紧的**（或 **相对紧的**）. ♣

为简单起见，对于任意映射族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$，我们令

$$\mathcal{F}_a = \{f(a) \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

我们引入以下定义：

定义 2.5.7.（逐点有界/预紧）

设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ 是一个连续映射族.

(1) 如果对于每个 $a \in X$，$\mathcal{F}_a$ 是 Y 中的有界集, 则我们称 $\mathcal{F}$ **逐点有界**,

(2) 如果对于每个 $a \in X$，$\mathcal{F}_a$ 是 Y 中的预紧集，则我们称 $\mathcal{F}$ **逐点预紧**. ♣

下面我们将证明以下一般形式[19]的 Arzela-Ascoli 定理：

定理 2.5.8.（Arzela-Ascoli 定理：一般形式）

设 X 是拓扑空间, (Y,d) 是度量空间, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}(X,Y)$ 的子集, 赋有紧收敛拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$.

(1) 若 $\mathcal{F}$ 等度连续且逐点预紧，则 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{C}(X,Y), \mathscr{T}_{c.c.})$ 中的闭包是紧集。

(2) 如果 X 是局部紧 Hausdorff 空间, 则逆命题也对。 ♡

注意在上述一般形式的 Arzela-Ascoli 定理中，结论非常弱，因为一般来说紧收敛拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 不一定是度量拓扑，从而紧性并不蕴含列紧性。因此，对于等度连续且逐点预紧的序列，我们甚至不能得出收敛子列存在的结论。

但是，如果 X 是紧的并且 Y 是度量空间，那么在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上 $\mathscr{T}_{c.c.} = \mathscr{T}_{u.c.}$ 由于 $\mathscr{T}_{u.c.}$ 是一个度量拓扑，紧性确实蕴含列紧性。所以由定理2.5.8，我们得到

定理 2.5.9.（紧空间上的映射的 Arzela-Ascoli 定理）

设 X 是紧空间，(Y,d) 是一个度量空间，而 $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,Y)$ 是一个等度连续且逐点预紧的子集。则 $\mathcal{F}$ 中的任何序列都有子列在 X 中一**致**收敛到某个连续映射. ♡

因为在 $\mathbb{R}^n$ 中，一个集合是预紧的当且仅当它是有界的，我们得到

推论 2.5.10.（紧空间上多元函数的 Arzela-Ascoli 定理）

设 X 是紧空间，$\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^n)$ 是等度连续且逐点有界的子集。那么 $\mathcal{F}$ 中的任意序列都有子列在 X 上一**致**收敛到某个连续函数. ♡

Arzela-Ascoli 定理在分析学中应用广泛。以下是你可以从其他课程中学到的一些标准的应用：

- 泛函分析: Frechet-Kolmogorov-Riesz 紧性定理.
- 偏微分方程: Sobolev 嵌入，等等
- 常微分方程: Peano 存在性定理.
- 复分析: Montel 定理
- 调和分析/Lie 理论: Peter-Weyl 定理

[19]Arzela-Ascoli 定理还有更一般的形式，刻画了映到一致空间（这是度量空间的推广）的映射族的紧性.

¶ Arzela-Ascoli 定理（一般形式）的证明

现在我们来证明定理2.5.8。尽管该定理是关于紧收敛拓扑 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 的，但我们在证明中也需要使用逐点收敛拓扑 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 和一致收敛拓扑 $\mathscr{T}_{u.c}$.

我们先简要解释一下**证明思路：**我们想要证明 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{C}(X,Y),\mathscr{T}_{c.c.})$ 中的闭包是紧集。但是 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{c.c.})$ 中子集的紧性并不好证，关键的观察是

- 根据命题2.5.4，对于等度连续族，$\mathscr{T}_{c.c.}$ 和 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 是一致的.
- 根据命题2.5.5，$\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{C}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中的闭包就是 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中的闭包. 在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中证明紧性可以应用强大的 Tychonoff 定理.

证明 [定理2.5.8的证明]

(1) 我们记 $\mathcal{K}=\overline{\mathcal{F}}^{p.c.}$，即 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中的闭包. 记 $\mathcal{F}_a$ 在 Y 中的闭包为 K_a. 根据假设，K_a 是紧集，并且因为 Y 是度量空间 (从而是 Hausdorff 空间)，K_a 是闭集. 所以

$$\prod_{a\in X}K_a=\bigcap_{a\in X}\pi_a^{-1}(K_a)$$

在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中既是紧集（根据 Tychonoff 定理），也是闭集. 因为

$$\mathcal{F}\subset\prod_{a\in X}\mathcal{F}_a\subset\prod_{a\in X}K_a,$$

其闭包 $\mathcal{K}$，作为紧集 $\prod_{a\in X}K_a$ 中的一个闭子集，在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{p.c.})$ 中是紧集。根据命题 2.5.5，$\mathcal{K}$ 是等度连续的. 再由命题2.5.4，在 $\mathcal{K}$ 上 $\mathscr{T}_{p.c.}$ 和 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 两个拓扑是相同的。于是 $\mathcal{K}$ 也是 $\mathcal{F}$ 在 $(\mathcal{M}(X,Y),\mathscr{T}_{c.c.})$ 中的闭包（由于 $\mathscr{T}_{p.c.}\subset\mathscr{T}_{c.c.}$，$\mathcal{K}$ 在 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 下也是闭集；$\mathcal{K}$ 上的两个拓扑相同则告诉我们 $\mathcal{K}$ 中没有更小的包含 $\mathcal{F}$ 的闭集了），并且也是紧集。

(2) 现在假设 X 是 LCH 空间，且 $\mathcal{F}$ 在 $\mathcal{C}(X,Y)$ 中的闭包 $\mathcal{K}$ 是紧的。我们将证明 $\mathcal{K}$ 是等度连续的，且每个 $\mathcal{K}_a$ 是紧的，这蕴含了 $\mathcal{F}$ 是等度连续且逐点预紧的 (因为每个 $\overline{\mathcal{F}_a}$ 都是 $\mathcal{K}_a$ 中的闭子集).

$\mathcal{K}_a$ 的紧性来自推论 2.4.24：$\mathcal{K}_a$ 是紧集 $\mathcal{K}$ 在连续映射

$$\begin{array}{ccccc}\mathcal{C}(X,Y) & \xrightarrow{j_a} & X\times\mathcal{C}(X,Y) & \xrightarrow{e} & Y\\ f\mapsto & & (a,f) & & \mapsto f(a)\end{array}$$

下的像，因此是紧的，其中 j_a 是 "嵌入映射" $j_a(f):=(a,f)$.

为了证明在任意 $x\in X$ 处 $\mathcal{K}$ 的等度连续性，我们取 x 的紧邻域 A。则只需证明

$$\mathcal{K}_A:=\{r_A(f)\mid f\in\mathcal{K}\}$$

在 x 处是等度连续的，其中 $r_A:\mathcal{C}(X,Y)\to\mathcal{C}(A,Y)$ 是限制映射。由命题2.4.10，r_A 是连续的，于是 $\mathcal{K}_A=r_A(\mathcal{K})$ 在 $\mathcal{C}(A,Y)$ 中是紧的。又由于 A 是紧的，$\mathcal{C}(A,Y)$ 上的紧收敛拓扑与一致收敛拓扑是相同的. 换而言之，$\mathcal{C}(A,Y)$ 上的紧收敛拓扑是度量拓扑. 所以由定理2.3.28，$\mathcal{C}(A,Y)$ 中 $\mathcal{K}_A$ 的紧集关于 d_u 是完全有界的。最后根据命题 2.5.3，$\mathcal{K}_A$ 是等度连续的。这就完成了证明。

□

¶ 局部紧且 σ-紧空间上的映射的 Arzela-Ascoli 定理

对于局部紧空间，每个点都有紧邻域。显然，如果映射族 $\mathcal{F}$ 是等度连续/逐点预紧的，那么它在这样一个紧邻域上的限制也是等度连续/逐点预紧的。因此，如果 X 是局部紧的，那么对于任意等度连续且逐点预紧的序列 $\{f_n\}$，以及任意点 x，存在 x 的紧邻域，使得 $\{f_n\}$ 在该紧邻域上有一致收敛子列。不幸的是，这还不足以证明序列 $\{f_n\}$ 关于 $\mathscr{T}_{c.c}$ 具有收敛子列，因为在 X 中可能存在“太多紧子集”。然而，如果我们假设 X 可以写成可数个紧子集的并集，那么我们就可以应用标准的对角化技巧来提取一个子列，该子列在每个紧子集上（一致）收敛：

定义 2.5.11.（σ 紧）

如果拓扑空间 X 可以写成可数个紧子集的并集，则我们称 X 是 σ-**紧**的. ♣

定理 2.5.12.（局部紧且 σ-紧空间上的映射的 Arzela-Ascoli 定理）

设 X 为局部紧且 σ-紧空间，(Y,d) 为度量空间。设 $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X,Y)$ 是等度连续且逐点预紧的子集。那么 $\mathcal{F}$ 中的任意序列都有一个子列，在 X 的任意紧集上一致收敛到某个极限映射 $f\in\mathcal{C}(X,Y)$. ♡

证明细节留作习题。

2.5.3 阅读材料：Blaschke 选择定理

¶ 一些凸几何

我们给出一个凸几何中的应用。回想一下，子集 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是 **凸的** 当且仅当

$$x,y\in A \Longrightarrow (1-\lambda)x+\lambda y\in A,\quad \forall\, 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

下面我们考虑

$$\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n \text{ 中所有非空紧凸子集构成的集族.}$$

注意 $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ 是

$$\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n \text{ 中所有非空紧子集构成的集族}$$

的子集。在例 1.6(8) 中，我们在 $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ 上定义了所谓的 Hausdorff 度量

$$d_H(A_1,A_2):=\inf\{r\mid A_1\subset B(A_2,r) \text{ 且} A_2\subset B(A_1,r)\},$$

其中 $B(A,r):=\cup_{x\in A}B(x,r)$。所以特别地，$\mathfrak{C}(\mathbb{R}^n)$ 是一个度量空间。我们不加证明地列出一些凸几何的标准结果。

定义 2.5.13.（支撑函数）

设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 为紧凸集。我们称函数

$$h_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad h_A(v)=\sup_{x\in A}\langle x,v\rangle$$

为 A 的 **支撑函数**，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是标准的欧氏内积。 ♣

事实上，支撑函数刻画了紧凸集 A：

命题 2.5.14.（支撑函数的性质）

对于任意紧凸集 $A \subset \mathbb{R}^n$，支撑函数 h_A 是连续函数，并且是正齐次的和次可加的，即存在 $\alpha > 0$ 使得对于任意 $v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$h_A(\alpha v) = \alpha h_A(v)$$

和

$$h_A(v_1 + v_2) \leq h_A(v_1) + h_A(v_2).$$

反之，对于任意连续的、正齐次的和次可加的函数 h，都存在唯一的一个紧凸域 A，使得 $h = h_A$。

因此，支撑函数是凸几何中一个非常重要的工具：它将几何形状的问题转化为连续函数的问题。事实上，两个紧集之间的 Hausdorff 距离可以通过它们的支撑函数来计算。注意，根据正齐次性，每个 h_A 都由其限制

$$\tilde{h}_A = h_A|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to \mathbb{R}$$

唯一确定。这是 S^{n-1} 上的一个连续函数。

命题 2.5.15.（Hausdorff 距离 = 一致度量距离）

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意两个紧集 A 和 B，

$$d_H(A, B) = d_u(\tilde{h}_A, \tilde{h}_B),$$

其中 d_u 是 $\mathcal{C}(S^{n-1}, \mathbb{R})$ 上的一致度量。

我们还需要以下结果：

引理 2.5.16.（支撑函数的控制）

假设 $A \subset \overline{B(0,R)}$, 那么对于任意 $u, v \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$|h_A(u) - h_A(v)| \leq R|u - v|.$$

¶ Blaschke 选择定理

下面我们应用 Arzela-Ascoli 定理证明凸几何中重要的 Blaschke 选择定理：[20]

定理 2.5.17.（Blaschke 选择定理）

对于任意 $R > 0$，包含在 $B(0, R)$ 中的所有非空紧凸子集的集族关于拓扑 $\mathscr{T}_{d_H}$ 是紧集.

因此，任何“有界”紧凸集列都有一个在度量 d_H 下收敛到某个紧凸集的子列。

[20]布拉施克（Wilhelm Blaschke，1885-1962），奥地利/德国数学家，主要研究微分几何与积分几何。他建立了凸几何里的紧性定理即 Blaschke 选择定理，其著作《圆与球》是非常著名的关于凸体的书。布拉施克是陈省身先生的博士导师，对于陈省身先生决定去汉堡大学去学习数学起到了重要作用。

Blaschke 选择定理的一种证法是先证明 $\mathfrak{C}(\overline{B(0,R)})$ 是 $\mathscr{C}(\overline{B(0,R)})$ 中的闭子集，并证明后者是完全有界且完备的，从而是紧的。这里我们通过 Arzela-Ascoli 定理给出另一个证明。

证明 [Blaschke 选择定理的证明]

根据引理 2.5.16，函数族

$$\mathcal{F}=\{\tilde{h}_A \mid A\text{是紧凸集}\}\subset \mathcal{C}(S^{n-1},\mathbb{R})$$

是等度连续的。而且，根据定义，它是逐点有界的（界为 R）. 根据 Arzela-Ascoli 定理，$\mathcal{F}$ 中的任意函数列都有一个一致收敛到连续函数 $\tilde{h}\in\mathcal{C}(S^{n-1},\mathbb{R})$ 的子列. 定义正齐次函数 $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 使得 h 在 S^{n-1} 上的限制为 $\tilde{h}$。由于 $\tilde{h}$ 是一列 "限制函数" 的一致极限，其 "原始函数" 是次可加的，很容易看出 h 也是次可加的。由命题2.5.14，h 是 $\overline{B(0,R)}$ 中某个紧凸集的支撑函数。最后结合命题 2.5.15就完成了定理的证明。 □

Blaschke 选择定理可以用来证明许多几何问题的**解的存在性**, 比如等周问题[21], Lebesgue 万有覆叠问题等等.

[21]瑞士几何学家 Jakob Steiner 在 1838 年发展了对称化方法，证明了如果等周问题有解的话，那么解一定是球. 但是他的方法无法处理解的存在性问题而受到批评. Blaschke 选择定理使得等周问题的这种几何证法得以完善.

2.6 连续函数代数与 Stone-Weierstrass 定理

2.6.1 连续函数代数 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$

在本节中，我们假设 X 是紧 Hausdorff 空间（但在本节末尾我们将考虑更一般的 LCH 空间）. 我们考虑一类特殊的映射空间，即连续函数空间 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. 由注记 2.4.6，在 X 紧致时，$\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 上的度量

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$$

跟一致度量 d_u 是拓扑等价的。再由由推论 2.4.5，$(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}),d_\infty)$ 是完备度量空. 在本节里，如无例外说明，在谈及 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 时我们将一直使用 d_∞ 度量及其生成的一致拓扑.

¶ Weierstrass 逼近定理

我们先回忆一下在数学分析中学过的 Weierstrass 逼近定理，该定理是被誉为现代分析之父的德国数学家 Weierstrass 在 1885 年证明的，是后来函数逼近与插值理论的起点：

定理 2.6.1.（Weierstrass 逼近定理）

多项式集合 $\mathcal{P}([0,1])$ 在 $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),d_\infty)$ 中是稠密的。换言之，对于任意 $\varepsilon>0$ 和任意 $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$，存在一个多项式 P，使得

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

♡

该定理的最简洁的证明是 S. Bernstein [22] 于 1912 年给出的：对任意 f，他显式构造了一列多项式，被称为 Bernstein 多项式，

$$B_n(f)(x) := \sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n})\cdot\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i}, \tag{2.6.1}$$

并用概率论方法证明了这一列多项式一致收敛于 f.

作为推论，我们得到

推论 2.6.2

对于任意 $0<a<b$ 以及任意 $\varepsilon>0$，存在一个多项式 $q=q(t)$，满足 $q(0)=0$ 且

$$q([a,b])\subset(1-\varepsilon,1+\varepsilon).$$

♡

证明 根据 Weierstrass 逼近定理，存在一个多项式 $q_1\in\mathcal{P}([0,b])$ 使得：

$$|q_1(t)-f_0(t)|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad \text{其中}\quad f_0(t)=\begin{cases} t/a, & t\in[0,a],\\ 1, & t\in[a,b].\end{cases}$$

然后令 $q(t)=q_1(t)-q_1(0)$ 即可. □

[22]伯恩施坦（Sergei Natanovich Bernstein，1880-1968），俄罗斯和前苏联数学家，以对偏微分方程、微分几何、概率论和近似理论的贡献而闻名，函数构造论的创立者。

¶ 作为含幺代数的 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$

我们的目标是将 Weierstrass 逼近定理扩展到更一般的拓扑空间。当然，一般来说，我们将不再有拓扑空间上的多项式的概念。但我们仍然可以提问：

问题: 我们能否用一个相对简单的函数族来逼近 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 里的函数?

在 Weierstrass 逼近定理中，我们使用子集

$$\mathcal{P}([0,1]) = [0,1]\text{上的多项式空间}$$

来逼近 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 里的函数. 注意到 $\mathbb{R}$ 上的加法与乘法自动给出了函数空间 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 及其子空间 $\mathcal{P}([0,1])$ 里的加法和乘法，而"函数之间的加法和乘法"是构成 Bernstein 多项式 (2.6.1) 的基本组件. 用代数的语言来说，$\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 是一个"代数"，而 $\mathcal{P}([0,1])$ 是 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 中的"子代数"：

定义 2.6.3.（代数）

设 $(\mathcal{A},+)$ 是数域 $\mathbb{R}$(或 $\mathbb{C}$) 上的一个向量空间，且 $\mathcal{A}$ 上还有一个乘法运算

$$\cdot : \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}.$$

(1) 如果对任意 $x,y,z\in\mathcal{A}$ 和标量 a,b，都有
   - (分配律) $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z,\quad x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z.$
   - (相容性) $(ax)\cdot(by) = (ab)(x\cdot y).$

   则我们称三元组 $(\mathcal{A},+,\cdot)$ 为一个**代数**. 换言之，代数就是一个赋有满足分配律的双线性乘法运算的向量空间 $\mathcal{A}$.

(2) 如果 $(\mathcal{A},+,\cdot)$ 是一个代数，$\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是一个乘法封闭的向量子空间，则称 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个**子代数**.

(3) 如果代数 $\mathcal{A}$ 中存在关于乘法的单位元，即存在元素 $1\in\mathcal{A}$ 使得

$$1\cdot x = x\cdot 1 = x,$$

   则称代数 $\mathcal{A}$ 是 **含幺代数**，并称 1 为该代数的**幺元**.

(4) 如果代数 $\mathcal{A}$ 也是一个拓扑向量空间，且拓扑结构与乘法运算也相容，即

$$\cdot : \mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$$

   是连续映射，则我们称 $\mathcal{A}$ 是一个**拓扑代数**.

(5) 如果拓扑代数 $\mathcal{A}$ 的子代数 $\mathcal{B}$ 是它的闭子空间，则称为 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 **闭子代数**。♣

例如 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$（赋予一致拓扑）是含幺拓扑代数，$\mathcal{P}([0,1])$ 是 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 的含幺子代数，但不是闭子代数。

利用拓扑结构与向量空间结构（向量加法与数乘）、乘法运算的相容性，可以证明

命题 2.6.4.（子代数的闭包是闭子代数）

设 $\mathcal{A}$ 为拓扑代数，$\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}$ 为子代数。那么闭包 $\overline{\mathcal{A}_1}$ 是 $\mathcal{A}$ 的（闭）子代数。♠

¶ 两个条件："无处消失" 和 "分离点"

现在设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 是一个子代数。我们想要找出使得 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 中稠密的条件. 为此，我们先通过例子观察不稠密的子代数 $\mathcal{A}$:

例 2.6.5.

(1) 考虑

$$\mathcal{A}=\left\{f=\sum_{k=1}^{n}a_kx^k \;\middle|\; n\in\mathbb{N}, a_k\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}).$$

那么 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ 中的一个子代数，但它不是稠密的：因为

$$f(0)=0, \qquad \forall f\in\mathcal{A},$$

所以 $\mathcal{A}$ 中的函数无法（在度量 d_∞ 下）逼近任意在 $x=0$ 处非零的函数。

(2) 考虑

$$\mathcal{A}=\left\{f=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)) \;\middle|\; n\in\mathbb{N}, a_k, b_k\in\mathbb{R}\right\}\subset\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R}).$$

那么 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ 中的一个子代数，但它不是稠密的：因为

$$f(0)=f(2\pi), \qquad \forall f\in\mathcal{A},$$

所以 $\mathcal{A}$ 中的函数无法（在度量 d_∞ 下）逼近任意满足 $f(0)\neq f(2\pi)$ 的函数 f.

我们将会看到，这两个例子是 "仅有的坏例子"。为此，我们定义

定义 2.6.6.（无处消失与分离点性质）

设 X 是拓扑空间，而 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 的一个子代数.

(1) 若对任意 $x\in X$，存在 $f\in\mathcal{A}$ 使得 $f(x)\neq 0$，则我们称 $\mathcal{A}$ 是**无处消失的**.

(2) 若对任意 $x\neq y\in X$, 存在 $f\in\mathcal{A}$ 使得 $f(x)\neq f(y)$，则我们称 $\mathcal{A}$ 是**分离点的**. ♣

根据定义，如果 X 不是 Hausdorff 的, 则 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 没有分离点的子代数. 所以在谈及 "分离点" 时我们将始终假设 X 是 Hausdorff 空间.

¶ $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 的含幺闭子代数

显然 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 的任何含幺子代数 $\mathcal{A}$ 是无处消失的。反之，我们有

命题 2.6.7.（$\mathcal{A}$ 无处消失 $\Longrightarrow \overline{\mathcal{A}}$ 含幺）

设 X 是紧拓扑空间. 如果 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 的子代数 $\mathcal{A}$ 无处消失，那么 $1\in\overline{\mathcal{A}}$，即 $\overline{\mathcal{A}}$ 含幺。♠

证明 对任意 $x\in X$, 存在 $f_x\in\mathcal{A}$ 使得 $f_x(x)\neq 0$. 设

$$U_x=\{y\mid f_x(y)\neq 0\}.$$

则 $\{U_x\}$ 是 X 的开覆盖. 所以存在点 $x_1,\cdots,x_m$ 使得 $X\subset U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_m}$. 令

$$f_1(x)=f_{x_1}^2+\cdots+f_{x_m}^2\in\mathcal{A}.$$

则对所有 $x\in X$ 有 $f_1(x)>0$. 由 X 的紧性, 存在 $a,b>0$ 使得对所有 $x\in X$ 有

$a \leqslant f_1(x) \leqslant b$. 对于任意 $\varepsilon > 0$，由推论 2.6.2，存在 $q \in \mathcal{P}([a,b])$ 满足 $q(0) = 0$，且使得

$$f(x) := q(f_1(x)) \subset (1-\varepsilon, 1+\varepsilon),$$

即 $d_\infty(f, 1) < \varepsilon$. 最后，因为 q 是多项式且 $q(0) = 0$, 所以 $f \in \mathcal{A}$. 于是 $1 \in \overline{\mathcal{A}}$. □

对于 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 的含幺闭子代数，通过同时使用代数结构和拓扑结构，我们有

命题 2.6.8.（含幺子代数的性质）

设 X 是紧拓扑空间，$\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 的一个含幺闭子代数，则

(1) $f \in \mathcal{A} \Longrightarrow |f| \in \mathcal{A}$.

(2) $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \max\{f_1, \cdots, f_n\} \in \mathcal{A}, \min\{f_1, \cdots, f_n\} \in \mathcal{A}$.

证明 (1) 因为 f 是有界的，根据 Weierstrass 逼近定理，在 $[0, |f|_\infty^2]$ 上存在一列多项式 $p_n(t)$ 一致收敛到函数 $h(t) = \sqrt{t}$。于是函数列 $p_n \circ f^2$ 一致收敛到函数 $\sqrt{f^2} = |f|$. 但是因为 $\mathcal{A}$ 是含幺子代数且 $f \in \mathcal{A}$，所以 $p_n \circ f^2 \in \mathcal{A}$. 由 $\mathcal{A}$ 的闭性，我们得到 $|f| \in \mathcal{A}$.

(2) 这是因为

$$\max\{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}, \quad \min\{f, g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

结合 (1) 以及归纳法即得欲证. □

2.6.2 Stone-Weierstrass 定理

¶ Stone-Weierstrass 定理（版本 1）

1937 年，M. Stone[23]将 Weierstrass 逼近定理推广到一般的紧 Hausdorff 空间，并在 1948 年给出了一个简化证明：

定理 2.6.9.（紧 Hausdorff 空间的 Stone-Weierstrass 定理【版本 1】）

设 X 为任意紧 Hausdorff 空间。若 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 的子代数 $\mathcal{A}$ 无处消失 且 分离点，那么 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 中是稠密的

Stone-Weierstrass 定理是关于 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 的最重要的定理之一。美国数学家 J. Kelley 在他所著的拓扑学方面的经典著作《一般拓扑学》一书中评价 Stone-Weierstrass 定理为“这无疑是 $\mathcal{C}(X)$ 上已知的最有用的结果。”

注 2.6.10. 对于一般的是非紧 Hausdorff 空间 X，若我们赋予 $C^\infty(X, \mathbb{R})$ 紧收敛拓扑 $\mathcal{T}_{c.c.}$，则 $(C^\infty(X, \mathbb{R}), \mathcal{T}_{c.c.})$ 依然是拓扑代数，此时我们可以把紧 Hausdorff 空间的 Stone-Weierstrass 定理翻译成如下的

[23] 马歇尔. 斯通（Marshall Stone，1903-1989），美国数学家，对实分析、泛函分析、拓扑学和布尔代数的研究做出了贡献。他以 **Stone-von Neumann 定理** (1930)、**Stone-Čech 紧化** (1934)、**Stone 表示定理** 和 **Stone 对偶** (1936), **Banach-Stone 定理** (1937), **Stone-Weierstrass 定理** (1937, 1948) 等等而闻名. 在 1946 年-1952 年期间担任芝加哥大学系主任时，聘请了 P. Halmos, A. Weil，S. Mac Lane, A. Zygmund 和陈省身先生等一批著名数学家前往工作. 注意不要跟后文中出现的英国数学家 Arthur Stone 混淆.

定理 2.6.11.（紧收敛拓扑版本的 Stone-Weierstrass 定理）
设 X 是 Hausdorff 拓扑空间，$\mathcal{A}$ 是 $(C^\infty(X,\mathbb{R}),\mathcal{T}_{c.c.})$ 无处消失且分离点的子代数，则 $\mathcal{A}$ 在 $(C^\infty(X,\mathbb{R}),\mathcal{T}_{c.c.})$ 中稠密. ♡

证明 对于任意 $f_0 \in C^\infty(X,\mathbb{R})$，$X$ 中的任意紧集 K 以及任意 $\varepsilon > 0$, 我们需要证明

$$B(f,K,\varepsilon)\cap\mathcal{A}\neq\emptyset.$$

为此，我们令

$$\mathcal{A}_K=\{f|_K \mid f\in\mathcal{A}.\}$$

注意到 $\mathcal{A}_K$ 是 $(C(\mathcal{K},\mathbb{R}),d_\infty)$ 的一个无处消失且分离点的子代数，于是由定理2.6.9，存在 $f\in\mathcal{A}$ 使得 $d_\infty(f|_K,f_0|_K)<\varepsilon$，而这正是我们需要的. □

当然，因为 $\mathscr{T}_{c.c.}$ 一般而言不是度量拓扑，所以需要加上一定的条件（比如定义 2.5.11 的 σ-紧），才能找到 $\mathcal{A}$ 中一列函数，使之在每个紧集上一致收敛到给定的 f_0.

接下来我们将证明 Stone-Weierstrass 定理，并简要讨论它的一些推广，从中我们可以管窥到该定理是如何以某种预料之中以及意想不到的方式继续进一步发展的。

¶ Stone-Weierstrass 定理（版本 2）及证明

根据命题 2.6.4 和命题 2.6.7，定理 2.6.9 等价于

定理 2.6.12.（紧 Hausdorff 空间的 Stone-Weierstrass 定理【版本 2】）
设 X 是紧致 Hausdorff 空间，$\mathcal{A}\subset\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 是一个分离点的含幺闭子代数。则 $\mathcal{A}=\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$. ♡

证明 设 $f\in\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$。对于任意 $\varepsilon>0$, 我们需要找到 $f_\varepsilon\in\mathcal{A}$ 使得

$$d_\infty(f,f_\varepsilon)<\varepsilon.$$

我们从任意点对 $a\neq b\in X$ 开始. 因为 $\mathcal{A}$ 分离点，所以存在 $g\in\mathcal{A}$ 使得 $g(a)\neq g(b)$。令

$$f_{a,b}(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

那么 $f_{a,b}\in\mathcal{A}$ 且 $f_{a,b}(a)=f(a)$, $f_{a,b}(b)=f(b)$。考虑集合

$$U_{a,b,\varepsilon}:=\{x\in X \mid f_{a,b}(x)<f(x)+\varepsilon\}.$$

由 f 和 $f_{a,b}$ 的连续性，这个集合是开集。而且，对于任意取定的 b 和 ε，$\{U_{a,b,\varepsilon}\}_{a\in X}$ 是 X 的开覆盖。由 X 的紧性，我们可以找到一个有限的子覆盖

$$\{U_{a_1(b,\varepsilon),b,\varepsilon},U_{a_2(b,\varepsilon),b,\varepsilon},\cdots,U_{a_n(b,\varepsilon),b,\varepsilon}\}.$$

因此如果我们取

$$f_b^\varepsilon:=\min\{f_{a_1(b,\varepsilon),b},f_{a_2(b,\varepsilon),b},\cdots,f_{a_n(b,\varepsilon),b}\},$$

则在 X 上处处有 $f_b^\varepsilon<f+\varepsilon$. 根据命题2.6.8，$f_b^\varepsilon\in\mathcal{A}$. 而且，根据定义，$f_b^\varepsilon(b)=f(b)$。所

以当我们改变 b 时，由集合

$$V_{b,\varepsilon} := \{x \in X \mid f_b^\varepsilon(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

所构成的集族也是 X 的开覆盖。由紧性，我们可以找到一个有限的子覆盖

$$\{V_{b_1,\varepsilon}, V_{b_2,\varepsilon}, \cdots, V_{b_m,\varepsilon}\}.$$

最后，如果我们令

$$f_\varepsilon := \max\{f_{b_1}^\varepsilon, f_{b_2}^\varepsilon, \cdots, f_{b_m}^\varepsilon\},$$

再次使用命题2.6.8，我们得到 $f_\varepsilon \in \mathcal{A}$. 而由构造可知，则在 X 上我们有

$$f + \varepsilon > f_\varepsilon > f - \varepsilon.$$

这就完成了证明。 □

¶ Stone-Weierstrass Theorem（版本 3）

Stone-Weierstrass 定理的另一个等价表述形式是：

定理 2.6.13.（紧 Hausdorff 空间的 Stone-Weierstrass 定理【版本 3】） 设 X 是紧 Hausdorff 空间，$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 是一个分离点的子代数。如果 $\mathcal{A}$ 不稠密，则存在唯一的 $x_0 \in X$ 使得

$$\overline{\mathcal{A}} = \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) | f(x_0) = 0\}.$$

♡

证明 由于 $\mathcal{A}$ 分离点但 $\overline{\mathcal{A}} \neq \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$，必须存在一个 x_0 使得对所有 $f \in \mathcal{A}$ 有 $f(x_0) = 0$ 。而且，因为 $\mathcal{A}$ 分离点，这样的 x_0 必须是唯一的。所以存在唯一的 $x_0 \in X$ 满足

$$\overline{\mathcal{A}} \subset \{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \mid f(x_0) = 0\}.$$

反之，我们证明 $\{f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}) \mid f(x_0) = 0\}$ 中任意函数都可以被 $\mathcal{A}$ 中的元素逼近. 为此我们令 $\mathcal{A}_1$ 为由 $\mathcal{A}$ 和常值函数生成的 $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 的含幺子代数，则 $\overline{\mathcal{A}} = C(X, \mathbb{R})$. 设 $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 是一个满足 $f(x_0) = 0$ 的函数，首先取一列函数 $f_n \in \mathcal{A}_1$ 逼近 f. 由定义，$f_n - f_n(x_0) \in \mathcal{A}$. 因为 $f_n(x_0) \to f(x_0) = 0$，我们得到 $f_n - f_n(x_0) \to f$，即为欲证. □

¶ 复值函数的 Stone-Weierstrass 定理

上面我们只对实值函数考虑了 Stone-Weierstrass 定理。复值连续函数代数 $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$，上面所表述的 Stone-Weierstrass 定理对并不成立：

例 2.6.14. 记 $\mathbb{C}$ 中的闭单位圆盘为 $\overline{D}$，则 $\overline{D}$ 上的复多项式代数 $P(\overline{D}, \mathbb{C})$ 是一个分离点的含幺复子代数，但它在 $\mathcal{C}(\overline{D}, \mathbb{C})$ 中并不稠密，因为函数 $f(z) = \bar{z}$ 不能被复多项式逼近：如果 $p_n(z) \to f(z) = \bar{z}$，那么我们会得到

$$0 = \int_0^{2\pi} p_n(e^{it}) e^{it} dt \to \int_0^{2\pi} e^{-it} e^{it} dt = 2\pi,$$

矛盾。【事实上，根据复分析里面有关函数项级数的 Weierstrass 定理，一列在单位圆盘里内闭一致收敛的多项式，其极限在开圆盘里面一定是全纯函数！】

事实上，我们只要把 $\bar{z}$ 这样的元素加上，Stone-Weierstrass 定理就依然成立！

定义 2.6.15.（自伴复子代数）

设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 的一个复子代数[a]，如果它关于共轭运算是闭的，即

$$f \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bar{f} \in \mathcal{A},$$

则我们称 $\mathcal{A}$ 是 **自伴**的复子代数.

[a]换句话说，定义 2.6.3 中的标量 a 和 b 现在是任意复数。

加上自伴的条件后，我们就有复值函数的 Stone-Weierstrass 定理：

定理 2.6.16.（复值函数的 Stone-Weierstrass 定理）

设 X 为紧 Hausdorff 空间，$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 为分离点且无处消失的复子代数。如果 $\mathcal{A}$ 还是自伴的，那么 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 中是稠密的。

事实上，有了自伴性的假设，可以证明 $f+\bar{f}$ 和 $i(f-\bar{f})$ 是分离点的实值函数，从而可以用实值函数情形的 Stone-Weierstrass 定理。细节留作练习。

¶ LCH 空间的 Stone-Weierstrass 定理

到现在为止我们都是考虑紧 Hausdorff 空间上的 Stone-Weierstrass 定理，从证明中我们也可以看到，紧性起到了至关重要的作用。对于一般的非紧空间，Stone-Weierstrass 定理是不成立的。然后，对于在分析中起到重要作用的 LCH 空间，我们依然可以证明 Stone-Weierstrass 定理的一个变体。之所以对于非紧的 LCH 空间，依然可以证明某种 Stone-Weierstrass 定理，其原因在第 2.5 节的习题中已经出现了：根据非紧 LCH 空间的结构定理，只要对非紧 LCH 空间做单点紧致化，就可以得到紧 Hausdorff 空间，从而可以应用紧 Hausdorff 空间上的 Stone-Weierstrass 定理. 为此，对任意非紧 LCH，我们考虑空间

$$\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}) \mid \text{任意}\varepsilon > 0, \text{存在紧集}K \subset X\text{使得在}K^c\text{上有}|f(x)| < \varepsilon\}.$$

我们称 $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ 里的元素为**在无穷远处消失的函数**. 可以证明，它是一个代数. 另外，易见 $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ 是有界连续函数空间 $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(X,\mathbb{R}), d_\infty)$ 的一个闭子空间，从而 d_∞ 是 $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ 上的一个完备度量. 应用上面所提及的单点紧致化以及定理2.6.13，不难证明

定理 2.6.17.（非紧 LCH 上的 Stone-Weierstrass 定理）

设 X 是一个非紧 LCH 空间. 若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ 中的一个无处消失且分离点的子代数，则 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{C}_0(X,\mathbb{R})$ 中稠密.

细节留作习题.

¶【阅读材料】一个长长的注记：拓扑的代数化

回到紧 Hausdorff 空间 X 的情况。注意 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 是关于范数

$$\|f\|_\infty := d_\infty(f,0).$$

的 Banach 空间。显然，如果 X,Y 是同胚的拓扑空间，则 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 和 $\mathcal{C}(Y,\mathbb{C})$ 作为 Banach 空间是同构的：若 $\phi: X\to Y$ 是一个同胚映射，我们考虑拉回映射

$$T:\mathcal{C}(Y,\mathbb{C})\to\mathcal{C}(X,\mathbb{C}),\quad Tf(x):=f(\phi(x)),$$

则易验证它是向量空间 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 和 $\mathcal{C}(Y,\mathbb{C})$ 之间的保范线性同构：

$$\|T(f)\|_\infty=\sup_{x\in X}|Tf(x)|=\sup_{x\in X}|f(\phi(x))|=\sup_{y\in Y}|f(y)|=\|f\|_\infty.$$

反之，Banach 和 Stone 证明了 $\mathcal{C}(X_1,\mathbb{C})$ 事实上决定了 X：[24]，

定理 2.6.18.（Banach-Stone 定理）

两个紧 Hausdorff 空间 X_1 和 X_2 是同胚的当且仅当 Banach 空间 $\mathcal{C}(X_1,\mathbb{C})$ 和 $\mathcal{C}(X_2,\mathbb{C})$ 是同构的。♡

事实上，$\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 除了是 Banach 空间（即有向量空间结构、范数结构且度量完备）外，还有乘积结构（从而是一个代数）和共轭，且这些结构都是“相容的”，例如

$$\|fg\|\le\|f\|\cdot\|g\|\quad\text{且}\quad\|\bar{f}f\|^2=\|f\|^2.$$

对这样的对象，我们称之为 C^*-代数：

定义 2.6.19.（C^*-代数）

设 $(\mathcal{A},+,\cdot)$ 是一个复结合代数.

(1) 若 $\mathcal{A}$ 上具有**对合**运算 $*:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$，使得
- $x^{**}=x$,
- $(x+y)^*=x^*+y^*, (xy)^*=y^*x^*$,
- $(\lambda x)^*=\bar{\lambda}x^*$.

则我们称 $(\mathcal{A},+,\cdot,*)$ 是一个 **$*$-代数**.

(2) 若 $\mathcal{A}$ 上面有范数 $\|\cdot\|$，使得 $(\mathcal{A},+,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 空间, 且

$$\|xy\|\le\|x\|\|y\|,$$

则我们称 $(\mathcal{A},+,\cdot,\|\cdot\|)$ 是一个 **Banach 代数**.

(3) 若 $(\mathcal{A},+,\cdot,*)$ 是一个$*$-代数，$(\mathcal{A},+,\cdot,\|\cdot\|)$ 是一个 Banach 代数，且 $*$-代数结构和 Banach 范数结构相容，即

$$\|x^*x\|=\|x^*\|\|x\|,$$

则我们称 $(\mathcal{A},+,\cdot,*,\|\cdot\|)$ 是一个 **C^*-代数**.

(4) 若 C^*-代数 $(\mathcal{A},+,\cdot,*,\|\cdot\|)$ 里的乘法是交换的，即 $xy=yx$，则我们称它为一个**交换 C^*-代数**. ♣

[24] 1932 年 Banach 对紧度量空间证明了该定理，后来 1937 年 M.Stone 将结论推广到了紧 Hausdorff 空间.

所以 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 是一个含幺交换 C^*-代数。事实上，前苏联数学家 I. Gelfand [25] 和 M. Naimark 在 1943 年证明了：任何（抽象）含幺交换 C^*-代数都是以这种方式出现的，并给出了从 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$ 到 X 的显式构造：

定理 2.6.20.（Gelfand-Naimark 定理，交换版本）

对任意含幺交换 C^* 代数 $\mathcal{A}$，都存在紧 Hausdorff 空间 X 使得 $\mathcal{A}$ 同构于 $\mathcal{C}(X,\mathbb{C})$. ♡

证明概要如下：考虑由 $\mathcal{A}$ 的非零**特征**$\phi:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$（也称为代数同态，即保乘法的线性泛函）所组成的集合 Σ. 可以证明

- 首先证明每个特征 ϕ 都是连续映射，于是每个特征都是 Banach 空间 $\mathcal{A}$ 的对偶空间 $\mathcal{A}^*$ 中的一个元素.
- 接着证明每个特征 ϕ 在 $\mathcal{A}^*$ 中都有（对偶）范数 ≤ 1，于是 Σ 事实上是 $\mathcal{A}^*$ 中的闭单位球 $\overline{B(\mathcal{A}^*)}$ 的子集。
- 然后证明 Σ 关于弱-* 拓扑是 $\overline{B(\mathcal{A}^*)}$ 的子集. 根据第 2.2 节证明的 Banach-Alaoglu 定理，$\overline{B(\mathcal{A}^*)}$ 是关于弱-* 拓扑的紧 Hausdorff 空间，因此 Σ（关于弱-* 拓扑）也是紧 Hausdorff 的。
- 最后证明 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{C}(\Sigma,\mathbb{C})$ 同构：对 $\mathcal{A}$ 中的每个元素，由 Gelfand 变换给出从 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{C}(\Sigma,\mathbb{C})$ 的同构，该变换把 $a\in\mathcal{A}$ 通过赋值映射映为 $\mathcal{C}(\Sigma,\mathbb{C})$ 中的元素 $\hat{a}$，即 $\hat{a}(\phi):=\phi(a)$.

于是，由函数所组成的代数和作为背景的几何空间之间也存在了一种相互决定的对偶关系，人们可以通过研究函数代数而得到背景空间的所有信息。这样的对偶关系不仅出现在拓扑中，也出现在别的学科如代数几何中。更进一步地，数学家们将这种“对偶性”思想延拓到研究更复杂的非交换代数，并由此导向了一个新的数学分支：**非交换几何学**。

[25]盖尔范德（Israel M. Gelfand，1913-2009），出生于乌克兰的前苏联/俄罗斯著名数学家，被誉为 20 世纪最伟大的数学家之一，对群论、表示论、泛函分析、调和分析、积分几何等多个数学分支以及数学教育做出了重大贡献。他在 1978 年获得了第一届 **Wolf 奖**，曾先后三次获得 **列宁勋章**.

2.7 可数性公理

2.7.1 可数性公理

在前面几节中，我们仔细研究了拓扑中的“有限性”即紧性。紧空间可以被视为仅由有限多个“拓扑元件”（即开集）就可以构建出来的空间，而我们已经一再看到，这样的有限性是如何帮助我们从局部性质过渡到整体性质。

跟有限相对的是无限。一般而言，无限是很难处理的。但我们也已经多次看到，有一种最简单的无限性是我们往往是可以处理的，即可数性。所以接下来我们转而讨论拓扑中的可数性特征。

¶ 第一可数空间

事实上，我们对可数性并不陌生. 回忆一下，在定义 1.123 里我们把具有可数邻域基的拓扑空间称为第一可数空间, 或者简称为 (A1)-空间. 换而言之，

$$X \text{ 是 (A1) 空间 } \Longleftrightarrow \forall x \in X, \text{存在 } x \text{ 的邻域} \{U_n^x\}_{n\in\mathbb{N}} \text{使得 } x \text{ 每个开邻域 } U \text{ 都包含某个 } U_k^x.$$

注意若 X 是第一可数的，那么对于每个点，我们都可以选择一个可数邻域基 $\{U_n^x\}$ 使得

$$U_1^x \supset U_2^x \supset U_3^x \supset \cdots, \tag{2.7.1}$$

因为如果 $\{V_1^x, V_2^x, \cdots\}$ 是 x 处的一个可数邻域基，那么可以取

$$U_1^x = V_1^x,\ \ U_2^x = V_1^x \cap V_2^x,\ \ U_3^x = V_1^x \cap V_2^x \cap V_3^x,\ \cdots.$$

则 $\{U_1^x, U_2^x, \cdots\}$ 是 x 的一个可数邻域基，且满足 (2.7.1).

我们已经看到第一可数空间有很多很好的性质，比如

- (命题 1.124)(A1) 空间 X 的子集 $F \subset X$ 是闭集当且仅当包含其所有序列极限点.
- （第 1.5 节习题）若 X 是 (A1) 的，则任何序列连续映射 $f: X \to Y$ 是连续的.
- （命题2.3.26）如果 X 是 (A1) 的并且还是 Hausdorff 的, 则 X 中的极限点紧子集都是列紧的.

例 2.7.1. 以下是 (A1)-空间和非 (A1)-空间的一些例子。

(1) 度量空间都是第一可数的，因为我们可以取 $U_n^x = B(x, \frac{1}{n})$.

(2) Sorgenfrey 直线 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey})$ 是第一可数的，可以取 $U_n^x = [x, x+\frac{1}{n})$.

(3) 空间 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ 不是第一可数的: 对任意一列 x 的开邻域 $\{U_x^n\}$, 集合 $\bigcap_n U_x^n$ 依然是 x 的一个开邻域. 令 U 为从 $\bigcap_n U_x^n$ 中去掉一个不同于 x 的点所得的集合，则 U 是 x 的一个开邻域，且它不包含任何一个 U_x^n.

(4) 空间 $(\mathcal{M}([0,1],\mathbb{R}), \mathscr{T}_{p.c.})$ 不是第一可数的, 因为我们在例 1.119 中已经看到，该空间里存在非闭子集

$$A = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{ 仅对可数多的 } x \text{ 有 } f(x) \neq 0\}$$

包含其所有序列极限点。

¶ 第二可数空间

对于欧氏空间 $\mathbb{R}^n$，我们在注 1.73 中看到，它不仅在每个点 x 处有一个可数邻域基，而且它有一个只包含可数个开集的拓扑基，

$$\mathcal{B}=\{B(x,r)\mid x\in\mathbb{Q}^n,r\in\mathbb{Q}_{>0}\}.$$

这是一个更强的可数性性质，值得为之命名：

定义 2.7.2.（第二可数性公理）

如果拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 有一个可数基，即存在可数个开集 $\{U_1,U_2,U_3,\cdots\}$ 构成 $\mathscr{T}$ 的一个拓扑基，则我们称 X 满足**第二可数性公理**，或者说它是**第二可数的**，简称为 **(A2)-空间**. ♣

显然，任何第二可数空间都是第一可数空间。但反之则不成立，例如，$(\mathbb{R},\mathscr{T}_{discrete})$ 是一个度量空间，从而是第一可数空间，但它不是第二可数空间。

有一大类度量空间是第二可数的：

命题 2.7.3.（完全有界 $\Longrightarrow$ 第二可数）

任何一个完全有界的度量空间都是第二可数的。♠

证明 假设 (X,d) 是完全有界的。根据定义，对于任意 n，都存在一个有限的 $\frac{1}{n}$-网，即存在有限多个点 $x_{n,1},x_{n,2},\cdots,x_{n,k(n)}\in X$ 使得

$$X=\bigcup_{i=1}^{k(n)}B(x_i,\frac{1}{n}).$$

我们断言可数开集族

$$\mathcal{B}:=\{B(x_{n,i},1/n)\mid n\in\mathbb{N},1\leqslant i\leqslant k(n)\}$$

是度量拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个拓扑基。为了证明这一点，我们取任意开集 U 和任意点 $x\in U$。则 $\exists\varepsilon>0$ 使得 $B(x,\varepsilon)\subset U$. 现在我们选取 $n\in\mathbb{N}$ 和 $1\le i\le k(n)$ 使得

$$1/n<\varepsilon/2\quad \text{且}\quad d(x,x_{n,i})<1/n.$$

由此得

$$B(x_{n,i},1/n)\subset B(x,2/n)\subset B(x,\varepsilon)\subset U,$$

故可数族 $\mathcal{B}$ 是一个拓扑基。 □

由于紧度量空间都是完全有界的，因此我们得到推论

推论 2.7.4.（紧度量空间 $\Longrightarrow$ 第二可数）

任何一个紧度量空间都是第二可数的. ♡

例 2.7.5. 考虑空间 $X=[0,1]^{\mathbb{N}}=\{(x_1,x_2,\cdots)\mid x_i\in[0,1]\}$.

(1) $(X,\mathscr{T}_{product})$ 是第二可数的：我们在第 2.2 节习题中看到，X 上的乘积拓扑 $\mathscr{T}_{product}$ 是一个度量拓扑. 因此 $(X,\mathscr{T}_{product})$ 是一个紧度量空间，从而是第二可数的。该空间同胚于例 1.6(3) 中的 Hilbert 立方体，因此我们也称它为 **Hilbert 立方体**.

(2) $(X, \mathscr{T}_{box})$ 不是第一可数的 (因此也不是第二可数的): 我们用反证法以及标准的对角线技巧. 设 $\{U_n(x)\}$ 是 $(X, \mathscr{T}_{box})$ 在 $x = (x_i)$ 处的一个可数邻域基. 则存在 $[0,1]$ 中 x_i 的开邻域 $U_i^{(n)}(x_i)$，使得

$$\prod_i U_i^{(n)}(x_i) \subset U_n(x), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

取 $\widetilde{U}_i^{(i)}(x_i) \subsetneq U_i^{(i)}(x_i)$ 是 $[0,1]$ 中包含 x_i 的严格更小的开邻域。则集合

$$U := \prod_i \widetilde{U}_i^{(i)}(x_i)$$

是箱拓扑中点 (x_n) 的开邻域，但它不包含任意 $U_n(x)$，矛盾。

¶ 可分空间

如果我们仔细审视一下我们上面所构造的欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的可数基，即

$$\mathcal{B} = \{B(x,r) \mid x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0}\},$$

我们会发现一个关键的原因是 $\mathbb{R}^n$ 里存在一个可数稠密子集 $\mathbb{Q}^n$. 事实上，这是第二可数空间的共同特征:

命题 2.7.6. (第二可数 $\Longrightarrow$ 可分)

任何第二可数拓扑空间都包含一个可数稠密子集.

证明 设 $\{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ 是 $(X, \mathscr{T})$ 的一个可数基. 对于每个 n, 我们选取一个点 $x_n \in U_n$. 令

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

则 A 是 X 中的可数子集。对于任意 $x \in X$ 和 x 的任意开邻域 U, 存在 n 使得 $x \in U_n \subset U$. 特别地, $U \cap A \neq \emptyset$. 所以由命题 1.135，$\overline{A} = X$. □

注意我们实际上证明了

> 在任意拓扑空间中，都存在一个稠密子集，其基数 (即**势**) 不超过拓扑基的基数.

“存在可数稠密子集”是一种新的可数性，我们给它一个定义:

定义 2.7.7. (可分空间)

如果拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 包含一个可数稠密子集，则我们称 X 为 **可分空间**.

所以命题2.7.6可以被表述为“第二可数的拓扑空间都是可分的”。反之并不成立:

例 2.7.8. $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey})$ 是可分的，但不是第二可数的:

(1) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey})$ 是可分的: 在 Sorgenfrey 拓扑下 $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, 因为对任意 $x \in \mathbb{R}$ 和任意区间 $[x, x+\varepsilon)$, 我们都有 $r \in [x, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

(2) $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey})$ 不是第二可数的: 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathscr{T}_{sorgenfrey}$ 的任意一个拓扑基。则 $\forall x \in \mathbb{R}$, 存在开集 $B_x \in \mathcal{B}$ 使得

$$x \in B_x \subset [x, x+1),$$

由此可得 $x = \inf B_x$. 于是我们得到一个从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathbb{R}$ 的单射，故 $\mathcal{B}$ 是一个不可数族.

然而，对于度量空间而言，这两者是等价的：

命题 2.7.9.（度量空间：第二可数 $\iff$ 可分）

度量空间 (X,d) 是第二可数的当且仅当它是可分的。

证明 设 (X,d) 是一个可分的度量空间，$A=\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ 是一个可数稠密子集。则

$$\mathcal{B}=\{B(x_n,1/m)|n,m\in\mathbb{N}\}$$

是度量拓扑的一个可数基。 □

注 2.7.10. 可分性是泛函分析中一个非常有用的概念，常被用于证明某些紧性结果。另一个众所周知的结果是

一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 是可分的 $\iff$ 它有一个可数正交基。

利用这个事实很容易构造不可分的希尔伯特空间。例如，令

$$\widetilde{l^2(\mathbb{R})}=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid \text{仅对可数多的 } x \text{ 有 } f(x)\neq 0\text{，且}\sum_x |f(x)|^2<\infty\}.$$

在 $\widetilde{l^2(\mathbb{R})}$ 上可以定义内积

$$\langle f,g\rangle:=\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)g(x),$$

该内积诱导了一个度量结构. 对该空间进行度量完备化，由此所得到的希尔伯特空间没有可数正交基.

¶ Hilbert 方体作为紧度量空间的“通用”模型

粗略地说，可分性意味着你可以使用可数多的数据来“重构”整个空间：

定理 2.7.11.（紧度量空间 =Hilbert 立方体的闭子空间）

任意紧度量空间 (X,d) 都同胚于 Hilbert 立方体 $([0,1]^{\mathbb{N}},d)$ 的某个闭子集.

证明 因为 X 是紧空间，所以它有界。通过缩放度量 d，我们可以假设 $\mathrm{diam}(X)\leqslant 1$. 由推论2.7.4以及命题2.7.9，$X$ 是可分的. 设 $A=\{x_n|n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 中的可数稠密子集。定义

$$F:X\to[0,1]^{\mathbb{N}},\quad x\mapsto(d(x,x_1),d(x,x_2),\cdots,d(x,x_n),\cdots).$$

则有：

- F 是连续的，因为 $\mathscr{T}_d=\mathscr{T}_{product}$，且每个 $\pi_n\circ F=d(x,x_n)$ 都是连续的。
- F 是单射：如果 $F(x)=F(y)$，则对所有 n 有 $d(x,x_n)=d(y,x_n)$. 由于 A 是稠密的，所以存在 $x_{n_k}\to x$. 由 d 的连续性，

$$d(x,y)=\lim_{k\to\infty}d(x_{n_k},y)=\lim_{k\to\infty}d(x_{n_k},x)=0.$$

- $([0,1]^{\mathbb{N}},\mathscr{T}_{product})$ 是 Hausdorff 的，因为它是一个度量空间。

因此由推论2.1.21，作为从紧空间到 Hausdorff 空间的连续双射，

$$F:X\to F(X)\subset[0,1]^{\mathbb{N}}$$

是同胚。最后，作为 Hausdorff 空间中的紧子集，$F(X)$ 是闭的. □

¶ 其他可数性概念

还有几个常见的跟紧性密切相关的可数性概念。我们在第 2.1 节习题中见过可数紧性的概念，它可以被视为是一个跟可数性相关的紧性概念。同时，我们也有一些跟紧性相关的可数性概念，比如

- σ-紧性（见定义2.5.11）.
- Lindelöf[26]空间，定义如下：

定义 2.7.12.（Lindelöf 空间） 如果拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$ 都存在可数子覆盖，则我们称 X 为 **Lindelöf 空间**. ♣

显然，如果一个拓扑空间既是 Lindelöf 空间又是可数紧空间，则它是紧空间.

由定义不难证明 Lindelöf 性质是一种比第二可数或者 σ-紧更弱的可数性：

命题 2.7.13.（Lindelöf 弱于 (A2) 以及 σ-紧）
(1) 任意 (A2) 空间是 Lindelöf 空间.
(2) 任意 σ-紧空间是 Lindelöf 空间. ♠

注意反过来并不成立，例如

- 由 Tychonoff 定理，$([0,1]^{[0,1]}, \mathscr{T}_{product})$ 是紧空间，从而自然也是 Lindelöf 空间，但它不是 (A2) 空间，甚至不是 (A1)-空间.
- $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cocountable})$ 是 Lindelöf 空间但不是 σ-紧空间 (参见例2.4.11).

下面列举 Lindelöf 空间的几个常用性质，证明留作习题：

命题 2.7.14.（Lindelöf 空间的性质）
(1) Lindelöf 空间的闭子空间一定是 Lindelöf 空间.
(2) Lindelöf 空间在连续映射下的像集是 Lindelöf 空间.
(3) 度量空间是 Lindelöf 空间当且仅当它是 (A2) 空间. ♠

于是如同紧性一样，Lindelöf 空间的子空间不一定是 Lindelöf 空间（因为任意空间都有单点紧致化），但其闭子空间依然是 Lindelöf 的. 另一方面，跟紧性截然不同的是，在习题中我们将会看到，两个 Lindeloöf 空间的乘积空间不一定是 Lindelöf 的.

[26]林德勒夫（E. Lindelöf, 1870-1946），芬兰数学家，主要研究实分析、复分析、拓扑学。

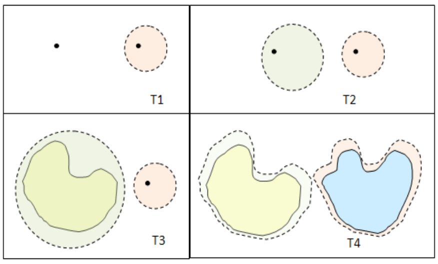
2.8 分离性公理

我们在本书开头就提过，发展拓扑学的动机之一是理解分析学里面的核心概念如收敛性和连续性，从而可以进一步在抽象空间上应用分析的思想和手段处理问题。在分析里面，我们往往需要假定可以用开集来分隔特定的子集。例如，我们希望收敛列的极限唯一，于是我们需要假定空间里任意两点可以被开集分离，即空间满足 Hausdorff 性质，参见命题2.1.18. 又如，在命题2.4.16中我们证明了在 LCH 空间中，紧集和闭集可以分离，并提到了该性质在处理 LCH 空间上的分析问题是作用巨大。

2.8.1 分离性公理

¶ 四个分离性公理

在拓扑中，我们把“用（不相交的）开集来分离某些不相交的集合”这样一类性质称为“分离性公理”．【注意，它与上一节可数性公理里面的可分性概念是非常不同!】分离性公理有很多，我们下面列举四种常用的分离性，其中两个我们已经见过：[27]



定义 2.8.1.（分离性公理）

设 X 是拓扑空间。

(1) 若对于任意 $x \neq y$，存在 X 中的开集 U, V 使得

$$x_1 \in U \setminus V \quad \text{且} \quad x_2 \in V \setminus U,$$

则我们称 X 为 **Frechét 空间**，简称为 **T1 空间**.

(2) 若对于任意 $x \neq y$，存在 X 中的开集 U, V 使得

$$x_1 \in U, \quad x_2 \in V, \quad \text{且} \quad U \cap V = \emptyset,$$

则我们称 X 为 **Hausdorff 空间**，简称为 **T2 空间**.

(3) 若对于任意闭集 A 以及任意点 $x \notin A$，存在 X 中的开集 U, V 使得

$$A \in U, \quad x \in V, \quad \text{且} \quad U \cap V = \emptyset,$$

则我们称 X 为**正则空间**，简称为 **T3 空间**.

(4) 若对于任意不交闭集 $A \cap B = \emptyset$，存在 X 中的开集 U, V 使得

$$A \in U, \quad B \in V, \quad \text{且} \quad U \cap V = \emptyset,$$

则我们称 X 为**正规空间**，简称为 **T4 空间**. ♣

[27]分离公理往往简称为 (Tn)，其中字母“T”来自德语单词“Trennungsaxiom”，意思是“分离公理”。

注 2.8.2. 在不同的文献中，“正则”、“(T3)”、“正规”、“(T4)” 可能有不同的含义。在文献中至少有 20 种不同的分离公理。根据维基百科，“一般拓扑学中分离公理的历史是错综复杂的，许多不同的含义争相使用相同的术语，而许多不同的术语争相表达相同的概念”。例如，在某些书中，“正则” 或 “(T3)” 表示同时满足我们上述定义中的 (T1) 和 (T3)，而 “正规” 或 “(T4)” 意味着同时满足我们上述定义中 (T1) 和 (T4); 还有一些书则区分正则和 (T3), 比如 “正则” 与我们的这里的意思相同，而 “(T3)” 却意味着在我们上述定义中的 “(T1) 和 (T3)”，并以类似的方式区分 “正规” 和 “(T4)” 的含义。

从这些定义中，大家不难想到：是否可以定义紧集与紧集的分离，或者紧集与闭集的分离？事实上，通过标准的紧性论证，不难发现 “不相交的紧集可分离” 等价于 Hausdorff 性质，“不相交的紧集与闭集可分离” 等价于正则性。细节留作习题。

¶ 等价刻画

我们首先给出上述各个分离公理的等价刻画：

命题 2.8.3.（分离公理的等价刻画）

设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间。则

(1) $(X,\mathscr{T})$ 是 (T1) 当且仅当

$$\boxed{\text{任意单点集 } \{x\} \text{ 是闭集.}}$$

(2) $(X,\mathscr{T})$ 是 (T2) 当且仅当

$$\boxed{\text{对角线集合 } \Delta=\{(x,x)|x\in X\} \text{ 在 } X\times X \text{ 中是闭集}}$$

(3) $(X,\mathscr{T})$ 是 (T3) 当且仅当

$$\boxed{\forall x\in X \text{ 以及包含 } x \text{ 的开集 } U, \exists \text{ 开集 } V \text{ 使得 } x\in V\subset\overline{V}\subset U.}$$

(4) $(X,\mathscr{T})$ 是 (T4) 当且仅当

$$\boxed{\forall \text{ 闭集 } A\subset X \text{ 以及包含 } A \text{ 的开集 } U, \exists \text{ 开集 } V \text{ 使得 } A\subset V\subset\overline{V}\subset U.}$$

证明 证明是标准的, (1) 和 (2) 根据定义得到, 而 (3) 和 (4) 根据开-闭对偶得到:

1. ($\Rightarrow$) 对 $\forall y\neq x, \exists U_y\in\mathscr{T}$ 使得 $x\notin U_y$. 所以

$$\{x\}^c=\bigcup_{y\neq x}U_y$$

   是开集, 即 $\{x\}$ 是闭集。

   ($\Leftarrow$) 对于 $\forall x\neq y$, 取

$$U=\{y\}^c \quad \text{和} \quad V=\{x\}^c.$$

   则 $x\notin V, y\notin U$ 且 $x\in U, y\in V$.

2. ($\Rightarrow$) 对 $\forall x\neq y$, (T2) 意味着 $\exists\, X\times X$ 中的开集 $U_x\times V_y$ 使得

$$(x,y)\in U_x\times V_y \quad \text{且} \quad \Delta\cap(U_x\times V_y)=\emptyset.$$

所以 Δ^c 是开集, 即 Δ 是闭集。

($\Leftarrow$) 对于 $\forall x \neq y$, 即 $(x,y) \in \Delta^c$, $\exists$ 开集 $U \ni x, V \ni y$ 使得

$$(x,y) \in U \times V \subset \Delta^c.$$

由此 $U \cap V = \emptyset$, 因为如果 $z \in U \cap V$, 则

$$(z,z) \in (U \times V) \cap \Delta = \emptyset.$$

3. ($\Rightarrow$) 假设 $x \in$ 开集 U，即 $x \notin$ 闭集 U^c，则存在 $V_1, V_2 \in \mathscr{T}$ 使得

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset,\ x \in V_1,\ 且 U^c \subset V_2.$$

所以 $x \in V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_2^c \subset U$.

($\Leftarrow$) 设 $x \notin$ 闭集 A，即 $x \in$ 开集 A^c，则存在 $V \in \mathscr{T}$ 使得 $x \in V \subset \overline{V} \subset A^c$. 由此

$$V \cap \overline{V}^c = \emptyset,\ x \in V,\ 且 A \subset \overline{V}^c.$$

4. ($\Rightarrow$) 设 $A \subset$ 开集 U , 则 $A \cap U^c = \emptyset$. 所以存在 $V_1, V_2 \in \mathscr{T}$ 使得

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset,\ A \subset V_1,\ 且 U^c \subset V_2.$$

所以 $A \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset V_2^c \subset U$.

($\Leftarrow$) 设 A, B 是闭集且 $A \cap B = \emptyset$. 则 $A \subset$ 开集 B^c. 所以存在 $V \in \mathscr{T}$ 使得 $A \subset V \subset \overline{V} \subset B^c$. 由此

$$V \cap \overline{V}^c = \emptyset,\ A \subset V\ 且 B \subset \overline{V}^c.$$ □

¶ 不同分离公理之间的关系

我们可以研究这些分离公理之间的关系。显然我们有

- $\boxed{\text{(T2)} \Longrightarrow \text{(T1)}}$,

反之，其他的蕴含关系都不成立:

- $\boxed{\text{(T1)} \not\Rightarrow \text{(T2)}}$, $\boxed{\text{(T1)} \not\Rightarrow \text{(T3)}}$, $\boxed{\text{(T1)} \not\Rightarrow \text{(T4)}}$: 反例为 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{cofinite})$.
- $\boxed{\text{(T4)} \not\Rightarrow \text{(T3)}}$, $\boxed{\text{(T4)} \not\Rightarrow \text{(T2)}}$, $\boxed{\text{(T4)} \not\Rightarrow \text{(T1)}}$: 反例为 $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$, 其中

$$\mathscr{T} = \{(-\infty, a) | a \in \mathbb{R}\}.$$

[它是 (T4) 的，因为其中根本不存在不相交的闭集]

- $\boxed{\text{(T3)} \not\Rightarrow \text{(T2)}}$, $\boxed{\text{(T3)} \not\Rightarrow \text{(T1)}}$: 反例为 $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$, 其中 $\mathscr{T}$ 由拓扑基

$$\mathcal{B} = \{[n, n+1) | n \in \mathbb{Z}\}$$

生成。在这个拓扑中, 闭子集和开子集是一样的。

- $\boxed{\text{(T2)} \not\Rightarrow \text{(T4)}}$, $\boxed{\text{(T2)} \not\Rightarrow \text{(T3)}}$: 反例为 $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$，其中 $\mathscr{T}$ 是由子基

$$\mathcal{S} = \{(a,b) | a, b \in \mathbb{Q}\} \cup \{\mathbb{Q}\}$$

生成的. 在该拓扑中，$\mathbb{Q}^c$ 是闭集但不能与 $\{0\}$ 分离。

- $\boxed{\text{(T3)} \not\Rightarrow \text{(T4)}}$: 反例为 Sorgenfrey 平面 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey}) \times (\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey})$. [细节参见 Munkres《拓扑学》第 31 节.]

2.8.2 分离性的增强

虽然在这四个分离公理里面，仅有 (T2) 蕴含 (T1)，但我们还是可以粗略地认为 (T4)"强于"(T3)，(T3)"强于"(T2)，(T2) 强于 (T1). 至少，我们有

$\boxed{\text{(T1)+(T4)} \Longrightarrow \text{(T3)}}$，$\boxed{\text{(T1)+(T3)} \Longrightarrow \text{(T2)}}$ 【于是 $\boxed{\text{(T1)+(T4)} \Longrightarrow \text{(T2)}}$】

事实上，紧性、可数性也可以用于"增强"分离性.

¶ 紧性"增强"分离公理

我们首先通过标准的"局部到整体"论证，证明紧性如何"增强"分离公理:

命题 2.8.4. ($\boxed{\text{紧} + \text{(T2)} \Longrightarrow \text{(T3)}}$)

任何紧 Hausddorff 空间都是正则空间。

证明 设 X 是紧 Hausdorff 空间, $x \in X, A \subset X$ 是闭集 (因此也是紧集)，且 $x \notin A$. 则对于任意 $y \in A$，存在开集 $U_{x,y} \ni x, V_y \ni y$ 使得 $U_{x,y} \cap V_y = \emptyset$. 由 A 的紧性，$\exists V_{y_1}, \cdots, V_{y_n}$ 覆盖 A。因此

$$U := U_{x,y_1} \cap \cdots \cap U_{x,y_n} \quad \text{和} \quad V := V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$$

分别是 x 和 A 的开邻域，且满足 $U \cap V = \emptyset$. □

命题 2.8.5. ($\boxed{\text{紧} + \text{(T3)} \Longrightarrow \text{(T4)}}$)

任何紧正则空间都是正规空间.

证明 设 X 是紧正则空间，A, B 是 X 中不相交的闭子集。则对于任意 $x \in A$, 存在开集 $U_x \ni x, V_x \supset B$ 使得 $U_x \cap V_x = \emptyset$. 由紧性, $\exists U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}$ 覆盖 A. 因此

$$U := U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} \quad \text{且} \quad V := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$$

是 x 和 A 的开邻域，且 $U \cap V = \emptyset$. □

作为这两个命题的推论，我们得到如下非常有用的

定理 2.8.6. ($\boxed{\text{紧} + \text{(T2)} \Longrightarrow \text{(T4)}}$)

任何紧 Hausdorff 空间都是 (T4) 空间。

¶ 局部紧性"增强"分离公理 (T2)

事实上，命题 2.8.4中的条件"紧性"可以被减弱为"局部紧性"，从而有下面更强的

命题 2.8.7. ($\boxed{\text{局部紧} + \text{(T2)} \Longrightarrow \text{(T3)}}$)

任意局部紧的 Hausdorff 空间是正则的.

证明 设 X 是局部紧正则空间，$x \in U$. 由命题2.4.16. 存在 X 的开集 V 使得 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$，因此 X 是 (T3) 空间. □

¶ 可数性“增强”分离公理 (T3)

把命题 2.8.5证明中“从有限个局部过渡到整体”的过程稍加修改，可以“从可数个局部到过渡整体”，从而证明下面更一般的“可数性增强分离公理”命题

命题 2.8.8. ($\boxed{\text{Lindelöf} + (T3) \Longrightarrow (T4)}$)

任意 Lindelöf 正则空间是正规的.

注意作为推论, 由命题2.7.13我们有

$$\boxed{(A2) + (T3) \Longrightarrow (T4)}, \qquad \boxed{\sigma \text{ 紧} + (T3) \Longrightarrow (T4)}.$$

证明 设 X 是 Lindelöf 且正则的拓扑空间, A, B 是 X 中的不相交闭子集。由命题2.7.14, Lindeöf 性质具有“闭遗传性”，即闭子集 A, B 也是 Lindelöf 空间. 因为 X 是 (T3)，所以 $\forall x \in A, \exists$ 开集 V_x 使得

$$x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset B^c.$$

由于这些 V_x 覆盖了 Lindeöf 的 A，我们可以选择覆盖 A 的可数子覆盖 $V_1, V_2, \cdots$. 同理，可以找到可数多开集 $U_1, U_2, \cdots$ 覆盖 B 使得 $U_i \subset \overline{U_i} \subset A^c$. 令

$$G_n := V_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}) \quad \text{和} \quad H_n := U_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}).$$

则

$$A \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n) \cap (\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{U_i}^c) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{U_i}^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$$

类似地我们有

$$B \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m.$$

最后，

$$(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} H_m) = \emptyset,$$

因为对所有 n, m，根据构造我们有 $G_n \cap H_m = \emptyset$. □

注 2.8.9. 存在复杂的反例表明

- 局部紧正则空间不一定是正规空间。
- Lindelöf 且 Hausdorff 空间不一定是正则空间.

2.8 Urysohn 引理与 Urysohn 度量化定理

我们知道，相比于一般的拓扑空间，度量空间有很多非常特殊而优美的性质．一个自然的问题是：哪些拓扑空间的拓扑实际上是一个度量拓扑？这个问题的第一个重要结果是由杰出拓扑学家 Urysohn [28]所证明的 Urysohn 度量化定理．在证明过程中，Urysohn 先证明了一个很重要的工具，即用于构造特定连续函数的 Urysohn 引理．不少数学家称 Urysohn 引理为“点集拓扑学的第一个非平凡结果”．它之所以被称为“引理”，只是因为它最早作为工具出现在 Urysohn 证明 Urysohn 度量化定理的论文中．后面我们还会看到它的很多应用．

2.8.1 Urysohn 引理

¶ Urysohn 引理

我们知道，正规空间所刻画的性质是“不相交的闭集可以被开集分离”。粗略地来说，Urysohn 引理告诉我们

“用开集分离不相交的闭集 $\Longleftrightarrow$ 用连续实值函数分离不相交的闭集.”

我们先给出 Urysohn 引理的完整叙述：

定理 2.8.1.（Urysohn 引理）

拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 是正规的当且仅当对 X 中任意不相交的闭集 A,B，存在连续函数 $f:X\to[0,1]$ 使得

$$f(A)=0 \quad 且 \quad f(B)=1.$$

♡

Urysohn 引理是拓扑学中一个非常重要的工具，可以用它构造满足特定性质的连续函数. 例如，根据 Urysohn 引理，对于任意紧 Hausdorff 空间（从而是正规空间）的任意两个不同的点 x 和 y，都可以找到连续函数 $f\in\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 使得 $f(x)=0, f(y)=1$. 特别地，对于紧 Hausdorff 空间 X，连续函数代数 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ 是分离点的. 我们在接下来还将看到如何使用 Urysohn 引理构造连续函数来证明 Urysohn 度量化定理，以及如何应用 Urysohns 引理延拓连续函数的定义域，即 Tietze 延拓定理.

注意对于度量空间，Urysohn 引理的证明是很简单的，因为对于度量空间，我们已经有一个非常好的连续函数——距离函数，从而我们可以直接使用（参见第 1.1 节习题）

$$f(x)=\frac{d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)}. \tag{2.8.1}$$

但是，对于一般的正规空间，构造连续函数是不平凡的. 我们如何在一个抽象拓扑空间上构造连续函数呢？证明的**核心想法**是：函数是由它的“等高线”（即水平集）刻画的. 于是，要构造一个连续函数，我们只要为它指定足够密集 [且足够好] 的“等高线”．当然，

[28]乌雷松（Pavel Urysohn，1898-1924），前苏联数学家．他是著名数学家 N. Luzin 的学生，1921 年博士毕业（研究方向是积分方程）后转向拓扑学的研究，1924 年在法国 Brittany 海岸游泳时不幸溺水身亡，很多遗作后由 Pavel Alexandrov 代为发表. 在短短的三年时间里，Urysohn 对维数论做出了重大贡献，并证明了许多重要的基本定理，包括本节中我们要学的 Urysohn 引理和 Urysohn 度量化定理。此外，前文已提过，紧性的现代定义 (即任意开覆盖有有限子覆盖) 最早是他和 P. Alexandrov 在 1923 年给出的.

在一般拓扑空间中我们并没有“线”的概念，但是我们可以通过指定函数的“下水平集”来替代“等高线”．怎么指定“下水平集”呢？当然是用特定的开集！

¶ Urysohn 引理的证明

下面我们证明 Urysohn 引理.

证明

($\Longleftarrow$) 这是容易证明的部分: 设 A, B 是 X 中不交的闭集，且存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得

$$A \subset f^{-1}(0), B \subset f^{-1}(1)$$

则 $f^{-1}([0, \frac{1}{3}))$ 和 $f^{-1}((\frac{2}{3}, 1])$ 是 A 和 B 的不相交的开邻域，故 $(X, \mathscr{T})$ 是正规的。

($\Longrightarrow$) **步骤 1:** 构造一列“下水平集”．

我们假设 A 是闭集，U 是开集且 $A \subset U$. 我们记 $A = A_0, U = U_1$。由于 X 是正规的，我们可以找到开集 $U_{1/2}$ 和闭集 $A_{1/2}$（比如可以取 $A_{1/2} = \overline{U_{1/2}}$），使得

$$A_0 \subset U_{1/2} \subset A_{1/2} \subset U_1.$$

再重复两次上述过程，我们得到

$$A_0 \subset U_{1/4} \subset A_{1/4} \subset U_{1/2} \subset A_{1/2} \subset U_{3/4} \subset A_{3/4} \subset U_1.$$

通过归纳，对于每个二进有理数

$$r \in D := \left\{ \frac{m}{2^n} \,\middle|\, n, m \in \mathbb{N}, 1 \leqslant m \leqslant 2^n \right\}$$

我们可以构造一个开集 U_r 和一个闭集 A_r，使得

①$U_r \subset A_r, \forall r \in D$.

②$A_r \subset U_{r'}, \forall r < r' \in D$.

步骤 2: 从“下水平集”构造连续函数.

现在我们定义

$$f(x) = \inf\{r : x \in U_r\} = \inf\{r : x \in A_r\},$$

其中第二个等号来自于①和②，且我们在这里“定义”$\inf \emptyset = 1$. 于是显然有

$$A \subset f^{-1}(0) \quad 且 \quad B = U^c \subset f^{-1}(1).$$

下面证明 f 是连续的。因为

$$\{[0, \alpha) | \alpha \in D\} \cup \{(\alpha, 1] | \alpha \in D\}$$

是 $[0,1]$ 上标准拓扑的一个子基，故只需证明：对 $\forall \alpha \in D$，$f^{-1}([0, \alpha))$ 和 $f^{-1}((\alpha, 1])$ 都是开集. 这两条可由如下事实得到:

$$f^{-1}([0, \alpha)) = \bigcup_{r < \alpha} U_r \quad 且 \quad f^{-1}((\alpha, 1]) = \bigcup_{r > \alpha} A_r^c.$$

□

注 2.8.2. 一个自然的问题是：正则空间是否有类似的性质？答案是否定的[29]. 于是，“点与闭集可用函数分离”是跟“点与闭集可用开集分离”不同的分离性质：

定义 2.8.3.（完全正则空间）

如果对于拓扑空间 X 中的任意闭子集 A 和任意 $x_0 \notin A$，都存在连续函数 $f:[0,1]\to X$ 使得

$$f(x_0)=0 \quad 且 \quad f(A)=1$$

则我们称拓扑空间 X 是 **完全正则空间**. ♣

显然完全正则空间必然是正则空间，但反之不成立. 读者不妨仔细分析一下定理2.8.1的证明过程，看看为什么无法用同样的方法构造出用以分离点和闭集的连续函数.

¶ F_σ 集和 G_δ 集

注意 Urysohn 引理的结论是 $f(A)=0$，$f(B)=1$，即

$$A\subset f^{-1}(0), \quad B\subset f^{-1}(1).$$

一个自然的问题是：

问题 1：对于正规空间里不交的闭集 A 和 B，是否存在连续函数 f 使得

$$A=f^{-1}(0), \quad B=f^{-1}(1)?$$

对于度量空间，这个问题有一个简单的答案：由 (2.8.1) 定义的函数 f 满足要求。然而，对于一般的正规空间，我们还需要对 A 和 B 作出额外假设。为了明白这一点，让我们先考虑下面这个更基本的问题：

问题 2：拓扑空间里的子集 A 是某个连续函数零点集的必要条件是什么？

当然，我们需要 A 是一个闭集。但这还不够：因为

$$\{0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}),$$

我们必须有

$$f^{-1}(0)=\bigcap_{n=1}^{\infty}f^{-1}\left((-\frac{1}{n},\frac{1}{n})\right).$$

换句话说，$f^{-1}(0)$ 可以被表示成 X 中可数多个开集的交集。

定义 2.8.4.（G_δ-集与 F_σ- 集）

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间, $A\subset X$.

(1) 如果 A 可以被表示成可数多个开集的交集，我们称 A 是 **G_δ-集**；

(2) 如果 A 可以被表示成可数多个闭集的并集，我们称 A 是一个 **F_σ-集**.[a]

[a] 在数学中，常常使用下标 σ（来自法语单词 **somme**，意思是“和、并”）来表示“可数并集”，使用下标 δ（来自德语单词 **Durchschnitt**，意思是“交集”）表示“可数交集”，比如可以进一步定义“$G_{\delta\sigma}$ 集”为“可数个 G_δ 集的并集”等等. 类似的概念还有 σ 代数、σ 紧、δ 环等。 ♣

[29] 一个相对简单的例子可见 *A. Mysior, Proc. Amer. Math. Soc., Vol.* 81 (4), 1981, 652-653

我们先看几个简单的例子:

例 2.8.5.

(1) 有理数集合 $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ 是 F_σ 集，而无理数集合 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ 是 G_δ-集。

(2) 度量空间 (X,d) 中的任意闭子集 F 都是 G_δ-集，因为由习题 1.1，$x\in F$ 当且仅当 $d_F(x)=0$，从而我们有

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\ \middle|\ d_F(x)<\frac{1}{n}\right\}.$$

(3) 考虑赋有乘积拓扑的空间 $X=\{0,1\}^{\mathbb{R}}$，则 X 是紧 Hausdorff 空间，从而它是 (T4) 空间，且每个单点集 $\{a\}$ 都是闭集。然而，$\{a\}$ 不是 G_δ-集。事实上，X 的每个非空 G_δ-集一定是无穷集：由乘积拓扑定义，X 中的每个开集 U 仅在有限多个位置处取值不是整个 $\{0,1\}$，这意味着每个 G_δ-集仅在可数多的位置处取值不是整个 $\{0,1\}$，因此它包含 (不可数) 无穷多个元素。特别地，我们发现，$\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ 上任意一个有零点的连续函数一定同时在不可数多个点处为零.

我们刚刚说明了连续函数的零点集 $f^{-1}(0)$ 一定是一个闭 G_δ 集。实际上，

命题 2.8.6.（水平集 $\Longleftrightarrow$ 闭 G_δ 集）

设 X 是正规空间。则存在连续函数 $f:X\to[0,1]$ 满足 $f^{-1}(0)=A$ 当且仅当 A 是 X 中的闭 G_δ-集。

证明 只需证明正规空间里的闭 G_δ-集都是连续函数的零点集. 由于 A 是 G_δ-集，在 X 中存在一族开集 U_n 使得 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$. 根据 Urysohn 引理，存在连续函数 $g_n:X\to[0,1]$ 使得

$$A\subset g_n^{-1}(0),\quad U_n^c\subset g_n^{-1}(1).$$

现在我们定义

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}g_n(x).$$

则 f 是连续的（因为连续函数列 $\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{2^n}g_n(x)$ 一致收敛到 $f(x)$），且 $f(A)=0$. 此外，对于任意 $x\notin A$，存在 n 使得 $x\in U_n^c$，即 $g_n(x)=1$，因此 $f(x)\neq 0$. 于是

$$f^{-1}(0)=A.$$

□

¶ Urysohn 引理的一个变体

有了命题 2.8.6，我们就可以应用在度量空间中用过的技巧给出问题 1 的完整答案:

定理 2.8.7.（Urysohn 引理的变体）

设 $(X,\mathscr{T})$ 为正规空间，$A,B\subset X$. 则存在连续函数 $f:X\to[0,1]$ 使得

$$f^{-1}(0)=A,\quad f^{-1}(1)=B$$

当且仅当 A,B 是 X 中不相交的闭 G_δ 集.

证明 显然，如果存在这样的连续函数 f，那么 A, B 必须是不相交的闭 G_δ 集。

反之，设 A, B 是不相交的闭 G_δ 集。由命题 2.8.6，存在连续函数 $f_i : X \to [0,1] (i = 1, 2)$ 使得

$$f_1^{-1}(0) = A, \quad f_2^{-1}(0) = B.$$

因为 $A \cap B = \emptyset$, 所以在 X 上恒有 $f_1 + f_2 > 0$. 于是我们可以定义

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x) + f_2(x)}, \quad \forall x \in X.$$

显然 $f : X \to [0,1]$ 是连续的，而且 $f^{-1}(0) = A, f^{-1}(1) = B$. □

¶ Urysohn 引理：LCH 版本

我们可以不假设 X 是正规空间，而假设 X 是 LCH 空间，即局部紧 Hausdorff 空间。这里最关键的观察是：尽管局部紧 Hausdorff 空间不一定是正规的（因此我们可能无法分离不相交的闭集），但我们仍然有一个很好的分离性质，即命题 2.4.16，它让我们可以将不相交的紧集与闭集分开！于是很自然地会考虑用连续函数分离不相交的紧集与闭集。事实上，我们可以还可以进一步要求“用于分离不交的紧集与闭集的连续函数”仅在某个紧集上有非零的值。这类“仅在紧集上取非零值的函数”在应用中非常重要，为此我们给出如下定义：

定义 2.8.8.（紧支撑函数）

设 X 是拓扑空间，$f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ 是连续函数. 我们称闭集

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$$

为 f **的支撑集**. 如果 f 的支撑集合 $\operatorname{supp}(f)$ 是紧集，则我们称 f 是一个**紧支函数**. ♣

拓扑空间 X 上所有紧支函数的集合记为 $\mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$，它是有界连续函数集合的子集.

现在我们可以陈述 LCH 空间的 Urysohn 引理，注意其条件与结论跟标准的 Urysohn 引理均略有不同：

定理 2.8.9.（LCH 空间的 Urysohn 引理）

设 X 是 LCH 空间，K, F 是 X 中的不相交子集，其中 K 是紧集且 F 是闭集，那么存在一个紧支的连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $f(K) = 1$ 和 $f(F) = 0$. ♡

证明 由命题2.4.16，存在开集 V 使得 $\overline{V}$ 是紧集，且 $K \subset V \subset \overline{V} \subset F^c$. 注意到子空间 $\overline{V}$ 是紧 Hausdorff 空间，从而是正规空间. 于是在 $\overline{V}$ 中对 $K \subset V$ 应用 Urysohn 引理，存在连续函数 $f_0 : \overline{V} \to [0,1]$ 使得

$$f_0(K) = 1, \quad f_0(\overline{V} \setminus V) = 0.$$

令 $f_1 : V^c \to [0,1]$ 为恒零函数. 则 f_0, f_1 分别为定义在闭集 $\overline{V}$ 和 V^c 上的连续函数，且在交集 $\overline{V} \cap V^c = \overline{V} \setminus V$ 上相同. 于是由粘结引理（见习题 1.3），可得到连续函数 $f : X \to [0,1]$. 最后因为 $\operatorname{supp}(f)$ 是紧集 $\overline{V}$ 中的闭集，所以是紧集，即 f 是紧支函数. □

特别地，任意 LCH 空间都是完全正则空间。

2.8.2 Urysohn 度量化定理

¶ 可度量化性质

我们已经多次看到，度量空间是一类非常特殊的拓扑空间，具有很多良好的性质。一个自然的问题是：哪些拓扑空间的拓扑可以由度量生成?

定义 2.8.10.（可度量化空间）

设 $(X, \mathscr{T})$ 是拓扑空间. 如果在 X 上存在度量结构 d 使得度量拓扑 $\mathscr{T}_d$ 与 $\mathscr{T}$ 一致，则我们称 $(X, \mathscr{T})$ 是 **可度量化的**. ♣

例 2.8.11. $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{product})$ 是可度量化的；而 $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathscr{T}_{box})$ 和 $(\{0,1\}^{\mathbb{R}}, \mathscr{T}_{product})$ 都不是可度量化的，因为它们不是第一可数的。

我们在第 2.3 节中已经看到，可度量化的拓扑空间必须是第一可数的、Hausdorff 和正规的. 然而，这些条件是不充分的。

例 2.8.12. Sorgenfrey 直线 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey})$ 是第一可数的, Hausdorff, 正规的，但不是可度量化的:

- 在例2.7.1(2)中我们已经证明了 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey})$ 是第一可数的。
- 在例2.7.8中我们已经证明了它可分但不是第二可数的，从而由命题2.7.9，它不是可度量化的.
- 它是 Hausdorff 的, 这是因为任意 $x < y$ 可以用开集 $[x, y)$ 和 $[y, y+1)$ 分隔开。
- 还需要证明 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey})$ 是正规的, 即不相交的闭集可以被不相交的开集分隔开. 设 A, B 是 $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{sorgenfrey})$ 中不相交的闭集. 对任意 $a \in A$, 我们有 $a \in B^c$. 因为 B^c 是开集, 我们可以取 $\varepsilon_a > 0$ 使得 $[a, a+\varepsilon_a) \cap B = \emptyset$. 类似地，对于任意 $b \in B$ 我们取 $\varepsilon_b > 0$ 使得 $[b, b+\varepsilon_b) \cap A = \emptyset$. 注意对于 $\forall a \in A$ 和$b \in B$，我们总有

  $$[a, a+\varepsilon_a) \cap [b, b+\varepsilon_b) = \emptyset,$$

  否则我们有 $b \in [a, a+\varepsilon_a)$ 或 $a \in [b, b+\varepsilon_b)$, 矛盾。因此

  $$U_A := \cup_{a\in A}[a, a+\varepsilon_a) \quad 和 \quad U_B := \cup_{b\in B}[b, b+\varepsilon_b)$$

  是分隔 A 和 B 的不相交开集。

¶ Urysohn 度量化定理

尽管一般的度量化问题很困难，但对于第二可数空间，这个问题有一个简单答案：

定理 2.8.13.（Urysohn 度量化定理）

第二可数拓扑空间 $(X, \mathscr{T})$ 是可度量化的当且仅当它是 Hausdorff 且正规的。♡

注意由例2.8.12，不能把 Urysohn 度量化定理中的条件“第二可数”改为“可分离”. 因为紧 Hausdorff 空间都是正规的，所以结合命题2.7.4我们得到

推论 2.8.14.（CH 空间：可度量化 $\Longleftrightarrow$(A2)）
紧 Hausdorff 空间是可度量化的当且仅当它是第二可数的。♡

Urysohn 度量化定理的证明类似于定理 2.7.11：我们将 $(X,\mathscr{T})$ 嵌入到 Hilbert 立方体 $[0,1]^{\mathbb{N}}$，这样 $(X,\mathscr{T})$ 就继承了一个子空间度量！唯一的区别是：我们现在没有可数稠密子集，所以无法用“到可数多个点的距离”来定义嵌入；作为替代，我们将利用可数基以及 Urysohn 引理构造足够多的连续函数来定义所需的嵌入.

¶ Urysohn 度量化定理：证明

证明 只需证明第二可数的 Hausdorff 正规空间是可度量化的. 正如我们上面提到的，我们要构造一个“嵌入”

$$F : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}.$$

我们设 $\mathcal{B} = \{B_n | n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一组可数基。

步骤 1：分隔集合 对任意 $x \in X$ 和 x 的任意开邻域 U, 寻找 (m,n) 使得

$$x \in B_n \subset \overline{B_n} \subset B_m \subset U.$$

对任意 $x \in X$ 和 x 的任意开邻域 U，我们首先选取 B_m 使得 $x \in B_m \subset U$。由于 $\{x\}$ 和 B_m^c 是 X 中不相交的闭集，根据正规空间的定义，存在开集 U_1, V_1 使得

$$x \in U_1, \quad B_m^c \subset V_1, \quad U_1 \cap V_1 = \emptyset.$$

又因为 $\mathcal{B}$ 是一个拓扑基，所以存在 $B_n \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B_n \subset U_1$. 因此

$$\overline{B_n} \subset \overline{U_1} \subset V_1^c \subset B_m.$$

所以 $x \in B_n \subset \overline{B_n} \subset B_m \subset U$.

步骤 2：构造函数 构造连续函数列 $f_1, f_2, \cdots$ 满足：$\forall x \in X$ 和任意开集 $U \ni x, \exists n$ 使得

$$f_n(x) = 1, \quad f_n(U^c) = 0.$$

首先，我们记

$$I := \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \overline{B_n} \subset B_m\}.$$

由步骤 1，$I \neq \emptyset$. 对于任意 $(m,n) \in I$，我们对不相交的闭集 $\overline{B_n}$ 和 B_m^c 应用 Urysohn 引理，得到一个连续函数 $g_{n,m} : X \to [0,1]$ 使得

$$g_{n,m}(\overline{B_n}) = 1 \quad \text{且} \quad g_{n,m}(B_m^c) = 0.$$

因为 I 是可数集，我们可以将这些 $g_{n,m}$ 重新编号为 $f_1, f_2, f_3, \cdots$. 根据步骤 1，函数列 $f_1, f_2, \cdots$ 满足要求的性质。

步骤 3: 完成度量化 将 X 嵌入到 *Hilbert* 方体 $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

最后我们定义

$$F : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}, \quad x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \cdots).$$

我们想证明 F 是从 X 到 $F(X) \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ 的同胚. 因为 $F(X)$ 是度量空间 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 中的一个

子集，它上面存在一个子空间度量 d_0 使得度量拓扑与子空间拓扑一致. 将该度量拉回到 X，即在 X 上定义度量 $d(x_1,x_2):=d_0(F(x),F(y))$. 由定义，$F:(X,d)\to(F(X),d_0)$ 是等距同构. 从而我们还有同胚 $F:(X,\mathscr{T}_d)\to(F(X),\mathscr{T}_{d_0})$. 由此可得 X 上的度量拓扑 $\mathscr{T}_d$ 与 X 上的原始拓扑 $\mathscr{T}$ 相同，从而 X 是可度量化的.

下面证明 F 是从 X 到 $F(X)\subset[0,1]^{\mathbb{N}}$ 的同胚.

- 因为所有 f_i 都是连续的，所以 F 是连续的。
- F 是单射：对任意 $x\neq y$，有 $x\in\{y\}^c$，因此存在 n 使得

$$f_n(x)=1 \quad 且 \quad f_n(y)=0.$$

  于是 F 是从 X 到 $F(X)$ 的连续双射.
- F 从 X 到其像集 $F(X)$ 的一个开映射：设 $U\subset X$ 是开集，需要证明 $F(U)$ 是 $F(X)$ 里面的开集。为此我们任取 $z_0\in F(U)$ 以及 $x_0\in U$ 使得 $z_0=F(x_0)$. 由步骤 2，存在 n 使得

$$f_n(x_0)=1 \quad 且 \quad f_n(U^c)=0.$$

  设 $V=\pi_n^{-1}((0,+\infty))$, 其中 π_n 是从 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 到它的第 n 个分量的投影映射。则 V 在 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 中是开集。所以

$$W:=V\cap F(X)$$

  在 $F(X)$ 中是开集。为了证明 F 是开映射，只需证明 $z_0\in W\subset F(U)$:
  - 我们有 $z_0\in W$ ，这是因为

$$\pi_n(z_0)=\pi_n(F(x_0))=f_n(x_0)>0.$$

  - 我们有 $W\subset F(U)$，这是因为对任意 $z\in W$, 存在 x 使得

$$F(x)=z \quad 且 \quad f_n(x)>0,$$

    由此推出 $x\in U$，从而 $z\in F(U)$. □

注 2.8.15. 仔细回顾上述证明的第三步，我们不难发现

> 设 X 是 (T1) 空间，$\{f_\alpha\mid\alpha\in J\}$ 是 X 上的一族连续函数，满足：$\forall x\in X$ 和任意开集 $U\ni x,\exists\alpha\in J$ 使得
>
> $$f_\alpha(x)=1,\quad f_\alpha(U^c)=0.$$
>
> 则我们可以得到一个拓扑嵌入 $F:X\to[0,1]^J$.

另一方面，根据定义2.8.3，我们可以找到这样一族函数当且仅当 X 是完全正则空间. 因为完全正则空间必然是 (T3) 空间，而在 (T3) 空间里 (T1) 与 (T2) 等价，于是我们得到

命题 2.8.16.（完全正则 +Hausdorff$\Longrightarrow$ 嵌入方体）

若 X 是 Hausdorff 且完全正则空间，则 X 可以被拓扑嵌入某个“方体”$[0,1]^J$ 中. ♠

特别地，任何 LCH 空间可以被拓扑嵌入方体中，任何 (T2) 且 (T4) 空间可以被嵌入方体中.

2.9 Tietze 扩张定理

尽管我们通过 Urysohn 引理得到的函数看起来太过特殊，但通过巧妙地运用 Urysohn 引理所烧制出来的砖块，我们可以搭建出各种宏伟的建筑，这一点我们在证明 Urysohn 引理的变体 (定理2.8.7) 以及 Urysohn 度量化定理时已经有所了解. 下面应用 Urysohn 引理证明 Tietze 扩张定理 [30]，并给出 Urysohn 引理和 Tietze 扩张定理的一些应用.

2.9.1 Tietze 扩张定理

¶ 扩张

在分析中，将给定的函数或映射从较小的区域扩张到较大的区域【且同时保留一些特定的性质，例如连续性（或光滑性）、有界性等等】总是很重要的. 为此，我们先给出如下定义：

定义 2.9.1.（扩张）

设 $A \subset X$ 是一个子集，$f: A \to Y$ 是定义在 A 上的一个映射. 如果定义在全空间 X 上的映射 $\tilde{f}: X \to Y$ 满足

$$\tilde{f}(x) = f(x), \qquad \forall x \in A,$$

则我们称映射 $\tilde{f}$ 是映射 f 的一个 **扩张**. ♣

例如，任意函数 $f: A \to \mathbb{R}$ 都有一个简单的扩张，即零扩张

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

当然，对我们而言，最重要的性质之一是连续性. 所以我们希望把定义在子集上的连续映射扩张为全空间的连续映射. 于是，自然的问题是：

> 给定子空间上的连续映射 $f: A \to Y$，是否存在连续扩张 $f: X \to Y$？如果存在，是否唯一？

不难想见，唯一性一般是没有的，因为映射在 A 上的取值无法控制映射在“跟 A 中的点较远处的点”上的取值. 但是，如果 A 是稠密的，则我们有

引理 2.9.2.（稠密子集扩张的唯一性）

设 Y 是 Hausdorff 空间，A 是 X 的稠密子集，$f: A \to Y$ 是连续映射. 则至多存在一个连续扩张 $f: X \to Y$. ♢

其证明留作习题.

[30] 蒂茨（H. Tietze，1880-1964），奥地利数学家，在一般拓扑学、地图着色、组合群论等领域均有重要贡献. Tietze 扩张定理有时候也被称为“Tietze-Urysohn-Brouwer 扩张定理”：该定理最早由 Lebesgue 在 1907 年对 $X = \mathbb{R}^2$ 的特殊情况证明，然后 1915 年被 Tietze 推广到所有度量空间，之后 1918 年 Brouwer 对于欧氏空间情形给出了另一个证明. 而这里所叙述的正规空间的版本是由 Urysohn 在 1925 年给出的.

另一方面，如果 A 不是闭集，则我们不能期望将 **所有** 定义在 A 上的连续函数扩张为定义在 X 上的连续函数：

例 2.9.3. 如果 $A\subset\mathbb{R}$ 不是闭集，那么存在一个数 $a\in A'$ 但 $a\notin A$. 考虑 A 上的（有界）连续函数

$$f(x):=\sin\frac{1}{x-a},$$

它显然不能被扩张为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

¶ Tietze 扩张定理

然而，如果 X 是正规空间且 A 是 X 中的闭集，则下面的 Tietze 扩张定理告诉我们 A 上的任何连续函数 f 都可以连续扩张为 X 上的连续函数，且若 f 是有界的，则扩张之后的函数可以具有相同的界：

定理 2.9.4.（Tietze 扩张定理） 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 是正规空间当且仅当对于任意闭集 $A\subset X$，A 上的任意连续函数 $f:A\to[-1,1]$ 可以被扩张为 X 上的连续函数 $\widetilde{f}:X\to[-1,1]$.

Tietze 扩张定理可以看作是 Urysohn 引理的推广（尽管它们实际上是等价的），因此可以直接适用于更多的情况，是拓扑学中最有用的定理之一.

构造扩张的**想法**如下：我们考虑“限制映射”

$$r_A:\mathcal{C}(X,[-1,1])\to\mathcal{C}(A,[-1,1]),\qquad g\mapsto g|_A.$$

我们只要证明 r_A 是满射即可，换言之，我们需要求解方程

$$r_A(g)=f.$$

为此，我们应用分析中的标准技巧：

① 首先找该方程的一个近似解；

思路：我们只会用 Urysohn 引理构造全空间的连续函数. 于是，直接对 f 操作是不方便的. 为此，我们把 f 做一个“截断”，即

$$\bar{f}:A\to[0,1],\qquad \bar{f}(x):=\begin{cases}1/3, & \text{若 } f(x)\geqslant 1/3,\\ f(x), & \text{若 } |f(x)|\leqslant 1/3,\\ -1/3, & \text{若 } f(x)\leqslant -1/3.\end{cases}$$

由定义，它是函数 f 的一个“近似”：

$$|f(x)-\bar{f}(x)|\leqslant 2/3,\qquad \forall x\in A.$$

接下来我们用 Urysohn 引理构造连续函数 $g:X\to[0,1]$，使得 $r_A(g)\approx\bar{f}$. 根据构造，$\bar{f}$ 在一个闭子集上达到最大值 $1/3$，在另一个闭子集上达到最小值 $-1/3$. 对这两个闭集用 Urysohn 引理即可得到我们想要的函数.

② 然后迭代地寻找一列越来越好的近似解；

③ 最后证明这一列近似解收敛到真正的解.

¶ Tietze 扩张定理的证明

证明

(⇐) 设 A,B 是在 X 中不相交的闭集. 那么 $A\cup B$ 在 X 中是闭集并且

$$f: A\cup B \to [-1,1], \quad f(x)=\begin{cases} -1, & x\in A \\ 1, & x\in B \end{cases}$$

是 $A\cup B$ 上的连续函数. 根据假设, f 可以扩张为连续函数 $\widetilde{f}: X\to[-1,1]$ 且在 $A\cup B$ 上 $\widetilde{f}=f$. 于是 $f^{-1}((-\infty,0))$ 和 $f^{-1}((0,+\infty))$ 是 A 和 B 的不相交的开邻域, 从而 X 是正规的.

(⇒) 按照前面的分析, 我们把证明过程分成三步:

步骤 1 [构造一个近似解]

我们取

$$A_1 := \{x\in A \,|\, f(x)\geqslant 1/3\} \quad \text{和} \quad B_1 := \{x\in A \,|\, f(x)\leqslant -1/3\},$$

则 A_1 和 B_1 是 X 中不相交的闭集. 由 Urysohn 引理, 存在连续函数 $g: X\to[-1/3,1/3]$ 使得

$$g(A_1)=1/3 \quad \text{且} \quad g(B_1)=-1/3.$$

不难验证, $g(x)$ 还满足 $|f(x)-r_A(g)(x)|\leqslant 2/3$, $\forall x\in A$.

步骤 2 [进行迭代]

记 $f=f_1$. 由步骤 1, 我们得到了一个连续函数 $g_1: X\to[-1/3,1/3]$ 使得

$$|f_1(x)-r_A(g_1)(x)|\leqslant 2/3, \ \forall x\in A.$$

将 f 替换为 $f_2=f_1-r_A(g_1)$ 并重复步骤 1, 我们可以得到连续函数 $g_2: X\to [-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}]$ 使得

$$|f_2(x)-r_A(g_2)(x)|\leqslant (2/3)^2, \ \forall x\in A.$$

继续重复这个过程, 我们可以找到一列连续函数

$$g_n: X\to\left[-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}\right]$$

使得: 如果我们记 $f_n=f_{n-1}-r_A(g_{n-1})$, 则

$$|f_n(x)-r_A(g_n)(x)|\leqslant (2/3)^n, \ \forall x\in A.$$

步骤 3 [收敛到解]

定义函数

$$\widetilde{f}(x):=\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

因为每个 g_n 在 X 上都是连续的, 并且

$$|g_n(x)|\leqslant \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1},$$

所以该级数一致收敛，从而 $\widetilde{f}$ 在 X 上是连续的，并且

$$|\widetilde{f}(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1} = 1, \quad \forall x \in X.$$

最后，对于 $\forall x \in A$ 以及 $\forall N \in \mathbb{N}$，我们有

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} g_n(x) \right| = \left| f_2(x) - \sum_{n=2}^{N} g_n(x) \right| = |f_N(x) - g_N(x)| \leqslant (2/3)^N.$$

所以对于 $x \in A$ 有 $f(x) = \widetilde{f}(x)$. □

¶ 扩张无界连续函数

显然，在 Tietze 扩张定理的叙述中，我们可以把像空间 $[-1,1]$ 替换为任意闭区间 $[a,b]$. 下面我们给出 Tietze 扩张定理的一个不那么明显的变体：把 $[-1,1]$ 替换为 $\mathbb{R}$.

定理 2.9.5. (无界连续函数的 Tietze 扩张定理)

设 X 是正规空间，且 $A \subset X$ 是闭集，则任意连续函数 $f: A \to \mathbb{R}$ 都可以扩张为连续函数 $\widetilde{f}: X \to \mathbb{R}$. ♡

证明 将 f 与反正切函数 $\arctan: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 复合，我们得到一个连续函数

$$f_1 := \arctan \circ f : A \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

由 Tietze 扩张定理，f_1 可以被扩张为连续函数[31]

$$\widetilde{f_1} : X \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

令

$$B = \widetilde{f_1}^{-1}(\pm\frac{\pi}{2}).$$

则 B 是 X 的闭子集且 $B \cap A = \emptyset$. 由 Urysohn 引理，存在连续函数 $g: X \to [0,1]$ 使得

$$g(A) = 1 \quad 且 \quad g(B) = 0.$$

定义

$$h(x) = \widetilde{f_1}(x)g(x).$$

那么 h 是将 X 映射到开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的连续函数. 最后我们令

$$\widetilde{f}(x) = \tan h(x).$$

则 $\widetilde{f}: X \to \mathbb{R}$ 是连续的，并且对于 $\forall x \in A$，我们有

$$\widetilde{f}(x) = \tan h(x) = \tan \widetilde{f_1}(x) = \tan f_1(x) = x.$$

□

类似地，我们还可以（保范地）扩张复值函数，或扩张 Lipschitz 函数，甚至将光滑函数扩张为光滑函数（Whitney 扩张定理）等等.

---

[31]注意此处我们无法直接得到 $\tilde{f}_1 : X \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，因为根据前面定理证明中的构造，$\tilde{f}_1$ 是一个级数的极限，其值有可能会取到 $\pm\frac{\pi}{2}$.

¶ LCH 空间的 Tietze 扩张定理

类似于 LCH 空间的 Urysohn 引理，我们也可以把条件 “X 是正规空间” 替换为 “X 是 LCH 空间”．此时，因为 LCH 空间未必是正规空间，一般而言我们无法将所有定义在 X 的闭集上的连续函数作连续扩张，但是我们可以将所有定义在 X 的紧集上的连续函数做连续扩张，而且，我们还能让扩张后的连续函数具有紧支集：

定理 2.9.6.（LCH 空间的 Tietze 扩张定理） 设 X 为 LCH 空间，K 为 X 的紧子集. 那么任意连续函数 $f: K \to [-1,1]$ 都可以被扩张为具有紧支集的连续函数 $\tilde{f}: X \to [-1,1]$.

证明 证明跟定理2.8.9非常类似，即取开集 V 使得 $\overline{V}$ 是紧集，且 $K \subset V \subset \overline{V} \subset X$，然后对子空间 $\overline{V}$（它是紧 Hausdorff 空间，从而也是正规空间）应用 Tietze 扩张定理：$K \cup (\overline{V} \setminus V)$ 是 $\overline{V}$ 中的闭集，函数 $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K \\ 0, & x \in \overline{V} \setminus V \end{cases}$ 是定义在该闭集上的连续函数，从而可以被扩张为连续函数 $\tilde{f}_1 : \overline{V} \to [-1,1]$. 最后将 $\tilde{f}_1$ 做零扩张得到函数 $\tilde{f}: X \to [-1,1]$. 由粘结引理，$\tilde{f}$ 是连续函数，而且 $\operatorname{supp}(f) \subset \overline{V}$ 是紧集的闭子集，从而也是紧集. □

¶ 扩张连续映射的注记

注 2.9.7. 显然我们可以把 “向量值” 连续函数

$$f: A \to [0,1]^n, \quad f: A \to \mathbb{R}^n, \quad \text{或} \quad f: A \to [0,1]^S$$

扩张为 X 上相应的向量值连续函数，即扩张为

$$\tilde{f}: X \to [0,1]^n, \quad \tilde{f}: X \to \mathbb{R}^n, \quad \text{或} \quad \tilde{f}: X \to [0,1]^S,$$

其中 S 是任意集合. 为此，我们只需分别扩张 f 的每个分量即可.

注 2.9.8. 另一方面，对于一般的拓扑空间 Y，我们不能期望将闭子集 A 上的任意连续函数 $f: A \to Y$ 都扩张为 X 上的连续函数 $\tilde{f}: X \to Y$. 例如，

- 赋予 $\{0,1\}$ 离散拓扑. 为了将函数 $f: \{0,1\} \to Y$ 扩张为连续函数

  $$\tilde{f}: [0,1] \to Y,$$

  一个必要条件是：存在一个连续函数 $\gamma: [0,1] \to Y$ 满足 $\gamma(0) = f(0), \gamma(1) = f(1)$. 用后文第 3.2 节的语言，我们需要 $f(0)$ 和 $f(1)$ 位于 Y 的同一个 **道路连通分支** 中.
- 为了将连续函数 $f: S^1 \to Y$ 扩张为连续函数 $\tilde{f}: D \to Y$，其中 D 是平面上的单位圆盘，我们需要像集 $f(S^1)$ 在 Y 中是 **可缩的**（这是一种更高级别的连通性）. 特别地，我们将会看到恒等映射

  $$f: S^1 \to S^1, \quad x \mapsto x$$

  不能被扩张为连续映射 $\tilde{f}: D \to S^1$.

我们将在本书的后半部分深入研究这些连通性现象.

2.9.2 Tietze 扩张定理与 Urysohn 引理的应用

下面我们给出 Tietze 扩张定理以及 Urysohn 引理的一些应用.

¶ 应用 1: 连续函数逼近可测函数

在实分析中，我们有如下的 Lusin 定理，它告诉我们“可测函数在很大一个区域上是连续函数”：

定理 2.9.9.（Lusin 定理） 设 X 是 LCH 空间，μ 是 X 上的一个正则 Radon 测度.[a] 设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是 X 上的一个可测函数，且存在具有有限测度的 Borel 集 E 使得 f 在 E^c 上为 0. 则对于任意 $\varepsilon > 0$，存在紧集 $K \subset E$ 使得 $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$，且 f 在 K 上连续.

[a] 即 μ 是一个定义在全体 Borel 集上的测度，满足以下三个条件：
- 对于紧集 K，由 $\mu(K) < +\infty$.
- 外正则性：对任意 Borel 集 A，有 $\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U\text{是开集}\}$.
- 内正则性：对任意 Borel 集 A，有 $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K\text{是紧集}\}$.

♡

应用 LCH 版本的 Tietze 扩张定理，我们可以得到

推论 2.9.10.（连续函数几乎处处逼近可测函数） 在 Lusin 定理的假设下，存在一列紧支连续函数几乎处处收敛于 f.

♡

证明 根据 Lusin 定理，存在满足条件 $\mu(E \setminus K) < \varepsilon$ 的紧集 $K \subset E$，使得 f 在 K 上连续. 由 LCH 空间的 Tietze 扩张定理即定理2.9.6，存在 $g \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ 使得 $g|_K = f$. 另一方面，由外正则性，存在开集 $U \supset E$ 使得

$$\mu(U \setminus E) < \varepsilon.$$

对于紧集 K 跟闭集 U^c 应用 LCH 空间的 Urysohn 引理，可得连续函数 $h \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ 使得

$$h(K) = 1, \quad h(U^c) = 0.$$

于是，对任意 $\varepsilon > 0$，我们得到紧支连续函数 $gh \in \mathcal{C}_c(X, \mathbb{R})$ 使得

$$\mu(\{x \mid g(x)h(x) \neq f(x)\}) < 2\varepsilon.$$

最后分别取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$，我们得到一列紧支连续函数 g_n 依测度收敛于 f. 再由 Riesz 定理，g_n 有子列几乎处处收敛于 f. □

¶ 应用 2: 度量空间中的伪紧性

我们引入一个新的紧性定义：

定义 2.9.11.（伪紧） 若拓扑空间 X 上的所有连续函数都是有界的，则我们称 X 是**伪紧**的.

♣

根据推论2.1.12，任意紧空间或者列紧空间都是伪紧的. 反之一般不成立：

例 2.9.12. 考虑 $X=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$，赋以拓扑

$$\mathscr{T}=\{U\mid \infty\in U\text{或者}U=\emptyset\}.$$

则 X 上不存在不交的非空开集，于是 X 上的任意连续函数必须是常数. 但显然 X 是不紧的，因为开集族 $\{\{x,\infty\}_{x\in\mathbb{R}}\}$ 是一个没有有限子覆盖的开覆盖.

我们注2.3.29 中提到，度量空间 X 是紧的当且仅当它是伪紧的. 现在我们证明该命题:

命题 2.9.13.（度量空间：紧 = 伪紧）

度量空间 (X,d) 是紧的当且仅当任意连续函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 是有界的.

证明 只要证明伪紧的度量空间是紧的. 我们用反证法. 假设度量空间 (X,d) 是伪紧的但不是紧的，则由定理2.3.28，(X,d) 不是极限点紧的. 于是存在无限子集 $A=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 使得 $A'=\emptyset$. 特别地，A 是闭集，并且每个 x_n 在 A 中都是孤立点. 于是函数

$$f:A\to\mathbb{R},\quad f(x_n)=n$$

是闭集 A 上的连续函数. 由 Tietze 扩张定理，f 可以被扩张为连续函数 $\widetilde{f}:X\to\mathbb{R}$. 于是 $\widetilde{f}$ 是 X 上的无界连续函数，矛盾. □

注意：事实上我们证明了更强的结论：

$$\boxed{\text{(T4)+ 极限点紧} \Longrightarrow \text{伪紧}}.$$

¶ 应用 3: Cantor 集的应用

我们的第三个应用涉及到 Cantor 集

$$C=[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1}\left(\frac{3k+1}{3^n},\frac{3k+2}{3^n}\right).$$

在第 2.2 节的习题中，我们证明了映射

$$g:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to C\subset[0,1],\quad a=(a_1,a_2,\cdots)\mapsto\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{3^k}a_k$$

是从 $(\{0,1\}^{\mathbb{N}},\mathscr{T}_{product})$ 到 Cantor 集 C 的同胚，并证明了映射

$$h:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to[0,1]^2,\quad a=(a_1,a_2,\cdots)\mapsto\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k-1}}{2^k},\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}}{2^k}\right)$$

是一个连续满射. 于是，我们得到一个连续满射

$$h\circ g^{-1}:C\to[0,1]^2.$$

由于 C 在 $[0,1]$ 中是闭集，因此由 Tietze 扩张定理，存在一个连续满射

$$f:[0,1]\to[0,1]^2.$$

一般而言，我们把从 $[0,1]$ 到拓扑空间的连续映射叫做曲线，于是我们得到了一条填满单位正方形的曲线！这种能填满正方形的曲线最早是 Peano [32]在 1890 年发现的：

[32]G. Peano（皮亚诺，1858-1932），意大利数学家、逻辑学家、语言学家. 他的知名工作包括：证明了有关微分方程初值问题的 Peano 存在性定理，提出了自然数的 Peano 公理体系，构造填满正方形的 Peano 曲线，以

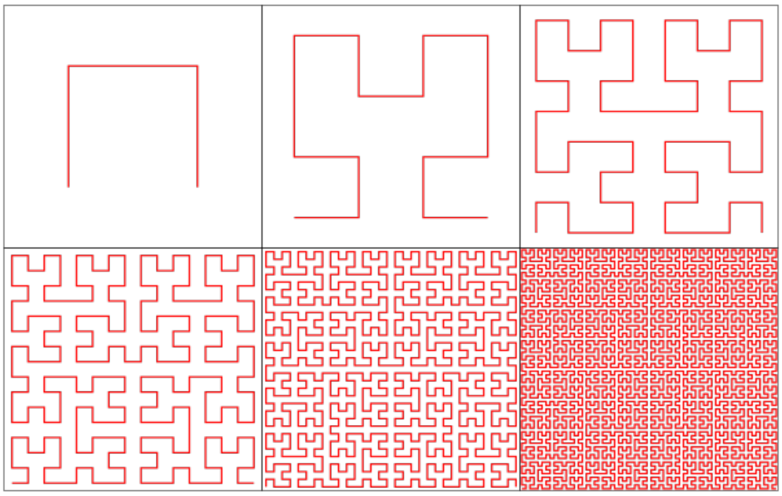
定义 2.9.14.（Peano 曲线）

我们称任意一个从 $[0,1]$ 到 $[0,1]^2$ 的连续满射为一条 **Peano 曲线**或**空间填充曲线**. ♣

所以，我们用 Cantor 集构造出的函数 f 是一条 Peano 曲线！存在 Peano 曲线这一事实，使得人们不得不仔细思考下面这个问题：什么是维数？连续映射可以把低维集合映满高维集合，那维数还是拓扑不变量吗？幸运的是，欧氏空间的维数确实是拓扑不变量. 这个命题的证明远比我们想象的要复杂，我们将会在第 4 章中给出详细证明.

注 2.9.15.

(1) 我们给出的是 Peano 曲线存在性的"非构造性"证明. 文献中也有许多"构造性证明"，可以从简单的曲线出发，迭代地构造一系列曲线，其极限是 Peano 曲线.



(2) 空间填充曲线并不只是理论上的怪物. 它们在现实生活中也有重要应用. 例如，它可被用于将多维数据（如地图数据）存储到计算机中（线性排列）：我们希望相近的地图数据（高维数据）被存储在数据库相近的位置[这就是连续性！]，以便我们在使用地图时不必同时读取分散在很多不同地方的数据.

用类似的方法，可以构造连续满射

$$f:[0,1]\to[0,1]^n$$

甚至可以构造连续满射

$$f:[0,1]\to[0,1]^{\mathbb{N}},$$

为此，我们只要把 $\mathbb{N}$ 分解成可数个 $\mathbb{N}$ 的无交并，例如

$$\mathbb{N}=\bigcup_n\{2^n(2k+1)\mid k\in\mathbb{N}\}$$

然后由 1.4 节习题，可以得到同胚

$$h_\infty:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}},$$

及用于严格定义曲线长度和曲面面积的 Jordan-Peano 测度等.

从而得到一个连续满射

$$f_\infty = (h, h, \cdots) \circ h_\infty \circ g^{-1} : C \to [0,1]^{\mathbb{N}}.$$

作为应用，我们证明

定理 2.9.16.（Cantor 集的“通有”性）

对任意紧度量空间 (X, d)，均存在从 Cantor 集 C 到 X 的连续满射.

证明 根据定理2.7.11，X 同胚于 $[0,1]^{\mathbb{N}}$ 的某个闭子集 F. 由 f_∞ 的连续性，$f_\infty^{-1}(F)$ 是 C 的闭子集. 根据习题 2.2，存在连续映射 $f : C \to F$ 使得 $f|_F$ 是恒等映射. 于是 $f_\infty \circ f$ 就是从 Cantor 集合 C 到 X 的连续满射. □

¶ 应用 4: Stone-Čech 紧化.

我们先回忆一下习题 2.1 中所引入的如下概念：

定义 2.9.17.（紧化）

设 X 是拓扑空间，Y 是紧拓扑空间，且存在拓扑嵌入 $f : X \to Y$ 使得 $\overline{f(X)} = Y$，则我们称紧拓扑空间 Y（以及嵌入映射 f）是拓扑空间 X 的**紧化**.

注意紧化实际上包含两个数据：空间 Y 以及嵌入映射 f.

我们学过如何用单点紧化（又称为 **Alexandrov 紧化**）的方式去紧化任意一个非紧的拓扑空间 X. 直觉上来说，单点紧化 X^* 是把 X 的所有“非紧的端口”粘接在一个“无穷远点”处. 在很多应用中，这种“不分青红皂白全部粘在一起”的紧化方式是不便于使用的.

一般而言，我们希望紧化的空间 Y 是 Hausdorff 的，因为我们知道紧 Hausdorff 空间具有诸多良好的性质. 为此，我们假设 X 是 LCH 空间，或者更一般地，假设 X 是 Hausdorff 且完全正则的空间. 根据命题2.8.16，映射

$$\beta : X \to Q = [0,1]^{\mathcal{C}(X,[0,1])}, \qquad x \mapsto ev_x$$

是一个拓扑嵌入. 注意到方体 $Q = [0,1]^{\mathcal{C}(X,[0,1])}$，作为紧 Hausdorff 空间 $[0,1]$ 的乘积空间，依然是紧 Hausdorff 空间. 特别地，

$$\beta X := \overline{\beta(X)} \subset [0,1]^{\mathcal{C}(X,[0,1])} \tag{2.9.1}$$

是一个紧 Hausdorff 空间，且映射 $\beta : X \to \beta X$ 是一个稠密的拓扑嵌入. 于是 βX 是 X 的一个紧化. 这种紧化最早由 M. Stone 和 E. Čech[33]在 1937 年分别显式给出的：

定义 2.9.18.（Stone-Čech 紧化）

设 X 是 LCH 空间（或者更一般地，是 Hausdorff 且完全正则的空间）. 我们称由（2.9.1）所定义的空间 βX 为 X 的 **Stone-Čech 紧化**.

[33]切赫（Eduad Čech,1893-1960），捷克数学家，主要研究射影微分几何与拓扑学，以 Stone-Čech 紧化和 Čech 上同调闻名. 前文提过，Čech 是最早给出 Tychonoff 定理证明的人. 另一方面，Stone-Čech 紧化则最早（隐含地）出现在 Tychonoff 的 1930 年的一篇文章中.

注意如果 X 本身是紧 Hausdorff 的，那么 βX 跟 X 是同胚的.

给定任意连续函数 $f: X \to [0,1]$，考虑"向 f 分量的投影映射" $\pi_f : [0,1]^{\mathcal{C}(X,[0,1])} \to [0,1]$，则我们有

$$\pi_f \circ \beta(x) = \pi_f(ev_x) = f(x).$$

换而言之，如果我们把 X 跟它的同胚像 $\beta(X)$ 等同起来，则 π_f 是 f 在 Q 上的一个扩张. 当然，因为 Q 太大，一般而言扩张是不唯一的. 但是，如果我们限制在 Stone-Čech 紧化 βX 上，则扩张是唯一的：【于是这是一个"任意连续函数存在唯一扩张"的例子!】

命题 2.9.19.（有界连续函数向紧化空间扩张）

设 X 是 LCH 空间（或者更一般地，是 Hausdorff 且完全正则的空间），则任意连续函数 $f: X \to [0,1]$ 可以被唯一扩张为连续函数 $\tilde{f} = \pi_f|_{\beta X} : \beta X \to [0,1]$. ♠

证明 上面已经说明了 $\tilde{f} = \pi_f|_{\beta X}$ 是 f 的"扩张"，其唯一性由引理2.9.2可得. □

下面假设 $\varphi : X \to Y$ 是一个连续映射. 则对任意 $g \in \mathcal{C}(Y,[0,1])$, 复合映射 $g \circ \varphi \in \mathcal{C}(X,[0,1])$, 从而由命题2.9.19，存在唯一的扩张 $\widetilde{g \circ \varphi} : \beta X \to [0,1]$. 把所有这些函数放在一起，我们得到一个映射

$$\beta\varphi : \beta X \to [0,1]^{\mathcal{C}(Y,[0,1])},$$

使得

$$\pi_g(\beta\varphi) = \widetilde{g \circ \varphi}.$$

由定义，对于任意 $x \in X$,

$$\beta\varphi(\beta_X(x)) = (\widetilde{g \circ \varphi}(\mathrm{ev}_x))_g = (\pi_{g\circ\varphi}(ev_x))_g = (g \circ \varphi(x))_g = ev_{\varphi(x)} = \beta_Y(\varphi(x))$$

根据命题1.5.20，$\beta\varphi$ 的像落在 βY 里面：

$$\beta\varphi(\beta X) = \beta\varphi(\overline{\beta(X)}) \subset \overline{\beta\varphi(\beta(X))} \subset \overline{\beta(Y)} = \beta Y.$$

换而言之，我们得到

命题 2.9.20.（$\varphi : X \to Y \rightsquigarrow \beta\varphi : \beta X \to \beta Y$）

设 X, Y 是 LCH 空间（或者更一般地，是 Hausdorff 且完全正则的空间）. 则任意连续映射 $\varphi : X \to Y$ 可以被唯一"提升"为连续映射 $\beta\varphi : \beta X \to \beta Y$，使得

$$\beta\varphi \circ \beta = \beta \circ \varphi. \tag{2.9.2}$$

♠

证明 上面已经说明了"提升映射" $\beta\varphi : \beta X \to \beta Y$ 的存在性. 至于唯一性，因为 $\beta\varphi$ 在稠密子集 $\beta(X)$ 上是由 (2.9.2) 所唯一确定，故由引理2.9.2可得 $\beta\varphi$ 在 βX 上的唯一性. □

作为推论，我们证明 Stone-Čech 紧化的如下重要性质：

定理 2.9.21.（Stone-Čech 紧化的泛性质）

设 X 是 LCH 空间，则对于任意紧 Hausdorff 空间 Y 以及任意连续映射 $\varphi : X \to Y$，存在唯一的连续映射 $\tilde{\varphi} : \beta X \to Y$ 使得 $\tilde{f} \circ \beta = f$. 进一步，Stone-Čech 紧化 βX 是唯一具有该性质的 Hausdorff 紧化. ♡

证明 存在唯一性是命题2.9.20的直接推论，因为对于紧 Hausdorff 空间，βY 与 Y 同胚.

下面证明 βX 是唯一满足该性质的紧 Hausdorff 空间：假设还有紧 Hausdorff 空间 Z 以及映射 $\gamma : X \to Z$ 满足同样的性质. 则连续映射 $\beta : X \to \beta X$ 可被扩张为连续映射 $\tilde{\beta} : Z \to \beta X$，使得

$$\tilde{\beta} \circ \gamma = \beta.$$

同理 $\gamma : X \to Z$ 可被扩张为 $\tilde{\gamma} : \beta X \to Z$，使得

$$\tilde{\gamma} \circ \beta = \gamma.$$

注意到 $\tilde{\beta} \circ \tilde{\gamma} : \beta X \to \beta X$ 是连续映射，且在稠密子集 $\beta(X)$ 上有 $\tilde{\beta} \circ \tilde{\gamma} = \mathrm{Id}$. 于是由引理2.9.2，我们在整个 βX 上有 $\tilde{\beta} \circ \tilde{\gamma} = \mathrm{Id}$. 同理 $\tilde{\gamma} \circ \tilde{\beta} = \mathrm{Id}$. 于是 Z 跟 βX 同胚. □

注 2.9.22. 非紧空间的紧化一般是不唯一的. 若 X 有两个紧化 $\iota_i : X \to \overline{X}_i$，$i = 1, 2$，且存在连续映射 $g : X_1 \to X_2$ 使得 $g \circ \iota_1 = \iota_2$，则我们称紧化 $\iota_2 : X \to \overline{X}_2$ 比紧化 $\iota_1 : X \to \overline{X}_1$ **更精细**. 可以证明：对于非紧 LCH 空间，单点紧致化是最粗糙的紧化，而 Stone-Čech 紧化是最精细的紧化.

¶ 应用 5: 单位分解（简单版本）.

最后我们应用 Urysohn 引理证明一个简单版本的“单位分解”. 下一节我们将对单位分解做更深入地研究. 回忆一下：我们称集族 $\{U_\alpha\}$ 是局部有限的，如果它满足

$$\forall x \in X, \exists \text{ 开集 } U_x \ni x \text{ 使得仅有有限个 } \alpha \text{ 满足 } U_x \cap U_\alpha \neq \emptyset.$$

我们证明

定理 2.9.23.（单位分解：简单版本）

设 X 是正规空间，且闭集族 $\{F_\alpha\}$ 覆盖 X（即 $\bigcup_\alpha F_\alpha = X$）. 设 U_α 是 K_α 的开邻域，且 $\{U_\alpha\}$ 是局部有限的，则存在连续函数 $\rho_\alpha : X \to [0, 1]$ 使得

①$\rho_\alpha(F_\alpha) > 0$.

②$\rho_\alpha(U_\alpha^c) = 0$.

③$\sum\limits_\alpha \rho_\alpha(x) = 1, \forall x \in X$.

证明 由 Urysohn 引理，存在连续函数 $g_\alpha : X \to [0, 1]$ 使得

$$g_\alpha(F_\alpha) = 1, \qquad g_\alpha(U_\alpha^c) = 0.$$

令 $g(x) = \sum\limits_\alpha g_\alpha(x)$. 则在每个开集 U_x 上，g 是有限个连续函数的和，从而 g 是良好定义的，且在每个 U_x 是连续的. 于是 g 是 X 上的连续函数. 此外，因为 $\bigcup\limits_\alpha F_\alpha = X$，我们有

$$g(x) \geq 1, \quad \forall x.$$

最后，记 $\rho_\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x)}{g(x)}$. 易见这些 ρ_α 即为所求. □

2.10 仿紧性与单位分解

最后我们介绍仿紧的概念及其应用. 仿紧性最早由法国数学家 Dieudonné [34] 于 1944 年首次引入. 就如紧性是"广义的有限性", 仿紧性可被视为是"广义的局部有限性". 相比于紧性、可数性、分离性, 仿紧性显得不那么直观, 但很快人们发现仿紧性 (以及相关的"可数局部有限性") 跟拓扑空间的可度量性密切相关. 而当人们发现需要仿紧性概念以使得"任意开覆盖都存在单位分解"后 (而单位分解是在流形上发展分析理论的基石), 仿紧性就成了拓扑学的标准研究对象和重要工具.

2.10.1 仿紧空间

¶ 仿紧性: 定义和例子

我们知道, 对于紧空间, 任何开覆盖都有有限子覆盖, 从而我们可以通过考察局部性质得到整体性质. 对于更一般的拓扑空间, 我们无法期待可以"把局部性质粘接成整体性质". 然而, 上一节末尾的单位分解为我们提供了一种较弱的把局部数据粘接成整体数据的方式: 虽然定理2.9.23中涉及到的求和 $\sum_\alpha \rho_\alpha(x)$ 在整体上不是一个有限和, 但是在每个点附近, 它依然是有限和.

当然, 能够做到单位分解的原因之一在于该定理的条件中, 我们假设了开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 是局部有限的. 一般的开覆盖未必是局部有限的.

例 2.10.1. 考虑 $X=\mathbb{R}^n$ 的开覆盖

$$\mathscr{U}=\{B(0,k)|k\in\mathbb{N}\}.$$

这当然不是一个局部有限开覆盖. 但是, 如果我们把每个开球 $B(0,k)$ 替换成更小的"开球壳" $B(0,k)\setminus\overline{B(0,k-1)}$, 则它们构成一个局部有限的开覆盖! 注意到新覆盖

$$\mathscr{U}_1=\{B(0,k)\setminus\overline{B(0,k-1)}\mid k\in\mathbb{N}\}$$

中的每个集合都包含在原覆盖的某个集合里面, 用定义2.1.1的语言来说, 新覆盖是原覆盖的一个局部有限的开加细.

事实上, 我们有

$$\boxed{\mathbb{R}^n \text{ 的任意开覆盖都有一个局部有限的开加细.}}$$

证明如下: 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的任意开覆盖. 对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 存在 $0<r_x\leqslant 1$ 和 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $B(x,r_x)\subset U$. 令

$$\mathscr{U}_1=\{B(x,r_x)|x\in\mathbb{R}^n\}.$$

那么 $\mathscr{U}_1$ 是 $\mathscr{U}$ 的一个加细. 另一方面, 任意形如

$$\overline{B(0,k+1)}\setminus B(0,k)$$

的"闭球壳"可以被 $\mathscr{U}_1$ 中的有限多个开球所覆盖. 记 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 为这些开球的集合. 那么 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开覆盖, 是 $\mathscr{U}$ 的一个加细, 并且是局部有限的.

[34]迪厄多内 (Jean Dieudonné, 1906-1992), 法国数学家, **Bourbaki** 学派的创始人之一, 主要研究抽象代数, 代数几何和泛函分析.

我们定义

定义 2.10.2. (仿紧)

若拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的任意开覆盖都有局部有限的开加细，则我们称 X 是**仿紧的**. ♣

我们给出几个仿紧/非仿紧的例子:

例 2.10.3.

(1) 显然紧空间都是仿紧的.

(2) 任意离散拓扑空间都是仿紧的，因为由所有单点集构成的集族是任意开覆盖的局部有限开加细.

(3) 我们刚刚证明了 $\mathbb{R}^n$ 是仿紧的.

(4) 一个不仿紧的例子：考虑 $X=\mathbb{R}$，赋以上半连续拓扑 $\mathscr{T}_{u.s.c.}=\{(-\infty,a)|a\in\mathbb{R}\}$. 则它不是仿紧的，因为开覆盖

$$\mathscr{U}=\{(-\infty,n)\mid n\in\mathbb{Z}\}$$

没有局部有限加细.

一般而言，仿紧空间的子空间未必是仿紧的. 但跟紧性类似，我们有

命题 2.10.4. (仿紧的闭遗传性)

仿紧空间中的闭子集是仿紧的. ♠

证明 设 X 是仿紧的且 $A\subset X$ 是闭集. 设 $\mathscr{U}$ 是 A 的任意开覆盖. 令 $\mathscr{U}_1=\mathscr{U}\cup\{A^c\}$. 那么它是 X 的开覆盖. 根据定义，存在 $\mathscr{U}_1$ 的局部有限开加细 $\widetilde{\mathscr{U}_1}$. 令

$$\widetilde{\mathscr{U}}=\{U\in\widetilde{\mathscr{U}_1}\mid U\not\subset A^c\}.$$

则 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 是 A 的开覆盖，且是 $\mathscr{U}$ 的局部有限加细. □

¶ 局部紧性 + 可数性 + 分离性 $\Longrightarrow$ 仿紧性

我们已经看到，仿紧性是如此复杂，以至于 $\mathbb{R}^n$ 的仿紧性都不是显然的. 我们也提到，仿紧性最主要的用处之一在于构建分析中重要的工具“单位分解”. 此外，我们还知道，分析中重要的空间往往具有良好的局部性质（“局部欧氏”，或者更一般地“局部紧”），良好的可数性和良好的分离性. 于是一个自然的问题（或者美好的愿望）是：那些满足良好的局部紧性、可数性、分离性的空间是否一定是仿紧的?

答案是确定一定以及肯定的：

定理 2.10.5. ($\boxed{\text{Lindelöf + 局部紧 + (T2)} \Longrightarrow \text{仿紧}}$)

任意局部紧、Hausdorff 且 Lindelöf 的拓扑空间是仿紧的. ♡

注 2.10.6. 当然我们可以将 Lindelöf 替换为更强的可数性条件 (A2).[35] 另一方面，可以证明2.10.3(4)是局部紧且第二可数的，故定理中的分离性条件是必要的；我们在下文命

[35] 不难证明，在 LCH 空间里，Lindelöf 跟 σ-紧是等价的. （但 LCH 空间里第二可数确实比 Lindelöf 强：不难构造出 Lindelöf 但不第二可数的 LCH 空间.）

题2.10.11中将会证明仿紧的 Hausdorff 空间是正规的，而我们在第 2.7 节末尾也提过存在 LCH 空间不是正规的，以及存在 Lindelöf 且 Hausdorff 不是正则（从而也不是正规）的空间，于是定理中的可数性、局部紧条件都是不能去掉的.【但我们并不是说这些条件都是仿紧的必要条件，比如离散度量空间不必是 Lindeöf 的.】

由命题 2.7.21，局部紧 Hausdorff 空间都是正则的. 故只需证明

命题 2.10.7. （$\boxed{\text{Lindelöf + (T3)} \Longrightarrow \text{仿紧}}$）

任意 Lindelöf 的正则空间是仿紧的.

证明 设 X 是 Lindelöf 且 (T3) 的. 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 是 X 的任意开覆盖. 对于任何 $x\in X$, 我们选取 $\alpha(x)$ 使得 $x\in U_{\alpha(x)}$. 因为 X 是 (T3) 的，所以我们可以找到开集 V_x 和 W_x 使得

$$x\in V_x\subset \overline{V_x}\subset W_x\subset \overline{W_x}\subset U_{\alpha(x)}.$$

现在 $\mathscr{V}=\{V_x\}$ 是 X 的开覆盖. 由于 X 是 Lindelöf，我们可以找到一个可数子覆盖

$$\{V_1,V_2,V_3,\cdots\}\subset\mathscr{V}.$$

注意此时 $\{W_1,W_2,W_3,\cdots\}$ 也是 X 的开覆盖. 我们记 $R_1=W_1$ 并迭代定义

$$R_n=W_n\setminus(\overline{V_1}\cup\cdots\cup\overline{V_{n-1}}),\quad n>1.$$

我们断言 $\mathscr{R}=\{R_n\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限开加细：

- 根据构造, $\mathscr{R}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细.
- $\mathscr{R}$ 是 X 的覆盖，因为对任意 x, 如果我们令 n 为满足 $x\in W_n$ 的最小整数，则 $x\notin\overline{V_1}\cup\cdots\cup\overline{V_{n-1}}$，这是因为 $\overline{V_i}\subset W_i$. 所以我们有 $x\in R_n$.
- $\mathscr{R}$ 是局部有限的，因为对任意 $x\in X$, 我们可以找到 n 使得 $x\in V_n$, 而 x 的开邻域 V_n 仅与 $\mathscr{R}$ 中的有限多个元素相交，这是因为对任意 $m>n$ 都有 $V_n\cap R_m=\emptyset$.

所以 X 是仿紧的. □

由此我们就可以得到很多仿紧空间.

¶ 拓扑流形

我们在定义2.4.15中引入过一类非常好的空间，即局部欧氏空间. 然而，在本节习题中我们可以看到，局部欧氏空间有可能在局部没有好的分离性（例如不是 Hausdorff 空间），或者整体没有好的可数性（例如不是 (A2) 空间）. 为此，我们引入下面这个概念：

定义 2.10.8. （拓扑流形）

若拓扑空间 X 是 Hausdorff 的和第二可数的，且 X 中的每点都有一个开邻域同胚于 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集，则我们称 X 是一个 n-**维拓扑流形**.

拓扑流形是一类最重要的拓扑空间之一，在数学和物理中有广泛的应用. 根据定义，若 X 是 n-维拓扑流形，那么对于 X 中的每个点 x，都存在一个开集 $U_x\ni x$ 和从 U_x 到开集 $V_x\subset\mathbb{R}^n$ 的同胚 $\varphi_x:U_x\to V_x$. 我们把三元组 (φ_x,U_x,V_x) 称为流形 X 在点 x 附近的一个**坐标卡**.

通常我们把一维流形称为曲线，把二维流形称为曲面，这两者将是我们本书最后一部分的主要研究对象.

因为局部欧氏空间都是局部紧的，结合命题 2.7.22 和命题 2.7.21 我们得到

命题 2.10.9.（流形 (T4) 且仿紧）

拓扑流形都是正规且仿紧的.

此外，由 Urysohn 度量化定理，拓扑流形都是可度量化的.

¶ 阅读材料：度量空间的仿紧性

仿紧性的用处之一是刻画可度量性. 在 1948 年 Stone[36]证明了

定理 2.10.10.（Stone 定理）

任意度量空间都是仿紧的.

证明 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ 是度量空间 (X, d) 的开覆盖. 根据良序定理，Λ 上有一个良序 $\preceq$. 在该良序下，Λ 的任意子集都有极小元. 于是，对于任意 x，存在唯一的 $\alpha = \alpha_x \in \Lambda$ 使得

$$x \in U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta \prec \alpha} U_\beta.$$

对于任意 $\alpha \in \Lambda$ 以及 $n \in \mathbb{N}$，我们迭代地定义

$$X_{\alpha,n} = \left\{ x \in X \;\middle|\; B(x, \frac{3}{2^n}) \subset U_\alpha \text{ 且} x \notin \bigcup_{\beta \prec \alpha} U_\beta \cup \bigcup_{\beta \in \Lambda, k < n} V_{\beta,k} \right\}$$

并令

$$V_{\alpha,n} = \bigcup_{x \in X_{\alpha,n}} B(x, \frac{1}{2^n}).$$

下面我们证明 $\mathscr{V} = \{V_{\alpha,n}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限开加细. 显然我们有

- 每个 $V_{\alpha,n}$ 都是开集，
- $V_{\alpha,n} \subset U_\alpha$，
- 对任意 x，令 α 为如上所选取的极小元. 取 n 使得 $B(x, \frac{3}{2^n}) \subset U_\alpha$. 则要么对于某个 $\beta \in \Lambda$ 和 $k < n$ 有 $x \in V_{\beta,k}$，要么 $x \in X_{\alpha,n} \subset V_{\alpha,n}$.

所以 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的覆盖 X 的开加细. 还需证明局部有限性.

对于任意 $x \in X$，我们令 α 为使得 $x \in \cup_n V_{\alpha,n}$ 的最小下标. 取 n, k 使得 $B(x, 2^{-k}) \subset V_{\alpha,n}$. 则用三角不等式可以证明(细节略去)

(1) 对任意 $l \geq n+k$，球 $B(x, 2^{-n-k})$ 跟 $V_{\beta,l}$ 不相交.

(2) 对任意 $l < n+k$，至多有一个 $\beta \in \Lambda$ 使得球 $B(x, 2^{-n-k})$ 跟 $V_{\beta,l}$ 相交.

于是任意 x 都有一个开邻域 $B(x, 2^{-n-k})$，它跟 $\mathscr{V}$ 中不超过 $n+k$ 个元素相交. 故 $\mathscr{V}$ 是局部有限的. □

[36]斯通（Arthur Stone,1916-2000），英国数学家，主要研究拓扑学. Stone 的原始证明比较复杂，这里给出 1968 年 M. Rudin 的简化证明.

2.10.2 单位分解

¶ 仿紧性“增强”分离公理 (T2) 和 (T3)

仿紧性对于在流形上发展分析理论非常重要. 事实上，我们引入仿紧概念的主要目的之一就是用于在流形上构造单位分解. 在简单版本的单位分解定理即定理2.9.23中，我们已经知道，构造单位分解时我们需要应用 Urysohn 引理或者 Tietze 扩张定理，于是我们需要空间的正规性. 一般来说，一个仿紧空间可能不是正规的. 然而，正如紧性可以“增强”分离公理 (T2) 和 (T3)，仿紧性也可以做到同样的事情. 证明的关键还是“从局部到整体”论证，以及习题 1.5 中的如下事实：对于局部有限的子集族 $\mathcal{A}$，

$$\overline{\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}.$$

命题 2.10.11.（仿紧性增强分离性）

(1) 仿紧的 Hausdorff 空间都是正则的.

(2) 仿紧的正则空间都是正规的.

证明

(1) 设 X 是仿紧的 Hausdorff 空间，B 是 X 的闭子集（因此也是仿紧的）并且 $x \notin B$. 由于 X 是 (T2)，$\forall y \in B$，存在开集 $U_y \ni x, V_y \ni y$ 使得 $U_y \cap V_y = \emptyset$. 于是
$$\mathscr{U}_1 := \{V_y \mid y \in B\}$$
是 B 的开覆盖，从而有局部有限开加细 $\widetilde{\mathscr{U}}$. 由定义，对于任意 $V \in \widetilde{\mathscr{U}}$，都存在某个 $V_y \in \mathscr{U}_1$ 使得 $V \subset V_y$，因而 $\overline{V} \subset \overline{V_y} \subset U_y^c$. 特别地，对于任意 $V \in \widetilde{\mathscr{U}}$，$x \notin \overline{V}$. 令
$$U = \bigcup_{V\in\widetilde{\mathscr{U}}} V.$$
则 U 是开集并且 $B \subset U$. 由于 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 是局部有限的，根据习题 1.5，我们有
$$\overline{U} = \overline{\bigcup_{V\in\widetilde{\mathscr{U}}} V} = \bigcup_{V\in\widetilde{\mathscr{U}}} \overline{V}.$$
因此 $\overline{U}^c$ 是 x 的一个开邻域，它与 B 的开邻域 U 不相交. 所以 X 是 (T3) 空间.

(2) 重复上面的证明，将点 x 替换为闭子集 A 并将“(T_i)”替换为“(T_{i+1})”. □

¶ 仿紧 Hausdorff 空间的好的加细

一般而言，在选取一个开覆盖的局部有限加细覆盖时，加细覆盖里的集合不必一一对应于原覆盖的开集. 但是对于仿紧 Hausdorff 空间，我们有

引理 2.10.12.（仿紧 (T2) 空间的同指标加细）

设 X 为仿紧 Hausdorff 空间，$\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 为 X 的开覆盖，则存在一个 $\mathscr{U}$ 的局部有限的开加细 $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}$，使得对任意 α 有 $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$.

证明 因为 X 仿紧且 (T2)，所以它也是 (T3) 和 (T4). 所以如果我们令

$$\mathscr{A}=\{A\in\mathscr{T}\mid\exists U_\alpha\in\mathscr{U}\text{ 使得}\overline{A}\subset U_\alpha\},$$

那么 $\mathscr{A}$ 是 X 的开覆盖(想一想为什么). 设

$$\mathscr{B}=\{B_\beta\mid\beta\in\Lambda\}$$

是 $\mathscr{A}$ 的局部有限开加细，其指标集可能与 $\mathscr{A}$ 的指标集不同. 对于每个 β,，我们选取 $\alpha=f(\beta)$ 使得

$$\overline{B_\beta}\subset U_{f(\beta)}.$$

现在对于集族 $\mathscr{U}$ 的每个指标 α，令

$$V_\alpha=\bigcup_{f(\beta)=\alpha}B_\beta,$$

其中，如果不存在这样的 β 则取 $V_\alpha=\emptyset$. 由 $\mathscr{B}$ 的局部有限性，

$$\overline{V_\alpha}=\overline{\bigcup_{f(\beta)=\alpha}B_\beta}=\bigcup_{f(\beta)=\alpha}\overline{B_\beta}\subset U_\alpha.$$

还需要验证局部有限性：对于任意 $x\in X$，存在 x 的开邻域 U_x，它仅与有限多个 B_β 相交. 因此，U_x 只与满足 $f(\beta)=\alpha$ 的那些 α 相交. □

¶ 单位分解

下面我们引入（从属于一个开覆盖的）**单位分解**的概念，这个概念最早是 Dieudonné 在 1937 年正式引入的：

定义 2.10.13.（单位分解）

(a) 若拓扑空间 X 上的一族函数 $\{\rho_\alpha\}$ 满足

  (1) 每一个 $\rho_\alpha:X\to[0,1]$ 都是连续的. [注意: ρ_α 定义在整个空间 X 上!]

  (2) 集族 $\{\mathrm{supp}\rho_\alpha\}$ 是局部有限的,

  (3) 对任意 $x\in X$, 都有 $\sum_\alpha\rho_\alpha(x)=1$.

  则我们称 $\{\rho_\alpha\}$ 是 X 上的一个（连续的）**单位分解** (简称 **P.O.U.**).

(b) 若 $\{U_\alpha\}$ 是 X 的一个开覆盖，$\{\rho_\alpha\}$ 是 X 上的一个单位分解，且

  (4) 对任意 $\alpha,\mathrm{supp}\rho_\alpha\subset U_\alpha$.

  则我们称 $\{\rho_\alpha\}$ 是**从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解.** ♣

注意条件 (1) 和 (2) 共同保证了 (3) 中的和函数是一个连续函数.

显然，如果存在从属于开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解 $\{\rho_\alpha\}$，则由定义，$\{x\mid\rho_\alpha(x)>0\}$ 就是 $\{U_\alpha\}$ 的一个局部有限的开加细. 于是，如果 X 的任意开覆盖都有从属于它的单位分解，那么 X 一定是仿紧的.

反之，我们有

定理 2.10.14.（单位分解的存在性）

设 X 为仿紧 Hausdorff 空间. 那么对于 X 的任意开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 都存在一个从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解.

证明的**想法**很简单：对任何给定的开覆盖，我们构造一个“更小”的局部有限开覆盖 $\{V_\alpha\}$ 和“比更小还要小”的闭覆盖 $\{K_\alpha\}$，这样我们可以应用定理 2.9.23. 但是，这里还有一个微妙的小问题：我们想要的是集族 $\{\mathrm{supp}(\rho_\alpha)\}$ 是局部有限的，而应用定理我们只能得到“在 V_α^c 上有 $\rho_\alpha = 0$”，从而 $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset \overline{V_\alpha}$，但 $\{\overline{V_\alpha}\}$ 并不显然是局部有限的. 解决这个问题的方法有两种：一是老老实实证明(请读者给出证明)

$\{V_\alpha\}$ 是局部有限的 $\Longrightarrow$ $\{\overline{V_\alpha}\}$ 是局部有限的.

二是取巧，是构造“比‘比更小还要小’还要小”的开覆盖！

证明 设 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 是 X 的开覆盖. 应用命题2.10.12三次，我们得到 $\mathscr{U}$ 的局部有限开加细 $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}$，$\mathscr{V}$ 的局部有限开加细 $\mathscr{W} = \{W_\alpha\}$ 以及 $\mathscr{W}$ 的局部有限开加细 $\mathscr{Z} = \{Z_\alpha\}$ (都具有相同的指标集) 使得

$$\overline{Z_\alpha} \subset W_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha.$$

现在对 $\overline{Z_\alpha} \subset W_\alpha$ 应用定理 2.9.23，得到连续函数 $\rho_\alpha : X \to [0,1]$ 使得

- $\rho_\alpha(\overline{Z_\alpha}) > 0$,
- $\rho_\alpha(W_\alpha^c) = 0$,
- $\sum_\alpha \rho_\alpha = 1$.

函数族 $\{\rho_\alpha\}$ 正是我们想要寻求的从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解，因为

$$\mathrm{supp}\ \rho_\alpha \subset \overline{W_\alpha} \subset U_\alpha,$$

而且 $\{\mathrm{supp}\ \rho_\alpha\}$ 是局部有限的，因为 $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subset V_\alpha$, 而 $\{V_\alpha\}$ 是局部有限的. □

¶ LCH 空间的单位分解

现在我们假设 X 是 LCH 空间，为了保证仿紧性我们还假设 X 是 σ-紧的. 于是 X 是仿紧的 Hausdorff 空间，从而定理2.10.14对 X 是成立的的. 但是，我们发现，这样的单位分解未必是我们想要的，因为根据我们的经验，对于 LCH 空间，我们往往希望所得到的函数是紧支函数，而定理2.10.14所给的函数 ρ_α 未必是紧支函数. 事实上，只要我们依然要求对开覆盖中的每个开集 U_α 都恰好指定一个函数，那我们就未必能让我们得到的函数是紧支的，例如如果 X 是非紧 LCH 空间而 $\mathcal{U}$ 是 X 的一个有限开覆盖，则所得的单位分解中的函数不可能是紧支的.

幸运的是，只要我们不再要求对开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 中的每个开集 U_α 都恰好指定一个函数，而是一次性构造可数多个连续函数 $\{\rho_n\}$，使得 $\{\mathrm{supp}(\rho_n)\}$ 是 $\{U_\alpha\}$ 的加细，即把单位分解定义中的条件 (4) 改成

(4′) 对于每个 n，存在 $U_\alpha \in \mathscr{U}$ 使得 $\mathrm{supp}(\rho_n) \subset U_\alpha$；

则我们还是可以得到一个单位分解，且所得的每个 ρ_n 是紧支的：

定理 2.10.15.（LCH 空间中单位分解的存在性）

设 X 为局部紧 Hausdorff 且 σ-紧空间. 那么对于 X 的任意开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$，存在单位分解 $\{\rho_n\}$ 使得

(1) 每个 $\operatorname{supp}(\rho_n)$ 是紧的，

(2) 对每个 n, 存在 $U_\alpha\in\mathscr{U}$ 使得 $\operatorname{supp}(\rho_n)\subset U_\alpha$.

其证明思路是构造满足特定条件的可数的局部有限开加细. 证明细节留作习题.

¶ 应用：将流形嵌入到 $\mathbb{R}^N$

我们知道，拓扑流形总是仿紧的. 有了定理 2.10.14，我们就可以着手在拓扑流形上发展分析：由于流形是局部欧氏的，因此我们（通过坐标）可以在局部利用欧氏空间的结构给出各种局部数据. 然后利用单位分解，我们可以将这些局部数据黏合为整体数据，例如我们可以

- 将局部定义的连续函数黏合为整体的连续函数，
- 首先在局部定义积分，然后通过黏合来定义流形上的积分，
- 将局部定义的向量场黏合为全局向量场，
- 将局部定义的“内积结构”黏合为流形上的黎曼度量，
- ······

作为单位分解的一个应用，我们证明

定理 2.10.16.（紧流形嵌入到欧氏空间）

任意 n 维紧拓扑流形都可以嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中.

证明 设 X 是一个拓扑流形. 在每个点 $x\in X$ 附近取坐标卡 (φ_x,U_x,V_x). 因为 X 是紧的，我们可以取有限个坐标卡邻域 $\{U_1,\cdots,U_m\}$ 覆盖 X. 设 $\{\rho_1,\cdots,\rho_m\}$ 是从属于这个覆盖的单位分解. 定义 $h_i:X\to\mathbb{R}^n$ 为

$$h_i(x)=\begin{cases}\rho_i(x)\varphi_i(x), & x\in U_i\\ (0,\cdots,0), & x\notin \operatorname{supp}(\rho_i).\end{cases}$$

根据粘贴引理，每个 h_i 都是 X 上的连续映射. 现在我们令 $N=m+mn$ 并定义 $F:X\to\mathbb{R}^N$ 为

$$F(x)=(\rho_1,\cdots,\rho_m,h_1,\cdots,h_m).$$

则我们有

- F 是连续的，这是因为每个分量都是连续的.
- F 是单射: 如果 $F(x)=F(y)$, 则存在 i 使得 $\rho_i(x)=\rho_i(y)>0$, 因此 $x,y\in U_i$. 由此得 $\varphi_i(x)=\varphi_i(y)$，所以有 $x=y$.

由于 X 是紧的且 $\mathbb{R}^N$ 是 Hausdorff 的，F 是 X 到其像集上的同胚，即拓扑嵌入. □

注 2.10.17. 同样的定理也对非紧拓扑流形成立，甚至可以证明更强的结论，即可以取 $N=2n+1$，但证明较为复杂，Munkres《拓扑学》第 50 节习题 6 中给出了一个梗概.

2.10.3 阅读材料：两个度量化定理

¶ Nagata-Smirnov 度量化定理

仿紧性（或更准确地说，局部有限性）不仅用于构造单位分解，还用于刻画可度量性. 刻画什么拓扑空间是可度量化的是一般拓扑学中的一个大问题. 寻找解决方案的第一大步是 Urysohn 度量化定理，该定理指出满足 (A2)、(T2) 和 (T4) 的拓扑空间都是可度量化的. 当然，由于 (T2) 蕴含 (T1)，我们可以将条件 (T4) 替换为 (T3). 所以这些分离公理是空间可度量化的必要条件. 但是，可数性假设 (A2) 不是必要的. 因此，要刻画可度量性，自然的想法是找到一个较弱的条件来替换 (A2). 正确的条件最终在 1950 年左右被 Nagata 和 Smirnov 独立发现：σ-局部有限.

定义 2.10.18.（σ-局部有限） 若 X 中的子集族 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}=\cup_n\mathscr{A}_n$，其中每个 $\mathscr{A}_n$ 都是局部有限族，则我们称 $\mathscr{A}$ 是一个 **σ-局部有限族**. ♣

下面我们陈述 Nagata-Smirnov 度量化的完整刻画：

定理 2.10.19.（Nagata-Smirnov 度量化定理） 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 是可度量化的当且仅当它是 (T2), (T3) 并且存在一个 σ-局部有限的基. ♡

证明 首先假设 X 是可度量化的. 然后是 (T2) 和 (T4)，因此是 (T1) 和 (T3). 根据 Stone 定理，它是仿紧的. 所以对于每个 n，开覆盖

$$\mathscr{U}_n=\{B(x,\frac{1}{n})\mid x\in X\}$$

有一个局部有限的开加细 $\mathscr{B}_n$. 还需要证明 σ-局部有限族 $\mathscr{B}=\cup_n\mathscr{B}_n$ 是一个基. 证明是标准的：对于任意 $x\in X$ 和任意 $\varepsilon>0$，我们选取 n 使得 $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$. 在 $\mathscr{B}_n$ 中存在一个开集 B 使得 $x\in B$. 因此 $B\subset B(x,\frac{2}{n})\subset B(x,\varepsilon)$.

反之，假设 X 是 (T2), (T3) 并且存在 σ-局部有限基.

> **引理 2.10.20.（σ-局部有限基 +(T3)$\Longrightarrow$ 完美正规）** 设 X 是 (T3) 空间并且存在 σ-局部有限基. 则
> (1) X 中的任意闭集都是 G_δ-集.
> (2) X 是 (T4). ♢
>
> 所以在某种意义上，“σ-局部有限基”的存在性是另一个版本的可数性，它增强了可分性 [类似于 (A2) 或 Lindelöf]. 我们将把引理的证明留作练习.

让我们继续我们的证明.

根据引理，X 是 (T4) 并且 X 中的任意闭子集都是 G_δ-集. 设 $\mathscr{B}=\cup_n\mathscr{B}_n$ 是一个 σ-局部有限基，其中每个 $\mathscr{B}_n$ 都是局部有限的. 对于任意 $B\in\mathscr{B}_n$，我们选取一个连续函数 $f_{n,B}:X\to[0,1/n]$ 使得

$$f_{n,B}^{-1}(0)=B^c.$$

现在定义

$$d_n(x,y)=\sum_{B\in\mathscr{B}_n}|f_{n,B}(x)-f_{n,B}(y)|.$$

这是一个连续函数，因为和是局部有限的. 根据定义，函数 d_n 满足 $d_n(x,y)=d_n(y,x)$ 和 $d_n(x,z)\le d_n(x,y)+d_n(y,z)$. 然而，$d_n$ 不是一个度量，因为一般它不是点分离的：对于某些 $x\neq y$，我们可能有 $d_n(x,y)=0$. 好消息是我们有足够多的 d_n 足以分离点：事实上，我们有

事实. 对于任意闭集 F 和 $x\notin F$，存在 n 和 $B\in\mathscr{B}_n$ 使得

$$d_n(x,y)\ge a:=f_{n,B}(x)>0,\quad \forall y\in F.$$

为了证明上述事实，我们只需取 n 和 $B\in\mathscr{B}_n$ 使得 $x\in B\subset F^c$. 则 $f_{n,B}(x)>0$ 且 $f_{n,B}(F)=0$. 所以对于所有 $y\in F$ 都有 $d_n(x,y)\ge f_{n,B}(x)>0$.

特别地，对于 $y\neq x$，如果我们取 $F=\{y\}$，则我们得到 $d_n(x,y)>0$. 现在我们定义

$$d(x,y)=\sum_n 2^{-n}d_n(x,y).$$

那么 d 是 X 上的一个度量. 还需证明度量拓扑与 $\mathscr{T}$ 一致. 因为 d 关于拓扑 $\mathscr{T}$ 是连续的，所以度量球在 $\mathscr{T}$ 中都是开集. 因此 $\mathscr{T}_d\subset\mathscr{T}$. 反之，对于任意开集 $U\in\mathscr{T}$ 和任意 $x\in U$，根据我们刚刚证明的事实，我们可以找到 n 和 $B\in\mathscr{B}_n$ 使得对于所有 $y\in U^c$ 有 $d(x,y)>r=2^{-n}f_{n,B}(x)>0$，即 $B(x,r)\subset U$. 因此 $U\in\mathscr{T}_d$. 所以 $\mathscr{T}=\mathscr{T}_d$. □

¶ Smirnov 度量化定理

在习题中，我们引入了局部可度量化的概念. 显然可度量化空间都是局部可度量化的. 反之，我们有

定理 2.10.21.（Smirnov 度量化定理）

拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是局部可度量化的仿紧 Hausdorff 空间. ♡

证明 定理的一半是显然的，故只需证明：若 X 是局部可度量化的仿紧 Hausdorff 空间，则 X 是可度量化的. 根据 Nagata-Smirnov 定理，只需证明 X 具有 σ-局部有限基. 为此，我们先用可度量化开集族覆盖 X. 由仿紧性，我们可得到一个局部有限的开集族 $\mathcal{U}$，其中每个元素都是可度量化的开集. 跟 Nagata-Smirnov 定理证明的前半部分一样，我们令

$$\mathcal{U}_n=\{B_U(x,\frac{1}{n})\mid x\in U,U\in\mathcal{U}\}$$

并取 $\mathcal{U}_n$ 的局部有限开加细 $\mathcal{B}_n$. 最后同样用标准的方式证明 $\mathcal{B}=\cup_n\mathcal{B}_n$ 是一组基：任取 $x\in X$ 以及 x 的开邻域 U. 由局部有有限性，x 仅落在 $\mathcal{U}$ 中的有限个元素中，不妨设他们为 $U_1,\cdots,U_k$. 于是可以找到 $\varepsilon>0$ 使得对每个 $1\le i\le k$ 都有 $B_{U_i}(x,\varepsilon)\subset U_i\cap U$. 最后选取 n 使得 $1/n<\varepsilon/2$，并选取 $B\in\mathcal{B}_n$ 使得 $x\in B$，存在 $1\le i\le k$ 使得 $B\subset U_i$. 于是由三角不等式，$x\in B\subset B_{U_i}(x,\varepsilon)\subset U$. □

第 3 章 从连通性到基本群

3.1 连通性

3.1.1 连通空间

¶ 连通性的定义

连通性是最简单且最有用的拓扑性质之一. 它不仅直观、相对容易理解，而且是用以证明很多重要结果（例如中值定理）的强大工具.

对于有简单图像的拓扑空间，我们可以用直观判断它是否连通. 但对于较为复杂的空间，判断它是否连通一般而言并不容易.

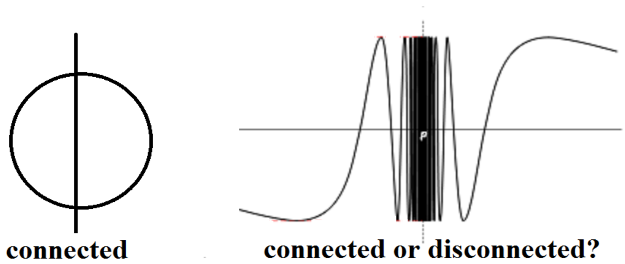


图 3.1: 连通还是不连通?

对于我们不知道怎么画出图像的抽象拓扑空间，我们也想提出连通性的问题. 例如,（具有不止一个元素的）离散拓扑空间应该是“非常”不连通的. 但是，Sorgenfrey 直线是连通的还是不连通的? $[0,1]$ 上的连续函数空间是连通的还是不连通的? 当然，并非每个抽象拓扑空间的连通性都是有价值去探讨的问题. 但是，人们确实关注以下在分析中自然出现的问题:

- 函数空间 $\mathcal{C}(S^1,\mathbb{R}^2)$ 以及 $\mathcal{C}(S^1,\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ 是否连通?
- 道路空间 $\{\gamma\in\mathcal{C}([0,1],X)\mid\gamma(0)=\gamma(1)\}$ 是否连通?

所以我们需要（通过开集族给出）一个严格的连通性定义. 在给出严格的定义之前，我们先来看 $\mathbb{R}$ 中的几个集合

$$(a)\ (0,3)\qquad (b)\ (0,1)\cup[2,3)\qquad (c)\ (0,1)\cup(1,3]\qquad (d)\ (0,1]\cup(1,3)$$

当然 (a) 是连通的, (b) 和 (c) 是不连通的, 而 (d) 是连通的! 尽管 (d) 看起来像两个区间的并集，但它们实际上是一个区间 $(0,3)$，只是被刻意写成了两个不相交子集的并集. 仔细分析一下我们很容易发现：这两个不相交子集 $(0,1]$ 和 $(1,3)$ 实际上在 $x=1$ 处是“连接”在一起的，因为 1 虽然只是 $(0,1]$ 的一个元素，但却位于子集 $(1,3]$ 的闭包内. 对于 (c) 的情况，虽然 $(0,1)$ 和 $(1,3]$ 两个“组件”“相邻”，但它仍然是不连通的，因为 $(0,1)$ 并不包含 $(1,3]$ 的闭包中的任何元素，而 $(1,3]$ 也不包含 $(0,1)$ 的闭包中的任何元素.

这个例子启发我们给出如下连通性的定义. 与我们学过的大多数其他概念不同，连通性由“不连通性”所定义的：

定义 3.1.1.（连通性）

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间.

(1) 如果存在非空子集 $A,B\subset X$ 使得

$$X=A\cup B \quad 且 \quad A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\emptyset,$$

则我们称 X 是 **不连通的**.

(2) 如果 X 不是不连通的，则我们称 X 是 **连通的**.

类似地，如果 X 中的子集 A 关于关于子空间拓扑是连通的或不连通的，则我们称 A 是 X 的**连通子集**或**不连通子集**. ♣

注意：根据定义，空集和单点集都是连通的.

定义 3.1.2.（完全不连通空间）

如果拓扑空间 X 中仅有单点集合空集是连通子集，则我们称 X 是**完全不连通的**. ♣

¶ 连通性的等价刻画

上面的定义很直观，但也有点复杂. 我们给出其他几种等价的方式来刻画连通性：

命题 3.1.3.（连通性的等价刻画）

对于拓扑空间 X, 以下是等价的:

(1) X 是不连通的.

(2) 存在非空不相交开集 $A,B\subset X$ 使得 $X=A\cup B$.

(3) 存在非空不相交闭集 $A,B\subset X$ 使得 $X=A\cup B$.

(4) 存在 $A\neq\emptyset, A\neq X$ 使得 A 在 X 中是既开又闭的.

(5) 存在连续满射 $f:X\to\{0,1\}$. ♠

证明 我们有 (2) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4)，这是因为

$$X=A\cup B \ 且\ A\cap B=\emptyset \iff A^c=B \ 且\ A=B^c.$$

(1) $\Longrightarrow$ (3) 是因为

$$A\cap\overline{B}=\emptyset,\ X=A\cup B \Longrightarrow B=B\cap\overline{B}=X\cap\overline{B}=\overline{B},$$

因此 B 是闭集. 同理 A 也是闭集.

为证明 (3) $\Longrightarrow$ (1), 我们取 X 中的闭集 A,B 使得

$$X=A\cup B.$$

则 $A\cap\overline{B}=A\cap B=\emptyset$. 同理 $\overline{A}\cap B=\emptyset$.

最后，(5) $\Longrightarrow$ (2) 是平凡的，而 (2) $\Longrightarrow$ (5) 是因为我们可以定义 $f(A)=0$ 且 $f(B)=1$, 根据定义 f 是连续的. □

¶ 连通空间和不连通空间的例子

下面我们给出连通空间和不连通空间的一些例子.

例 3.1.4.

(1) $(X,\mathscr{T}_{\text{trivial}})$ 是连通的, 而 $|X|\geq 2$ 时 $(X,\mathscr{T}_{\text{discrete}})$ 是不连通的.

(2) $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ 是不连通的, 这是因为

$$\mathbb{Q}=((-\infty,-\sqrt{2})\cap\mathbb{Q})\cup((-\sqrt{2},+\infty)\cap\mathbb{Q}).$$

事实上，因为任意两个有理数之间都存在无理数，所以重复上述论证，我们得到: $\mathbb{Q}$ 是完全不连通的. [但是: $\mathbb{Q}$ 上的诱导子空间拓扑不是离散拓扑!]

(3) $\mathbb{Q}^c$, Cantor 集, 离散拓扑空间都是完全不连通的.

(4) Sorgenfrey 直线 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 是完全不连通的: 设 $A\subset\mathbb{R}$ 且 $a,b\in A$. 不妨设 $a<b$. 取 $c\in(a,b)$. 根据定义, $(-\infty,c)=\cup_{x<c}[x,c)$ 和 $[c,+\infty)$ 在 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_{Sorgenfrey})$ 中都是开集. 因此 $A=A_1\cup A_2$, 其中 $A_1=A\cap(-\infty,c)$ 和 $A_2=A\cap[c,\infty)$ 都是 A 中的非空开集，于是 A 是不连通的.

下面我们给出实数 $\mathbb{R}$ 的全部连通子集的刻画. 设 $I\subset\mathbb{R}$ 是一个区间，即满足

"若 $x,y\in I$ 且 $x<y$，则对于任意 $x<z<y$，均有 $z\in I$."

区间可以是开区间、闭区间、半开半闭区间，以及单点集:

$$(a,b),[a,b],\{a\},(a,b],[a,b),(a,+\infty),[a,+\infty),(-\infty,b],(-\infty,b),(-\infty,+\infty)$$

我们有

定理 3.1.5. (区间的连通性)

$\mathbb{R}$ 的子集是连通的当且仅当它是一个区间.

证明 若 S 是 $\mathbb{R}$ 的子集，且 S 不是一个区间，则存在 $x<z<y$ 使得 $x,y\in S$ 但 $z\notin S$. 重复例3.1.4 (2) 的论证，可以将 S 写出两个开集的并

$$S=\big(S\cap(-\infty,z)\big)\cup\big(S\cap(z,+\infty)\big),$$

从而 S 不连通.

下证区间 $I\subset\mathbb{R}$ 都是连通的. 假设 I 是不连通的. 则存在开集 $U,V\subset\mathbb{R}$ 使得

$$U\cap I\neq\emptyset,\quad V\cap I\neq\emptyset\quad \text{且}\quad I\subset U\cup V.$$

不失一般性, 假设存在 $a<b$ 使得 $a\in U\cap I$ 且 $b\in V\cap I$. 令

$$A=\{x\in U\cap I\mid x<b\}$$

并记 $c=\sup A$. 则由 U 是开集可知 $c\neq a$，于是 $a<c\leq b$. 特别地，$c\in I$. 但是，

- $c\notin U$: 如果 $c\in U$, 则 $\exists\varepsilon>0$ 使得 $b>c+\varepsilon\in U$. 注意因为 I 是区间, 且 $c<c+\varepsilon<b$, 故 $c+\varepsilon\in I\cap U$. 这与 $c=\sup A$ 矛盾.
- $c\notin V$: 如果 $c\in V$, 则 $\exists\varepsilon>0$ 使得 $(c-\varepsilon,c]\subset V$. 因为 $c>a$，所以可取 ε 充分小使得 $(c-\varepsilon,c]\subset I$，从而与 $c=\sup A$ 矛盾.

所以 $c\notin U\cup V$，从而 $c\notin I$，矛盾! □

注 3.1.6. 在证明区间的连通性时，我们仅使用了如下事实：$\mathbb{R}$ 具有全序关系 $<$ 使得

(i)（**Dedekind 完备性**）任意有上界的子集都有一个最小上界.

(ii)（**稠密性**）对任意 $x<y, \exists z$ 使得$x<z<y$.

我们称满足这两个条件（且元素个数多于一个）的全序集为**线性连续统**. 除了 $\mathbb{R}$ 外，还有很多别的线性连续统，例如习题 2.10 中的“长直线”. 重复上面的论证，可得：

赋有序拓扑的线性连续统 $(X,<)$ 的子集是连通集当且仅当它是区间.

¶ 连续性原理

区间（包括 $\mathbb{R}$ 本身）的连通性这个结论虽然简单却非常有用：

连续性原理（连通性方法） 要证明某性质 $P(t)$ 对所有 $t\in I$ 成立，只需验证

(a) $\exists t_0\in I$ 使得 $P(t_0)$ 成立.

(b) $\{t\mid P(t)$ 成立$\}$ 是 I 中的开集.

(c) $\{t\mid P(t)$ 成立$\}$ 是 I 中的闭集.

我们可以将连续性原理视为某种“连续版本”的数学归纳法. 下面我们用一个简单的例子来说明如何使用该方法：

例 3.1.7. 如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是实解析函数, 且存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得

$$f^{(n)}(x_0)=0,\ \forall n.$$

则 $f(x)\equiv 0$.

证明 设 $S=\{x\in\mathbb{R}\mid f^{(n)}(x)=0,\forall n\}$. 则

- $x_0\in S\implies S\neq\emptyset$.
- S 是开集: $x\in S\implies f$ 在 x 处 Taylor 展开的收敛半径以内的任意点 y 都落在 S 中.
- S 是闭集: $x_n\in S, x_n\to x_0\implies x_0\in S$.

于是 $S=\mathbb{R}$, 即 $f(x)\equiv 0$. □

3.1.2 连通性的推论

¶ 一般的中值定理

我们列出连通空间的几个性质. 首先我们证明连通性是连续映射下保持的性质：

命题 3.1.8.（连通性被连续映射保持）

设 $f:X\to Y$ 是连续映射，且 $A\subset X$ 是连通子集，则像集 $f(A)$ 是 Y 的连通子集.

证明 使用反证法. 我们假设 $f(A)$ 是不连通的. 则存在 Y 中满足 $V_i\cap f(A)\neq\emptyset\ (i=1,2)$ 且 $V_1\cap V_2\cap f(A)=\emptyset$ 的开集 V_1,V_2, 使得

$$f(A)=(V_1\cap f(A))\cup(V_2\cap f(A)).$$

令 $A_i=f^{-1}(V_i)\cap A$. 则 $A_1,A_2\neq\emptyset, A_1\cap A_2=\emptyset$, 且 $A=A_1\cup A_2$，跟 A 连通矛盾. □

特别地，连通性是一种拓扑性质：

推论 3.1.9.（连通性是拓扑性质）

如果 $f: X \to Y$ 是同胚，则 X 是连通的当且仅当 Y 是连通的. ♡

由于 $\mathbb{R}$ 中的连通子集都是区间，我们得到数学分析中中值定理的推广：

推论 3.1.10.（中值定理）

设 $f: X \to \mathbb{R}$ 是连续映射. 如果 X 是连通的，且存在 $x_1, x_2 \in X$ 使得 $f(x_1) = a < b = f(x_2)$，则对任意 $a < c < b$，存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = c$. ♡

证明 $f(X)$ 是包含 a 和 b 的区间，因此包含 c. □

上述推论中的 $\mathbb{R}$ 换成任意一个线性连续统，结论依然成立. 另一个直接的推论是

推论 3.1.11.（Borsuk-Ulam 定理，$n = 1$ 情形）

对任意连续映射 $f: S^1 \to \mathbb{R}$，存在 $x_0 \in S^1$ 使得 $f(x_0) = f(-x_0)$. ♡

证明 考虑映射

$$F: S^1 \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = f(x) - f(-x).$$

任取 $a \in S^1$. 如果 $F(a) = 0$，证明已经完成. 如果 $F(a) \neq 0$，则 $F(a)$ 和 $-F(a) = F(-a)$ 都落在 S^1 在 F 下的像集中. 因为 S^1 是连通的，所以 0 落在 F 的像集中. □

¶ 闭包的连通性

接下来我们给出几个有用的连通性判据：

命题 3.1.12.（介于连通集及其闭包间集合的连通性）

如果 $A \subset X$ 是连通的，$A \subset B \subset \overline{A}$，则 B 是连通的. 特别地，$\overline{A}$ 是连通的. ♠

证明 任取连续映射 $f: B \to \{0, 1\}$. 则 $f_1 = f|_A : A \to \{0, 1\}$ 是连续的，从而由命题3.1.3，f_1 不是满射. 不妨设 $f_1(A) = \{0\}$. 因为 A 在 B 中的闭包是 B，由命题1.5.20，

$$f(B) \subset \overline{f(A)} = \{0\},$$

即 f 不是满射. 故 B 是连通的. □

当然，上述命题也可直接用定义证明，请读者自行证明. 作为推论，我们得到

推论 3.1.13.（拓扑学家的正弦曲线）

对任意子集 $C \subset \{(0, t) \mid -1 \leq t \leq 1\}$，集合

$$S = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, y = \sin\frac{1}{x}\} \cup C \quad \subset \mathbb{R}^2$$

是连通的. ♡

¶ 并集的连通性

下一个命题虽然看起来很简单，但非常有用：

命题 3.1.14.（“星形并”的连通性）

设 $A_\alpha \subset X$ 是 X 中的非空连通子集族. 若 $\cap_\alpha A_\alpha \neq \emptyset$，则 $\cup_\alpha A_\alpha$ 是连通的.

证明 记 $Y = \cup_\alpha A_\alpha$. 设 $Y = Y_1 \cup Y_2$, 满足 $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, 且

$$Y_1 = Y \cap U_1, \quad Y_2 = Y \cap U_2,$$

其中 U_1, U_2 是 X 中的开集. 任取 $x \in \cap_\alpha A_\alpha$. 不失一般性, 设 $x \in Y_1$. 对任意 α, 我们有

$$A_\alpha = (A_\alpha \cap U_1) \cup (A_\alpha \cap U_2),$$

且 $A_\alpha \cap U_1 \neq \emptyset$（因为 $x \in A_\alpha \cap U_1$）. 故由 A_α 的连通性，我们得出 $A_\alpha \cap U_2 = \emptyset$. 因此

$$Y_2 = (\bigcup_\alpha A_\alpha) \cap U_2 = \bigcup_\alpha (A_\alpha \cap U_2) = \emptyset.$$

所以 Y 是连通的. □

推论 3.1.15.（“链形并”的连通性）

设 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ $(N \leq +\infty)$ 是连通的，且对任意 $n < N$ 都有 $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$，则 $\cup_{n=1}^N A_n$ 是连通的.

证明 根据归纳法和命题3.1.14，对于每个 n，集合

$$B_n := A_1 \cup \cdots \cup A_n$$

是连通的. 又因为 $\cap_{n=1}^N B_n \neq \emptyset$，故 $\cup_{n=1}^N A_n = \cup_{n=1}^N B_n$ 是连通的. □

¶ 乘积的连通性

命题3.1.14的另一个推论是

推论 3.1.16.（有限积的连通性）

如果 X, Y 是连通的, 则 $X \times Y$ 也是连通的

证明 不妨设 X, Y 非空. 固定 $b \in Y$. 则集合 $X \times \{b\}$，作为连通集 X 在连续映射

$$j_b : X \to X \times Y, \quad x \mapsto (x, b).$$

下的像集，是连通的. 因此对于任意 $x \in X$, 集合 $(\{x\} \times Y) \cup (X \times \{b\})$ 是连通的. 而且，因为

$$\bigcap_x (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{b\}) \neq \emptyset,$$

所以

$$X \times Y = \bigcup_x ((\{x\} \times Y) \cup (X \times \{b\}))$$

是连通的 □

推论 3.1.17

$\mathbb{R}^n, [0,1]^n$ 和 S^n 都是连通的.

证明 对于 S^n, 我们可以写成 $S^n = S^n_+ \cup S^n_-$, 其中 $S^n_\pm = S^n \setminus \{0, \cdots, 0, \pm 1\}$ 是连通的，因为他们通过球极投影映射同胚于 $\mathbb{R}^n$ □

事实上，连通性是可乘性质的：

命题 3.1.18.（任意积的连通性）

乘积空间 $\prod_\alpha X_\alpha$ 关于乘积拓扑是连通的当且仅当每个 X_α 是连通的.

证明 如果 $\prod_\alpha X_\alpha$ 是连通的, 则每个 X_α（作为 $\prod_\alpha X_\alpha$ 在投影映射下的像集）是连通的.

反之, 设每个 X_α 是连通的. 对任意 α, 取定元素 $a_\alpha \in X_\alpha$. 对任意有限指标集 $K \subset \Lambda$, 由归纳法，乘积空间 $\prod_{\alpha \in K} X_\alpha$ 是连通的. 不妨设指标集 Λ 是无限集. 令

$$X_K = \{(x_\alpha) \mid x_\alpha = a_\alpha, \forall \alpha \notin K\}.$$

则 X_K 是典范嵌入映射

$$j_K : \prod_{\alpha \in K} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \simeq \prod_{\alpha \in K} X_\alpha \times \prod_{\alpha \notin K} X_\alpha, \quad (x_\alpha)_{\alpha \in K} \mapsto ((x_\alpha)_{\alpha \in K}, (a_\alpha)_{\alpha \notin K})$$

下的像集. 因为映射 j_K 是连续的, 所以 X_K 是连通的. 注意到根据构造, $(a_\alpha) \in \cap_K X_K$. 所以由命题 3.1.14, 集合

$$X := \bigcup_{\text{有限的} K \subset \Lambda} X_K$$

是连通的. 下证 $\overline{X} = \prod_\alpha X_\alpha$. 事实上，由乘积拓扑定义，若 U 是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 中的非空开集，则存在有限指标集 K' 以及非空开集 $U_\alpha \subset X_\alpha (\alpha \in K)$ 使得

$$U \supset \prod_{\alpha \in K'} U_\alpha \times \prod_{\alpha \notin K'} X_\alpha.$$

特别地，若取有限指标集 K 使得 $K' \cap K = \emptyset$, 则 $X_K \cap U \neq \emptyset$，从而 $X \cap U \neq \emptyset$. 这就证明了 $\overline{X} = \prod_\alpha X_\alpha$. 于是由命题 3.1.12，$\prod_\alpha X_\alpha$ 是连通的. □

注 3.1.19. 该结论对箱拓扑不成立：考虑

$$X = \prod_{s \in S} \mathbb{R} = \mathbb{R}^S = \mathcal{M}(S, \mathbb{R})$$

其中 S 是任何无限集. 则

$$A = \{f : S \to \mathbb{R} \mid \exists M \text{ 使得} |f(x)| \leq M, \forall x \in S\},$$

$$B = \{f : S \to \mathbb{R} \mid \sup_{x \in S} |f(x)| = +\infty\}$$

都是 $(X, \mathscr{T}_{box})$ 中的非空开集，且 $\mathbb{R}^S = A \cup B$. 所以 $(X, \mathscr{T}_{box})$ 是不连通的.

3.2 道路连通性

3.2.1 道路与道路连通性

¶ 道路

接下来我们研究一个跟连通性密切相关的概念：道路连通性．它略强于连通性，更加直观，而且，最重要的是，我们可以对道路做“代数操作”．此外，在后文中，通过考虑特定映射空间的道路，我们可以定义“更高层次的连通性”，这些连通性都是由可计算的代数对象所描述，于是代数成为研究拓扑的重要工具．

定义 3.2.1.（道路）

设 X 是拓扑空间, $x_0, x_1 \in X$.

(1) 若连续映射 $\gamma : [0,1] \to X$ 满足条件

$$\gamma(0) = x_0, \quad \gamma(1) = x_1,$$

则我们称 γ 是一条从 x_0 到 x_1 的**道路**，称 x_0 和 x_1 为道路 γ 的**起点/终点**.

(2) 当 $x_0 = x_1$ 时, 我们称道路 γ 是以 x_0 为基点的**回路**（或**圈**）．♣

我们把所有从 x_0 到 x_1 的空间叫做从 x_0 到 x_1 的**道路空间**，记为

$$\Omega(X; x_0, x_1) = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X) \mid \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}.$$

类似地，我们也有以 x_0 为基点的**回路空间**：

$$\Omega(X; x_0) = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X) \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}.$$

在需要考虑其拓扑时，我们将赋予 $\Omega(X; x_0, x_1)$ 以及 $\Omega(X; x_0)$ 紧开拓扑.

注 3.2.2. 根据定义，道路是一个连续映射，而不仅仅是一条“几何曲线”（即像空间的一个点集）．同一条“几何曲线”的不同参数化将被视为不同的道路.

注意对于任意 $x \in X$，总有一条特殊的从 x 到 x 的回路，即**常值道路** γ_x，其定义为

$$\gamma_x : [0,1] \to X, \quad \gamma_x(t) \equiv x.$$

接下来我们对于道路定义一些“代数运算”：

定义 3.2.3.（道路的“积”与“逆”）

设 X 是拓扑空间.

(1) 对于任意从 x_0 到 x_1 的道路 γ，我们称由

$$\bar{\gamma}(t) := \gamma(1-t).$$

所定义的（从 x_1 到 x_0 的）道路 $\bar{\gamma}$ 为道路 γ 的**逆**.

(2) 设 γ_1 是从 x_0 到 x_1 的道路，γ_2 是从 x_1 到 x_2 的道路. 我们称由

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

所定义的从 x_0 到 x_2 的道路 $\gamma_1 * \gamma_2$ 为道路 γ_1 与 γ_2 的**积**. ♣

这两个定义是非常直观的：道路的逆无非就是把道路“反向”后所得的新道路，而两条道路的积无非就是把这两条道路“首尾接在一起”所得到的新道路. 不幸的是，这些操作不是“非常代数的”. 例如，$\gamma * \bar{\gamma}$ 与 $\bar{\gamma} * \gamma$ 并不相同，因为前者是从 x_0 到 x_0 的道路，而后者是从 x_1 到 x_1 的道路. 即使在 $x_0 = x_1$ 的情况下，它们仍然是不同的道路，因为它们是“方向相反”的两个回路. 此外，我们希望常值道路 γ_x 表现得像一个“单位元”，但在上述定义下并非如此. 在第 3.3 节我们将致力于解决这些问题，从而发展出一套正确的“回路的代数理论”.

¶ 道路连通空间

有了道路的概念，我们就可以定义一种新的连通性：

定义 3.2.4. (道路连通性)

若拓扑空间 X 中的任意两点都可用一条道路相连接，则我们称 X 是**道路连通的**. ♣

从直观上来看，连通性刻画的是“空间不能被分成相互隔开的两部分”，而道路连通性刻画的则是“空间中任意两点可相连”. 容易证明道路连通性比连通性强：

命题 3.2.5. (道路连通 $\Longrightarrow$ 连通)

如果 X 是道路连通的，则 X 是连通的. ♠

证明 采用反证法. 假设存在非空的不相交开集 A 和 B，使得 $X = A \cup B$. 取 $x \in A$，$y \in B$ 以及从 x 到 y 的路径 γ，则

$$[0,1] = \gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B)$$

是非空的不相交开集的并集，这与 $[0,1]$ 的连通性矛盾. □

反过来，我们不难找到连通但不道路连通的例子：

例 3.2.6. 在第 3.1 节我们已经看到拓扑学家的正弦曲线

$$X = \{(x, \sin\frac{\pi}{x}) \mid 0 < x \le 1\} \cup \{(0,y) \mid -1 \le y \le 1\}$$

是连通的，现在我们说明它不是道路连通的：

证明 假设在 X 中存在道路

$$\gamma : [0,1] \to X, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

使得 $\gamma(0) = (0,0)$ 和 $\gamma(1) = (1,0)$. 令

$$s = \sup\{t \mid \gamma_1(t) = 0\}.$$

则 $s < 1, \gamma_1(s) = 0$ 且

$$\gamma_1(t) > 0, \quad \forall t > s.$$

因此我们得到

$$\gamma_2(t) = \sin\frac{\pi}{\gamma_1(t)}, \qquad \forall t > s.$$

由 s 的定义以及 γ_1 的连续性，存在递减数列 $t_n \to s$ 使得 $\gamma_1(t_n) = \frac{2}{2n+1}$. 于是

$$\gamma_2(t_n) = (-1)^n \not\to \gamma_2(s),$$

矛盾. □

当然，很多很好的连通空间都是道路连通的，例如欧氏空间的凸子集都是道路连通的，因为根据定义，凸子集中的任意两点都可以由直线段连接. 更一般地，我们有

命题 3.2.7.（局部欧 + 连通开集 $\Longrightarrow$ 道路连通）

设 X 是局部欧氏空间，$U \subset X$ 是连通开集，则 U 是道路连通的.

证明 我们采用连通性论证. 取定点 $x \in U$，并考虑集合

$$A = \{y \in U \mid \text{在}U\text{中存在从 } x \text{ 到 } y \text{ 的道路}\}.$$

则

- A 是非空的：常值道路 γ_x 是从 x 到 x 的道路，故总有 $x \in A$.
- A 是开集: 对任意 $y \in A$, 取 y 的开邻域 V 使得 $V \subset U$ 且 V 同胚于欧氏空间的单位球 $B(0,1)$. 记同胚映射为 $\varphi : V \to B(0,1)$. 令 γ_1 是 U 中从 x 到 y 的一条道路. 对任意 $y_1 \in V$, 令 γ_2 为从 y 到 y_1 的"线段道路"，即
$$\gamma_2(t) = \varphi^{-1}(t\varphi(y_1) + (1-t)\varphi(y)).$$
则 $\gamma_1 * \gamma_2$ 是从 x 到 y_1 的道路. 所以 $y_1 \in A$. 故 $V \subset A$，从而 A 是开集.
- A 是闭集: 通过同样的论证，我们可以证明如果 $y \notin A$，那么对于 y 的同胚于欧氏开球的小邻域中的任意点 y_1，我们也有 $y_1 \notin A$. 所以 A^c 是开集，即 A 是闭集.

于是由 U 的连通性可得 $A = U$. 换言之，U 中的任意点都可以通过 U 中的道路与 x 相连. 因此，U 中的任意两点 x_1, x_2 都可以通过 U 中的道路相连：设 γ_1 是 U 中从 x 到 x_1 的道路，γ_2 是 U 中从 x 到 x_2 的道路，则 $\overline{\gamma_1} * \gamma_2$ 是 U 中从 x_1 到 x_2 的道路. □

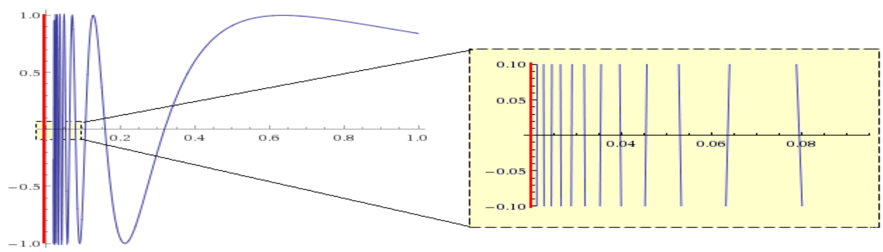
作为推论，我们得到

推论 3.2.8

拓扑流形是道路连通的当且仅当它是连通的.

¶ 局部道路连通性

如果你仔细思考例3.2.6，你会发现对于任意"坏点"（比如原点），在其任意小的邻域内，你都可以找到无限多条不连通的"纵向曲线"：



换言之，空间“在这些坏点的任意小的局部范围内”都不是道路连通的：[1]

定义 3.2.9.（局部道路连通）

设 X 是拓扑空间，$x \in X$. 如果对于 x 的任意开邻域 U，存在 x 的开邻域 $V \subset U$ 使得 V 是道路连通的，则我们称拓扑空间 X **在 x 处局部道路连通**. 如果 X 在每个点处都道路连通，则我们称 X 是**局部道路连通空间**. ♣

例如, $\mathbb{R}^n$ 中的任意开集（或更一般地，任意拓扑流形或任意局部欧氏空间中的任意开集）是局部道路连通的.

下面我们证明局部道路连通的连通拓扑空间都是道路连通的，其证明与上述连通局部欧氏区域的道路连通性证明相仿：

命题 3.2.10.（连通 + 局部道路连通 $\Longrightarrow$ 道路连通）

如果 X 是连通的且局部道路连通的, 则 X 是道路连通的. ♠

证明 固定点 $x \in X$. 考虑集合

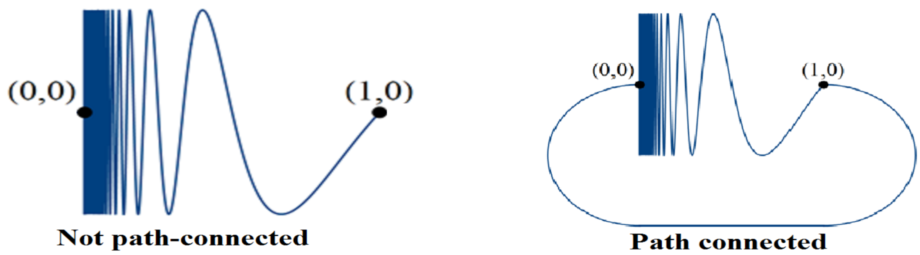
$$A = \{y \in X \mid y \text{ 可以通过道路连接到} x\}.$$

则 $A \neq \emptyset$. 由局部道路连通性，

- A 是开集：如果一个点落在 A 中, 则该点的一个邻域也都落在 A 中,
- A 是闭集：如果一个点落在 A^c 中, 则该点的一个邻域也都落在 A^c 中.

故由 X 的连通性可知 $A = X$. □

注意道路连通集合未必是局部道路连通的：我们只要在拓扑学家的正弦曲线上添加一条从 $(0,0)$ 到 $(1,0)$ 的曲线，即可得到一个道路连通但不局部道路连通的拓扑空间：



¶ 道路连通性的性质

我们知道连通性被连续映射保持. 类似的，我们有

命题 3.2.11.（道路连通性被连续映射保持）

设 $f : X \to Y$ 是连续映射，且 $A \subset X$ 是道路连通子集，则 $f(A)$ 是道路连通的. ♠

证明 对任意 $f(x_1), f(x_2) \in f(A)$, 取从 x_1 到 x_2 的道路 $\gamma : [0,1] \to A$. 则

$$f \circ \gamma : [0,1] \to f(A)$$

是从 $f(x_1)$ 到 $f(x_2)$ 的道路. □

[1]类似地可以定义“局部连通性”的概念，其定义与基本性质见习题.

类似的，我们也可以证明道路连通集的“星形并”以及乘积都是道路连通的，且证明比连通性时更简单：

命题 3.2.12.（“星形并”的道路连通性）

设 X_α 是道路连通的，且 $\bigcap_\alpha X_\alpha \neq \emptyset$. 则 $\bigcup_\alpha X_\alpha$ 是道路连通的. ♠

证明 取 $x_0 \in \bigcap_\alpha X_\alpha$. 对于任意 $x_1 \in X_{\alpha_1}$ 和 $x_2 \in X_{\alpha_2}$, 存在 X_{α_1} 中从 x_1 到 x_0 的道路 γ_1 和 X_{α_2} 中从 x_0 到 x_2 的道路 γ_2. 因此 $\gamma_1 * \gamma_2$ 是 x_1 到 x_2 的道路. □

命题 3.2.13.（任意积的道路连通性）

乘积空间 $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product})$ 是道路连通的当且仅当每个 X_α 都是道路连通的. ♠

证明 若乘积空间 $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product})$ 是道路连通的，则每个 X_α，作为道路连通空间在连续映射 π_α 下的像，是道路连通的.

反之设每个 X_α 是道路连通的。对任意 $(x_\alpha), (y_\alpha) \in \prod_\alpha X_\alpha$, 选取 x_α 到 y_α 的道路 $\gamma_\alpha : [0,1] \to X_\alpha$. 则

$$\gamma : [0,1] \to \prod_\alpha X_\alpha, \quad \gamma(t) = (\gamma_\alpha(t))$$

是从 $\gamma(0) = (x_\alpha)$ 到 $\gamma(1) = (y_\alpha)$ 的道路. 故 $(\prod_\alpha X_\alpha, \mathscr{T}_{product})$ 是道路连通的. □

当然,并不是所有连通性的性质都可以推广到道路连通性上. 比如集合 $\{(x, \sin\frac{\pi}{x}) \mid 0 < x \leq 1\}$，作为道路连通集合的像，是道路连通的. 于是例3.2.6也告诉我们：

道路连通子集的闭包不一定是道路连通的.

这是连通性与道路连通性的一个区别.

¶ 弧连通

根据定义，道路是指连续映射 $\gamma : [0,1] \to X$. 我们并不要求 γ 是单射，因此道路是允许“自相交”的. 当然，不自相交的道路在某些问题中更便于应用. 于是我们定义

定义 3.2.14.（弧与弧连通）

设 X 是一个拓扑空间.

(1) 若道路 $\gamma : [0,1] \to X$ 是一个拓扑嵌入，则我们称 γ 为一条**弧**.

(2) 若 X 中任意两点都可以用弧连接，则我们称 X 是**弧连通空间**. ♣

根据定义，弧连通是一种更强的连通性：弧连通必然是道路连通的，但反之未必. 例如，不难证明“带有两个原点的直线”（见习题 2.10）是道路连通的，却不是弧连通的. 这个例子同时也告诉我们，弧连通性不是连续映射下保持的性质.

但是对于度量空间，一些较弱的连通性就可以保证弧连通性：

命题 3.2.15.（Peano 空间是弧连通的）

任意紧连通且局部连通的度量空间是弧连通的. ♠

证明较为复杂，这里略去，有兴趣的读者可参见 Stephen Williard, General Topology, Addison-Wesley,1970.

作为推论，我们证明：

推论 3.2.16.（Hausdorff：弧连通 $\Longleftrightarrow$ 道路连通）

Hausdorff 空间是弧连通的当且仅当它是道路连通的. ♡

证明 假设 Hausdorff 空间 X 是道路连通的. 任取 $x, y \in X$ 以及连接 x, y 的道路 γ. 显然 $\gamma(I)$ 是紧连通空间. 此外，由闭映射引理，γ（作为从紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射）是闭映射，从而由本节后面的习题，$\gamma(I)$ 是局部连通的. 最后，由期中考试最后一题可知 $\gamma(I)$ 是度量空间. 于是 $\gamma(I)$ 是弧连通的，即存在落在 $\gamma(I)$ 里的弧连接 x 与 y. □

于是对于道路连通的 Hausdorff 空间，我们总可以用没有自相交的弧连接任意两点.

3.2.2 分支

¶ 连通分支和道路连通分支

对任意拓扑空间 X，根据连通性和道路连通性，我们可以定义两个等价关系：

$$x \sim y \iff \exists \text{ 连通子集} A \subset X \text{ 使得} x, y \in A,$$

$$x \overset{p}{\sim} y \iff \exists X \text{ 中的道路连接} x \text{ 和} y.$$

不难验证 $\sim$ 和 $\overset{p}{\sim}$ 都是等价关系.[2]

定义 3.2.17.（连通分支与道路连通分支）

设 X 是拓扑空间.

(1) 我们称等价关系 $\sim$ 的每个等价类为 X 的一个 **连通分支**.

(2) 我们称等价关系 $\overset{p}{\sim}$ 的每个等价类为 X 的一个 **道路连通分支**. ♣

根据定义，每个连通分支都可以看作 X 的一个（关于“集合包含”这个偏序关系的）极大连通子集（从而跟我们在习题 3.1 中所见的一致），而每个道路连通分支都可以看作 X 的一个极大道路连通子集. 显然

- 每个道路连通分支都完全包含在某个连通分支中.
- 不同的连通分支是两两无交的；不同的道路连通分支也是两两无交的.

我们列举一些连通分支和道路连通分支的不太显然的结论，其证明均留作习题：

(1) X 的任意连通分支都是闭子集，但不一定是开子集. 【然而，“拓扑学家的正弦曲线”这个例子告诉我们，道路连通分支可能既不是闭集也不开集. 】

(2) 如果 X 是局部连通的，那么任意连通分支都是开集.

(3) 如果 X 是局部道路连通的，那么任意道路连通分支都恰好是连通分支（从而此时任意道路连通分支都是即开又闭的）.

[2]注意弧连通性不能用于定义等价关系，因为自反性和传递性都不满足.

¶ 连通分支的空间

我们知道，拓扑空间上的每个等价关系都定义了一个商映射，进而定义了一个商拓扑空间. 因此由等价关系 $\sim$ 和 $\overset{p}{\sim}$, 我们得到两个商空间，

$$\pi_c(X) := X/\sim$$

和

$$\pi_0(X) := X/\overset{p}{\sim}.$$

我们先考虑 $\pi_c(X)$ 的拓扑. 从直觉上不难猜测，$\pi_c(X)$ 应该是一个“非常不连通”的空间. 我们可以用一个特例诠释何谓“非常不连通”：如果 X 是完全不连通空间，则每个连通分支仅包含一个元素，因此 $\pi_c(X)$ 就是 X 本身. 特别地，$\pi_c(X)$ 也完全不连通空间. 事实上，该结论确实对任意拓扑空间 X 都成立：

命题 3.2.18.（连通分支空间完全不连通）

商空间 $\pi_c(X)$ (赋商拓扑) 是完全不连通的. 特别地，$\pi_c(X)$ 是 (T1) 空间. ♠

证明 设 $p: X \to X/\sim$ 是典范投影映射. 设 $S \subset X/\sim$ 是至少包含两个元素的子集. 则 $p^{-1}(S)$ 是不连通的. 所以存在 (关于子空间拓扑) 既开又闭的非空子集 $A \subsetneq p^{-1}(S)$. 我们断言 A 一定是 X 的连通分支的并集：

> 如果 X_1 是 X 的一个连通分支且 $A \cap X_1 \neq \emptyset$, 则 $X_1 \subset p^{-1}(S)$ 且 X_1 也是 $p^{-1}(S)$ 的一个连通分支. 因此由
>
> $$X_1 = (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap (p^{-1}(S) \setminus A))$$
>
> 可得 $X_1 \subset A$. 故 A 是 X 的连通分支的并集.

因此 $A = p^{-1}(p(A))$. 根据商拓扑的定义，$p(A)$ 在 $X/\sim$ 中的既开又闭的非空子集. 因为 $A \subsetneq p^{-1}(S)$，所以 $p(A) \neq S$. 故 S 是不连通的，从而 $\pi_c(X)$ 是完全不连通的.

最后我们说明 $\pi_c(X)$ 是 (T1) 空间. 事实上，任意完全不连通的空间都是 (T1) 空间，因为由完全不连通性，任意单点集 $\{x\}$ 都是一个连通分支，连通分支都是闭子集. □

接下来我们考虑 $\pi_0(X)$. 我们当然可以将其视为商拓扑空间. 然而，$\pi_0(X)$ 上的商拓扑可能很糟糕. 比如，我们自然会猜测，既然任意道路连通分支都“被捏成一个点”了，那得到的商空间应该是“完全不道路连通”了. 遗憾的是，这是不对的：

例 3.2.19. 考虑 X 为“拓扑学家的正弦曲线”，则商空间 $\pi_0(X)$ 由两个元素组成. 让我们用“v”来表示 y 轴上的垂直线段部分，用“s”来表示正弦曲线段部分. 则我们有

$$\pi_0(X) = \{v, s\}, \qquad \mathscr{T}_{quotient} = \{\emptyset, \{s\}, \{v, s\}\}.$$

可以证明（习题）：商空间 $\pi_0(X)$ 是道路连通的，但不是 (T1) 的.

因为在一般情况下 $\pi_0(X)$ 上的商拓扑结构不够好，不能给我们提供多少有用的信息，所以我们宁愿忘记 $\pi_0(X)$ 上的商拓扑结构，而只是将 $\pi_0(X)$ 视作一个集合：该集合的势是空间 X 的一个很好用的拓扑不变量. 【然而，当 X 本身是拓扑群时，$\pi_0(X)$ 也是一个拓扑群.】【事实上，1980 年 Harris 证明了：任何拓扑空间均可实现为某个拓扑空间的 π_0.】

¶ 鸟瞰: 范畴间的函子

回想一下，在第 1.5 节中我们提到了范畴的概念：一个范畴 $\mathcal{C}$ 包括

- 由对象构成的类 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，
- 由态射构成的类 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$，其中我们把从 X 到 Y 的态射全体记为 $\mathrm{Mor}(X,Y)$.

下面我们引入**函子**的概念，用于在范畴之间建立起联系：

定义 3.2.20.（函子）

设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 是范畴. 从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的 (协变) **函子**[a] F 是一个对应，使得

(1) 将 $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 中的每个对象 X 都对应到 $\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ 中的某个对象 $F(X)$，

(2) 将范畴 $\mathcal{C}$ 中的每个态射 $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ 都对应到范畴 $\mathcal{D}$ 中的某个态射 $F(f) \in \mathrm{Mor}(F(X),F(Y))$, 且该对应满足：

- 对范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$，有
$$F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)},$$
- 对范畴 $\mathcal{C}$ 中的任意态射 $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ 和 $g \in \mathrm{Mor}(Y,Z)$ 都有
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

---

[a] 类似地我们可以定义**反变函子**的概念：反变函子也是一个对应，它将每个态射 $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ 对应到态射 $F(f) \in \mathrm{Mor}(F(Y),F(X))$ 并且满足 $F(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{F(X)}$ 和 $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

♣

我们给出一些函子的例子.

例 3.2.21.

(1) 设 $\mathcal{TOP}$ 是拓扑空间范畴, 即:
   - 对象是拓扑空间,
   - 态射是拓扑空间之间的连续映射.

   设 $\mathcal{SET}$ 是集合范畴, 即:
   - 对象是集合,
   - 态射是关系.

   则我们可以定义“遗忘函子”，将每个拓扑空间映射到其集合本身，将连续映射映到其图像.

(2) 类似地，设 $\mathcal{ALG}$ 是 (结合) 代数范畴, 即
   - 对象是 (结合) 代数,
   - 态射是代数同态.

   则我们可以定义 $\mathcal{TOP}$ 到 $\mathcal{ALG}$ 的反变函子 $\mathcal{C}$，将每个拓扑空间 X 映射到 X 上的实值连续函数全体构成的代数 $\mathcal{C}(X,\mathbb{R})$, 将每个连续映射 $f: X \to Y$ 映到代数同态
$$\mathcal{C}(f): \mathcal{C}(Y,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(X,\mathbb{R}), \qquad \mathcal{C}(f)(\varphi) := \varphi \circ f.$$

(3) 考虑 $\mathcal{TOP}$ 的两个子范畴，由局部紧 Hausdorff 空间组成的范畴 $\mathcal{LCH}$ （或者由 Hausdorff 且完全正则空间组成的范畴 $\mathcal{HCR}$ ）和由紧 Hausdorff 空间组成的范畴 $\mathcal{CH}$. 则 Stone-Cěck 紧化的过程 β 是一个函子（见习题 2.9）.

¶ 函子 π_c 和 π_0

下面设 X, Y 是拓扑空间，$f \in \mathcal{C}(X, Y)$. 根据习题 3.1，f 将 X 的连通分支映射到 Y 的连通分支中. 这样我们就得到了一个映射

$$\pi_c(f) : \pi_c(X) \to \pi_c(Y), \qquad [x] \mapsto [f(x)].$$

事实上 π_c 有如下很好的性质: (证明留作练习.)

命题 3.2.22.（π_c 的函子性）

映射 $\pi_c(f) \in \mathcal{C}(\pi_c(X), \pi_c(Y))$，且满足

$$\pi_c(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_c(X)}, \quad \text{和} \quad \pi_c(g \circ f) = \pi_c(g) \circ \pi_c(f).$$

换言之, π_c 是从拓扑空间范畴 $\mathcal{TOP}$ 到完全不连通拓扑空间范畴 $\mathcal{TOP}_{totdis}$ 的函子:

$\boxed{\pi_c : \mathcal{TOP} \to \mathcal{TOP}_{totdis}}$

- $(X, \mathscr{T}) \rightsquigarrow \pi_c(X) = (X/\sim, \mathscr{T}_{quotient})$,
- $f \in \mathcal{C}(X, Y) \rightsquigarrow \pi_c(f) \in \mathcal{C}(\pi_c(X), \pi_c(Y))$

类似地，因为任意连续映射 $f : X \to Y$ 也将 X 中的道路连通分支映射到 Y 中的道路连通分支中去，我们自然得到一个良定义的（集合之间的）映射

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y), \qquad [x] \mapsto [f(x)].$$

我们有(证明留作练习.)

命题 3.2.23.（π_0 的函子性）

映射 $\pi_0(f)$ 满足

$$\pi_0(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{\pi_0(X)} \quad \text{和} \quad \pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f).$$

换言之, π_0 是从拓扑空间范畴 $\mathcal{TOP}$ 到集合范畴 $\mathcal{SET}$ 的函子[3]:

$\boxed{\pi_0 : \mathcal{TOP} \to \mathcal{SET}}$

- $(X, \mathscr{T}) \rightsquigarrow \pi_0(X) = X/\overset{p}{\sim}$,
- $f \in \mathcal{C}(X, Y) \rightsquigarrow \pi_0(f) \in \mathcal{M}(\pi_0(X), \pi_0(Y))$

注 3.2.24. 当然，在应用函子 π_c 或 π_0 时，我们丢失了原空间的很多信息. 但这正是代数拓扑背后的哲学：区分拓扑空间可能非常困难，但通常区分更简单的范畴（如 $\mathcal{SET}$, $\mathcal{GROUP}$ 或 $\mathcal{VECTORSPACE}$）中的对象更容易. 例如，通过计算 $\pi_c(X)$ 或 $\pi_0(X)$ 的基数，我们能够区分许多拓扑空间. 例如，我们知道

3≠4　THREE≠FOUR

第二组图形在拓扑上是不同的，因为它们有不同的 π_0. 对于第一组图形，可以用 π_0，方法是小心地删除每边的点，也可以考察基本群 π_1，即计算图中“洞”的个数.

[3]事实上 $\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ 关于商拓扑也**是**连续的，因此是从拓扑空间范畴到拓扑空间范畴的函子. 因为我们习惯于“忘掉” $\pi_0(X)$ 上的商拓扑, 这里 π_0 实际上是“拓扑 π_0 函子”和“遗忘函子”的复合.

3.3 同伦

3.3.1 连续形变

¶ 作为连续的连续映射族的连续变形

我们知道,"连续变形"在几何拓扑中是最基本的操作之一,但我们还没有给出其精确定义. 现在有了一般拓扑学的知识,当我们谈及抽象的"连续"对象时,我们可以给出其精确的含义:

> 在抽象拓扑空间中,元素 a 的一个**连续形变**是指一个从某个参数空间 T 到该空间的连续映射,使得对于参数空间的某元素 t_0,有 $f(t_0)=a$(并且 f 往往需要满足其他由问题而定的额外条件).

例如,我们可以把以一点 x_0 为起点的道路视为对该点的一个连续形变. 更一般地,设映射 $f\in\mathcal{C}(X,Y)$, 其中 X,Y 是拓扑空间. 则 f 的以某个拓扑空间 T 为"形变参数空间"的**连续形变**就是一个连续映射(其中 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的拓扑是**紧开拓扑** $\mathscr{T}_{c.o.}$)

$$F:T\to\mathcal{C}(X,Y),\qquad t\mapsto F(t)=f_t\in\mathcal{C}(X,Y)$$

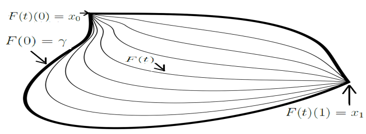
使得对某个 $t_0\in T$ 有 $f_{t_0}=f$.

在很多问题中,我们取参数空间 $T=[0,1]$ 或 $T=\mathbb{R}$("单参数")并取 $t_0=0$. 例如,设 γ 是空间 X 内从 x_0 到 x_1 的一条道路,道路 γ 的端点固定的**连续形变**是连续映射

$$F:[0,1]\to\Omega(X;x_0,x_1)=\{\gamma\in\mathcal{C}([0,1],X)\mid\gamma(0)=x_0,\gamma(1)=x_1\}$$

且满足

$$\begin{aligned}F(0)&=\gamma,\\F(t)(0)&=x_0,\\F(t)(1)&=x_1.\end{aligned}$$



当然,在谈及映射 F 的连续性时,我们需要在 $\Omega(X;x_0,x_1)$ 上指定一个拓扑. 因为根据道路的定义,$\Omega(X;x_0,x_1)$ 是 $\mathcal{C}([0,1],X)$ 的子空间,所以我们同样可以采用紧开拓扑. [4]

¶ 作为一个连续映射的连续形变

现在假设我们有一个映射 $F\in\mathcal{C}(T,\mathcal{C}(X,Y))$,即一个连续族的连续映射. 这在概念上仍然很复杂. 但是任意给定这样的 F,我们可以定义一个更简单的映射

$$G\in\mathcal{M}(T\times X,Y),\quad G(t,x):=F(t)(x).$$

事实上在较弱的条件下,F 是连续的当且仅当 G 是连续的!

[4]我们不希望在这里使用逐点收敛拓扑,因为逐点收敛拓扑丢失了"道路参数区间"$[0,1]$ 本身的拓扑信息,而且即使道路列 γ_n 在逐点收敛拓扑下收敛于某道路 γ,该收敛过程也没有好的"局部控制".

命题 3.3.1. (连续形变 v.s. 乘积空间的连续映射)

设 X, Y, T 为拓扑空间. 考虑对应关系 (即双射)

$$\mathcal{M}(T, \mathcal{M}(X, Y)) \longleftrightarrow \mathcal{M}(T \times X, Y)$$
$$F(t)(x) \longleftrightarrow G(t, x) := F(t)(x)$$

则我们有

(1) 若 $G \in \mathcal{C}(T \times X, Y)$, 则 $F \in \mathcal{C}(T, \mathcal{C}(X, Y))$.

(2) 若 X 是 LCH 空间, 则 $F \in \mathcal{C}(T, \mathcal{C}(X, Y))$ 当且仅当 $G \in \mathcal{C}(T \times X, Y)$.

证明 ($\Longleftarrow$) 设 $G \in \mathcal{C}(T \times X, Y)$. 则给定任意 $t \in T$, 映射 $F(t) : X \to Y$ 是连续的, 因为 $F(t)$ 可以写成连续函数的复合:

$$X \xhookrightarrow{j_t} T \times X \xrightarrow{G} Y,$$

其中 $j_t(x) = (t, x)$ 是 "在 t 处的典范嵌入". 故 F 将 T 映到 $\mathcal{C}(X, Y)$.

为了证明 F 作为 T 到 $\mathcal{C}(X, Y)$ 的映射是连续, 只需证明

$$\text{对任意紧集} K \subset X \text{ 和开集} U \subset Y, F^{-1}(S(K, U)) \text{ 在} T \text{ 中是开集.} \tag{*}$$

设 $F(t) \in S(K, U)$. 则根据 G 的定义, $G(\{t\} \times K) \subset U$, 即

$$\{t\} \times K \subset G^{-1}(U).$$

由 G 的连续性, $G^{-1}(U)$ 在 $T \times X$ 中是开集. 又因为 K 是紧集, 由引理2.2.1即管形邻域引理, 存在 T 中的开集 $V \ni t$ 使得

$$V \times K \subset G^{-1}(U).$$

因此对任意 $t \in V$,

$$F(t)(K) \subset G(V \times K) \subset U.$$

所以 $V \subset F^{-1}(S(K, U))$, 这就证明了 (*).

($\Longrightarrow$) 设 $F \in \mathcal{C}(T, \mathcal{C}(X, Y))$. 为了证明 G 是连续的, 我们需要证明

$$\text{对任意开集} U \subset Y, G^{-1}(U) \text{ 在} T \times X \text{ 中是开集.} \tag{**}$$

设 $(t, x) \in G^{-1}(U)$, 则由定义, $F(t) \in S(\{x\}, U)$. 因为 X 是 LCH 空间, 由习题 2.4,

$$S(\{x\}, U) = \bigcup_{x \text{ 的紧邻域 } K} S(K, U).$$

所以存在 x 的开邻域 W_x 使得 $\overline{W_x}$ 是紧集, 且

$$F(t) \in S(\overline{W_x}, U).$$

因为 F 是连续的, 而且 $t \in F^{-1}(S(\overline{W_x}, U))$, 故存在 t 的开邻域 V 使得

$$V \subset F^{-1}(S(\overline{W_x}, U)),$$

即 $G(V, \overline{W_x}) \subset U$. 因此

$$V \times W_x \subset V \times \overline{W_x} \subset G^{-1}(U).$$

这就完成了证明. □

3.3.2 映射与空间的同伦

¶ 映射的同伦

我们定义

定义 3.3.2.（同伦）

设 X 和 Y 是拓扑空间，$f_0, f_1 \in \mathcal{C}(X,Y)$. 若存在连续映射 $F:[0,1]\times X \to Y$ 使得

$$F(0,x)=f_0(x) \qquad \text{且} \qquad F(1,x)=f_1(x), \qquad \forall x\in X,$$

则我们称 f_0 和 f_1 是**同伦的**（homotopic），且称 F 是 f_0 和 f_1 之间的**一个同伦**(homotopy). ♣

$\boxed{\text{记号}}$ 如果 f_0 同伦于 f_1, 将其写作 $f_0 \sim f_1$.

根据定义，如果 $f_0\sim f_1$，则 f_0 可以通过一个“单参数的映射族”被连续地形变到 f_1. 由命题3.3.1，$f_0\sim f_1$ 蕴含了“f_0 和 f_1 都在 $(\mathcal{C}(X,Y),\mathscr{T}_{c.o.})$ 的同一道路连通分支中”. 此外, 如果 X 是 LCH 空间，那么任意从 f_0 到 f_1 的连续形变都由一个同伦给出，即 $f_0\sim f_1$ 当且仅当 f_0,f_1 位于 $(\mathcal{C}(X,Y),\mathscr{T}_{c.o.})$ 中的同一道路连通分支中.

容易验证同伦关系是 $\mathcal{C}(X,Y)$ 上的一个等价关系. [当然，如果 X 是 LCH 空间，那么同伦等价关系就是由 $\mathcal{C}(X,Y)$ 中的道路定义的道路等价关系.]

$\boxed{\text{记号}}$ 对于每个 $f\in\mathcal{C}(X,Y)$, 我们记

$$[f]=f \text{ 的同伦等价类}$$

并且记

$$[X,Y]=\mathcal{C}(X,Y)/\!\sim\;=\mathcal{C}(X,Y)\text{中的同伦类集合}.$$

【因此如果 X 是 LCH 空间，那么 $[X,Y]=\pi_0(\mathcal{C}(X,Y))$.】

<u>一个特殊情况</u>: 如果 $X=\{\mathrm{pt}\}$ 是一个单点集，那么任一连续映射 $f:X\to Y$ 都对应于 Y 中的一个点. 在这种情况下，“两个连续映射 f_0,f_1 是同伦的”就等价于“对应的两个点可以由 Y 的道路连接”. 换而言之, 我们有

$$[\{pt\},Y]=\pi_0(Y).$$

¶ 映射的同伦类上的运算

如同映射可以复合、拉回、前推一样，我们也可以对映射的同伦类做同样的操作. 为此我们需要（留作练习）

命题 3.3.3.（复合、拉回、前推不依赖于代表元的选取）

(1) 若 $f_i\in\mathcal{C}(X,Y), g_i\in\mathcal{C}(Y,Z)\,(i=1,2)$, 且 $f_0\sim f_1, g_0\sim g_1$, 则 $g_0\circ f_0\sim g_1\circ f_1$.

(2) 设 $\varphi\in\mathcal{C}(X_0,X_1)$，$f_i\in\mathcal{C}(X_1,Y)$ $(i=1,2)$，且 $f_0\sim f_1$，则 $f_0\circ\varphi\sim f_1\circ\varphi$.

(3) 设 $\psi\in\mathcal{C}(Y_0,Y_1)$，$f_i\in\mathcal{C}(X,Y_0)$ $(i=1,2)$，且 $f_0\sim f_1$，则 $\psi\circ f_0\sim\psi\circ f_1$. ♠

于是，在同伦类上，下面定义的复合、拉回、推出都是良定的：

(a) 同伦类的**复合** (composition)

$$\begin{aligned}[X,Y]\times[Y,Z]&\to[X,Z]\\ ([f],[g])&\mapsto[g\circ f].\end{aligned}$$

(b) 同伦类的**拉回** (pull-back)

$$\varphi\in\mathcal{C}(X_0,X_1)\quad\rightsquigarrow\quad\begin{aligned}\varphi^*:[X_1,Y]&\to[X_0,Y]\\ [f]&\mapsto\varphi^*([f])=[f\circ\varphi].\end{aligned}$$

(c) 同伦类的**推出** (push-forward)

$$\psi\in\mathcal{C}(Y_0,Y_1)\quad\rightsquigarrow\quad\begin{aligned}\psi_*:[X,Y_0]&\to[X,Y_1]\\ [f]&\mapsto\psi_*([f])=[\psi\circ f].\end{aligned}$$

¶ 零伦

最简单的连续映射是常值映射. 故最简单的同伦类是常值映射所在的同伦类：

定义 3.3.4.（零伦）

如果 $f\in\mathcal{C}(X,Y)$ 同伦于某个常值映射，则我们称 f 是 **零伦的** (null-homotopic). ♣

这个概念在几何中非常有用. 我们给出两个简单而常用的例子：

例 3.3.5.

(1) 令 $X=Y=S^1\subset\mathbb{C}$, 并取 $f_n\in\mathcal{C}(X,Y)$ 为映射

$$f_n(z)=z^n.$$

我们将会看到所有的 f_n 彼此互不同伦，特别地，当 $n\neq0$ 时 f_n 不零伦. 此外，我们还会看到任何连续映射 $f\in\mathcal{C}(S^1,S^1)$ 都恰好同伦于 f_n 中的某一个.

(2) 令 $Y\subset\mathbb{R}^n$ 是凸集，或者更一般的，设 $Y\subset\mathbb{R}^n$ 是一个"星形域"，即

$$\text{存在"中心点"}\ y_0\in Y\ \text{使得}\forall y\in Y,\text{都有：线段}\overline{y_0y}\subset Y.$$

则对于任意拓扑空间 X 和 Z,

- 任意连续映射 $f\in\mathcal{C}(X,Y)$ 是零伦的.

  原因：从 f 到常值映射可以建立下述同伦：

  $$F:[0,1]\times X\to Y,\quad t\mapsto F(t,x)=ty_0+(1-t)f(x).$$

- 任意连续映射 $f\in\mathcal{C}(Y,Z)$ 是零伦的.

  原因：从 f 到常值映射可以建立下述同伦：

  $$F:[0,1]\times Y\to Z,\quad t\mapsto F(t,y)=f(ty_0+(1-t)y).$$

¶ 可缩空间

定义 3.3.6. （可缩空间）

设 X 是拓扑空间. 若恒等映射 $\mathrm{Id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ 是零伦的，则我们称 X 是**可缩空间** (contractible space). ♣

例 3.3.7.

(1) 由例3.3.5(2)，$\mathbb{R}^n$ 中的任意星形域是可缩的，而例3.3.5(1)则告诉我们 S^1 不是可缩的.

(2) 更一般地，S^{n-1} 不是可缩的.
事实上，可以证明 (作为练习): S^{n-1} 是可缩的当且仅当存在一个收缩映射
$$f : B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \big| |x| \leqslant 1\} \to S^{n-1}.$$
（根据定义，$f \in \mathcal{C}(B^n, S^{n-1})$ 是一个收缩映射是指 f 满足条件 $f \circ i = \mathrm{Id}_{S^{n-1}}$，其中 i 为嵌入映射 $i : S^{n-1} \hookrightarrow B^n$，见习题 2.9.）我们将在下一章证明这样的 f 不存在（这等价于 Brouwer 的不动点定理，参见习题）.

(3) 对于任意拓扑空间 X，它的锥空间 $C(X)$（见第 1.4 节）是可缩空间（留作习题）. 比如，S^{n-1} 的锥空间 B^n 是可缩的. 作为推论我们得到:

任意拓扑空间都能被嵌入到某个可缩空间.

¶ 拓扑空间的同伦等价

回顾一下，两个拓扑空间 X, Y 是同胚的，记作 $X \simeq Y$, 是指
$$\exists f \in \mathcal{C}(X, Y), g \in \mathcal{C}(Y, X) \quad \text{使得} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_Y \text{ 且 } g \circ f = \mathrm{Id}_X.$$
同胚拓扑空间之间的一个非常强的等价关系: 如果 $X \simeq Y$, 那么 X, Y 有相同的拓扑性质 (紧性, 连通性, 可度量性, 可数性, 分离性质等等). 下面我们用映射的同伦在拓扑空间之间定义一个弱很多的等价关系:

定义 3.3.8. （同伦等价）

对于拓扑空间 X 和 Y，如果存在 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ 和 $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ 使得
$$f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y \text{ 且 } g \circ f \sim \mathrm{Id}_X,$$
则我们称 X 和 Y 是**同伦等价的** (homotopy equivalent), 记作 $X \sim Y$，并称映射 f 和 g 为 X 和 Y 之间的**同伦等价**（homotopy equivalence），且称 g 为 f 的**一个同伦逆** (homotopy inverse). ♣

注 3.3.9.

(1) 在定义中, f 和 g **仅**在同伦意义上互逆，它们本身不需要是可逆映射.

(2) 如果 $X \simeq Y$, 那么 $X \sim Y$，反之显然并不成立.

(3) 不难验证拓扑空间之间的同伦等价是一个等价关系.

(4) 绝大多数拓扑性质 (包括紧性, (T_i), (A_i), 可度量性等) 都不能在同伦等价下保持.

例 3.3.10. 我们有 $S^n \sim \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$:

所需的同伦等价可以由以下方式显式地构造出来：令

$$f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto x$$

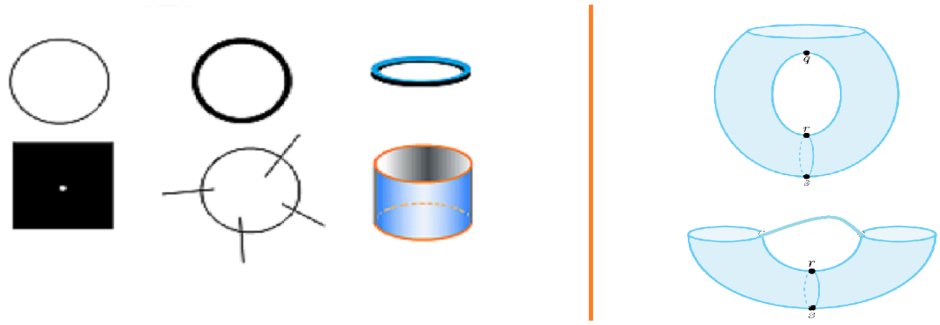
和

$$g : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n, \quad x \mapsto x/|x|.$$

那么显然 $g \circ f = \mathrm{Id}_{S^n}$, 而 $f \circ g \sim \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$ 可由如下同伦给出:

$$F(t,x) = tx + (1-t)x/|x|.$$

下图是一些同伦等价 (但不同胚) 的例子:



3.3.3 道路同伦

¶ 道路上的运算

下面我们考虑一个特殊的映射空间，$\mathcal{C}([0,1],X)$【即 X 上全体道路（不固定端点）所构成的空间】. 在该空间上，我们定义过两个“代数运算”以及一些预备作为“运算单位元”的特殊道路:

- 任意 $x_0 \in X$ 处的常值道路

$$\gamma_{x_0}(t) = x_0, \quad \forall t \in [0,1].$$

- 给定任意从 x_1 到 x_2 的道路 γ, 我们可以“反转”道路得到它的“逆”:

$$\bar{\gamma}(t) := \gamma(1-t).$$

- 给定从 x_1 到 x_2 的道路 γ_1 及从 x_2 到 x_3 的道路 γ_2，我们可以将它们接起来得到“积”:

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

遗憾的是，这些简单运算并不是我们想要的“真正的代数运算”. 例如，我们希望“道路的积”是一个某个群的乘法，常值道路扮演该乘法下“单位元”的角色，而“道路的逆”则是该乘法运算下的“逆元”. 然而，在仅仅考虑道路的情况下，这些预期的性质事实上

都不成立:

$$\text{对于}\gamma_i \in \Omega(X;x_i,x_{i+1}) : (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \neq \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3),$$
$$\text{对于}\gamma \in \Omega(X;x_1,x_2) : \quad \gamma_{x_1} * \gamma \neq \gamma, \quad \gamma * \gamma_{x_2} \neq \gamma,$$
$$\text{对于}\gamma \in \Omega(X;x_1,x_2) : \quad \gamma * \bar{\gamma} \neq \gamma_{x_1}, \quad \bar{\gamma} * \gamma \neq \gamma_{x_2}.$$

不过，情况也并没有那么糟糕. 比如，对于上面所列的前两组“不相等”，虽然作为道路，不等号两边是不同的，但它们作为“曲线”它们是一样的: 实际上，不等号两边只是同一曲线的不同参数化.

¶ 重新参数化的同伦不变性

定义 3.3.11.（重新参数化）

设 $\gamma_1 : [0,1] \to X$ 和 $\gamma_2 : [0,1] \to X$ 都是 X 中的道路. 如果存在连续映射 $f : [0,1] \to [0,1]$ 满足 $f(0) = 0, f(1) = 1$，且使得

$$\gamma_2 = \gamma_1 \circ f,$$

则我们称 f_2 是 f_1 的**重新参数化**（reparametrization）. ♣

例 3.3.12.

- 以下分段线性映射 $f : [0,1] \to [0,1]$ 将 $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$ 重参数化为 $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$:
$$f([0,\frac{1}{2}]) = [0,\frac{1}{4}], \quad f([\frac{1}{2},\frac{3}{4}]) = [\frac{1}{4},\frac{1}{2}], \quad f([\frac{3}{4},1]) = [\frac{1}{2},1].$$
- 以下分段线性映射 $f : [0,1] \to [0,1]$ 将道路 γ 重参数化为道路 $\gamma_{x_1} * \gamma$:
$$f([0,\frac{1}{2}]) = 0, \quad f([\frac{1}{2},1]) = [0,1].$$
- 以下分段线性映射 $f : [0,1] \to [0,1]$ 将道路 γ 重参数化为 $\gamma * \gamma_{x_2}$:
$$f([0,\frac{1}{2}]) = [0,1], \quad f([\frac{1}{2},1]) = 1.$$

道路的运算最终能够被“包装”成代数运算，最关键的观察在于:

命题 3.3.13.（重新参数化的道路是同伦的）

令 $\gamma_2 = \gamma_1 \circ f$ 为 γ_1 的重新参数化，那么 $\gamma_2 \sim \gamma_1$. ♠

证明 [我们要用到 [0, 1] 的凸性. 可以与例3.3.5(2)做比较.] 令

$$F(t,s) = \gamma_1((1-t)s + tf(s)).$$

则 F 是 $F(0,s) = \gamma_1(s)$ 和 $F(1,s) = \gamma_1(f(s)) = \gamma_2(s)$ 之间的同伦. □

¶ 同伦类的代数运算

现在我们证明前面所列的“我们希望相等但实际上不相等的道路”，其实都在同一个同伦类中:

命题 3.3.14.（道路运算保同伦类）

对于任意 $\gamma_i \in \Omega(X; x_i, x_{i+1})$（$i = 1, 2$）以及 $\gamma \in \Omega(X; x_1, x_2)$, 我们有

(1) $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \sim \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$.

(2) $\gamma_{x_1} * \gamma \sim \gamma, \quad \gamma * \gamma_{x_2} \sim \gamma$.

(3) $\gamma * \bar{\gamma} \sim \gamma_{x_1}, \quad \bar{\gamma} * \gamma \sim \gamma_{x_2}$.

证明 (1)(2) 由例3.3.12和命题3.3.13可得. 下证 (3). 因为“推出”在同伦类上的良定性，有

$$\text{如果} f \in \mathcal{C}(X, Y) \text{ 且在 } X \text{ 中} \gamma_1 \sim \gamma_2, \text{ 则在 } Y \text{ 中} f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2. \tag{a}$$

现在我们取 $[0, 1]$ 上的两条从 0 映射到 0 的道路, 即

$$\lambda_1(s) = \begin{cases} 2s, & 0 \le s < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2s, & s \ge \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{和} \qquad \lambda_2(s) \equiv 0.$$

$[0, 1]$ 的凸性蕴含着 $\lambda_1 \sim \lambda_2$, 从而我们得到

$$\gamma * \bar{\gamma} = \gamma \circ \lambda_1 \sim \gamma \circ \lambda_2 = \gamma_{x_1}.$$

同理可证 $\bar{\gamma} * \gamma \sim \gamma_{x_2}$. □

由上述命题并结合“复合”在同伦类上的良定性，我们可以得到：

推论 3.3.15

设 $\gamma_i \in \Omega(X, x_i, x_{i+1})$（$i = 1, 2$），则

$$\gamma_1 * (\gamma_2 * \bar{\gamma}_2) \sim \gamma_1, \quad (\bar{\gamma}_1 * \gamma_1) * \gamma_2 \sim \gamma_2.$$

¶ 道路同伦

上述结果启发我们去研究道路的同伦类的代数运算. 例如，我们自然想去定义

$$[\gamma_1] * [\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2].$$

但是这里仍然有一个问题：对于任意 $\tilde{\gamma}_1 \in [\gamma_1], \tilde{\gamma}_2 \in [\gamma_2]$, 一般而言 $\tilde{\gamma}_2(0) \neq \tilde{\gamma}_1(1)$, 从而 $\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2$ 没有意义. 为了解决这个问题，我们需要考虑同伦类中具有相同端点的道路，即固定端点的同伦. 我们将这样的同伦称为道路同伦，区别于之前定义的一般的同伦.

定义 3.3.16.（道路同伦）

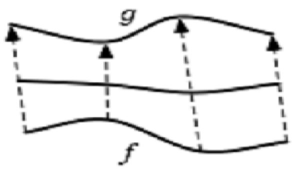
令 $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to X$ 为具有相同端点的两条道路，即

$$\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = x_0, \quad \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = x_1.$$

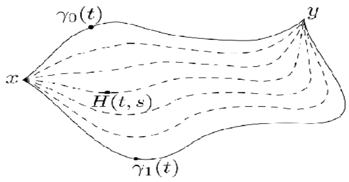
如果存在连续映射 $H : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ 满足

$$\begin{aligned} &H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t), \quad \forall t \in [0, 1], \\ &H(0, s) = x_0, \qquad H(1, s) = x_1, \qquad \forall s \in [0, 1], \end{aligned}$$

则我们称 γ_0 和 γ_1 是**道路同伦的**（path homotopic），并称 H 是 γ_0 和 γ_1 之间的一个**道路同伦**（path homotopy）.



general homotopy



path homotopy

$\boxed{\text{记号}}$

- γ_0 和 γ_1 是道路同伦：$\gamma_0 \underset{p}{\sim} \gamma_1$.
- γ 的道路同伦类: $[\gamma]_p$.
- 固定端点 x_0, x_1 的道路同伦类集合: $\pi(X; x_0, x_1)$.

可以验证，前面出现的各种运算/操作下道路之间的同伦，都可以取为道路同伦：

命题 3.3.17.（运算与道路同伦）

(1) 对于 $\gamma_i \in \Omega(X; x_i, x_{i+1})$，有 $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 \underset{p}{\sim} \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$.

(2) 对于 $\gamma \in \Omega(X; x_1, x_2)$，有 $\gamma_{x_1} * \gamma \underset{p}{\sim} \gamma$，$\gamma * \gamma_{x_2} \underset{p}{\sim} \gamma$.

(3) 对于 $\gamma \in \Omega(X; x_1, x_2)$，有 $\gamma * \bar{\gamma} \underset{p}{\sim} \gamma_{x_1}$，$\bar{\gamma} * \gamma \underset{p}{\sim} \gamma_{x_2}$.

(4) 对于 $\gamma_i \in \Omega(X; x_i, x_{i+1})$，有 $\gamma_1 * (\gamma_2 * \bar{\gamma}_2) \underset{p}{\sim} \gamma_1$，$(\bar{\gamma}_1 * \gamma_1) * \gamma_2 \underset{p}{\sim} \gamma_2$.

(5) 若 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ 且在 X 中 $\gamma_1 \underset{p}{\sim} \gamma_2$，则在 Y 中有 $f \circ \gamma_1 \underset{p}{\sim} f \circ \gamma_2$.

(6) 如果 γ_2 是 γ_1 的一个重新参数化，则 $\gamma_2 \underset{p}{\sim} \gamma_1$.

♠

¶ 道路同伦类上的运算

有了前面的准备工作，我们最终可以在道路同伦类之前定义代数运算：

(a) 乘法运算:

$$m : \pi(X; x_1, x_2) \times \pi(X; x_2, x_3) \to \pi(X; x_1, x_3)$$

$$([\gamma_1]_p, [\gamma_2]_p) \mapsto [\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p := [\gamma_1 * \gamma_2]_p,$$

(b) 取逆运算:

$$i : \pi(X; x_1, x_2) \to \pi(X; x_2, x_1), \quad [\gamma]_p \mapsto [\gamma]_p^{-1} := [\bar{\gamma}]_p.$$

我们需要验证这两个运算是良定的，为此我们需要证明

命题 3.3.18.（乘法与取逆的良定性）

(1) 若 $\gamma_i \underset{p}{\sim} \gamma_i'$ $(i = 1, 2)$，则 $\gamma_1 * \gamma_2 \underset{p}{\sim} \gamma_1' * \gamma_2'$.

(2) 若 $\gamma \underset{p}{\sim} \gamma'$，则 $\bar{\gamma} \underset{p}{\sim} \bar{\gamma}'$.

♠

证明 (1) 设 $H_1 : [0,1] \times [0,1] \to X$ 是 γ_1 与 γ_1' 之间的一个道路同伦，$H_2 : [0,1] \times [0,1] \to X$ 是 γ_2 与 γ_2' 之间的一个道路同伦，则

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X, \quad H(t,s) = \begin{cases} H_1(t, 2s), & 0 \le s \le 1/2 \\ H_2(t, 2s-1), & 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

是 $\gamma_1 * \gamma_2$ 与 $\gamma_1' * \gamma_2'$ 之间的一个道路同伦.

(2) 设 $H:[0,1]\times[0,1]\to X$ 是 γ 与 γ' 之间的一个道路同伦，则 $\overline{H}(t,s):=H(1-t,s)$ 是 $\bar\gamma$ 与 $\bar\gamma'$ 之间的道路同伦. □

由前面所列的运算与道路同伦之间的关系，不难得到

命题 3.3.19.（道路同伦类运算的性质）

(1) 乘法是结合的：如果 $[\gamma_i]_p\in\pi(X;x_i,x_{i+1}), i=1,2,3$, 则

$$([\gamma_1]_p*[\gamma_2]_p)*[\gamma_3]_p=[\gamma_1]_p*([\gamma_2]_p*[\gamma_3]_p),$$

特别地，表达式 $[\gamma_1]_p*[\gamma_2]_p*[\gamma_3]_p$ 是良好定义的.

(2) $[\gamma_{x_1}]_p$ 和 $[\gamma_{x_2}]_p$ 分别是左单位元和右单位元：对于 $[\gamma]_p\in\pi(X;x_1,x_2)$,

$$[\gamma_{x_1}]_p*[\gamma]_p=[\gamma]_p,\quad [\gamma]_p*[\gamma_{x_2}]_p=[\gamma]_p.$$

(3) i 是逆运算：对于 $[\gamma]_p\in\pi(X;x_1,x_2)$.

$$[\gamma]_p*[\gamma]_p^{-1}=[\gamma_{x_1}]_p,\quad [\gamma]_p^{-1}*[\gamma]_p=[\gamma_{x_2}]_p,\quad ([\gamma]_p^{-1})^{-1}=[\gamma]_p$$

并且对于 $[\gamma_i]_p\in\pi(X;x_i,x_{i+1})$,

$$([\gamma_1]_p*[\gamma_2]_p)^{-1}=[\gamma_2]_p^{-1}*[\gamma_1]_p^{-1}.$$

(4) 特别地，如果 $[\gamma_i]_p\in\pi(X;x_i,x_{i+1}), i=1,2$, 则

$$[\gamma_1]_p*[\gamma_2]_p*[\gamma_2]_p^{-1}=[\gamma_1]_p,\quad [\gamma_1]_p^{-1}*[\gamma_1]_p*[\gamma_2]_p=[\gamma_2]_p.$$

♠

注 3.3.20. 注意“道路同伦类之间的乘法”运算不是对于所有道路同伦类都有定义的：只有“首尾相连”的道路同伦类之间才能（按照给定的顺序）相乘. 所以如果我们令

$$\pi(X)=\bigcup_{x,y\in X}\pi(X;x,y),$$

那么“取逆运算”是在整个 $\pi(X)$ 上处处有定义的一元运算，但“乘法运算”只是一个在部分元素间有定义的二元运算：

- 如果 $a*b$ 和 $b*c$ 是有定义的，则 $(a*b)*c$ 和 $a*(b*c)$ 是有定义的并且它们相等. 反之，如果 $(a*b)*c$ 或 $a*(b*c)$ 是有定义的，则 $a*b$ 和 $b*c$ 都是有定义的，并且 $(a*b)*c=a*(b*c)$.
- $a^{-1}*a$ 和 $a*a^{-1}$ 都是有定义的.
- 如果 $a*b$ 是有定义的，那么 $a*b*b^{-1}=a$ 并且 $a^{-1}*a*b=b$.

一般来说，一个带有逆运算和满足上述条件的“部分定义的乘法”的集合被称作一个**群胚**或者**广群**（groupoid）.[5] 特别地，我们称集合 $\pi(X)$（赋予该群胚结构）为**基本群胚**（fundamental groupoid）.

[5]群胚最早是由德国数学家 H. Brandt 在 1927 年引入的，后来被广泛用于代数几何（始于 Grothendieck 的工作）、代数拓扑、李理论、辛几何等. 可以证明：对于一个广群，我们有
- $(a^{-1})^{-1}=a$.
- 如果 $a*b$ 是定义良好的，那么 $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$.

关于群胚性质以及它在代数拓扑中的应用（基本群胚），参见 R. Brown, Topology and Groupoids, BookSurge Publishing, 2006.

3.4 基本群

3.4.1 基本群的概念

¶ 基本群：定义

一般而言，$\pi(X)$ 和 $\pi(X;x_0,x_1)$ 都不是群. 然而，如果 $x_0=x_1$, 那么

$$\pi_1(X,x_0):=\pi(X;x_0,x_0)$$

是一个群，这是因为

- $\pi_1(X,x_0)$ 中任意两个元素 $[\gamma_1]_p,[\gamma_2]_p\in\pi_1(X,x_0)$ 可以相乘，得到
$$[\gamma_1]_p*[\gamma_2]_p=[\gamma_1*\gamma_2]_p\in\pi_1(X,x_0).$$
- $\pi_1(X,x_0)$ 中有一个单位元 $e=[\gamma_{x_0}]_p\in\pi_1(X,x_0)$, 使得对于任意 $[\gamma]_p\in\pi_1(X,x_0)$, 都有
$$[\gamma]_p*[\gamma_{x_0}]_p=[\gamma]_p=[\gamma_{x_0}]_p*[\gamma]_p.$$
- 任意 $[\gamma_1]_p\in\pi(X,x_0)$ 都是可逆的，并且其逆元恰为 $[\gamma]_p^{-1}:=[\bar\gamma]_p\in\pi_1(X,x_0)$:
$$[\bar\gamma]_p*[\gamma]_p=[\gamma_{x_0}]_p=[\gamma]_p*[\bar\gamma]_p.$$

于是我们得到

命题 3.4.1.（基本群的运算） 集合 $\pi_1(X,x_0)=\Omega(X,x_0)/\underset{p}{\sim}$ 在乘法运算

$$[\gamma_1]_p*[\gamma_2]_p=[\gamma_1*\gamma_2]_p,\quad\forall\gamma_1,\gamma_2\in\Omega(X,x_0),$$

下形成一个群，其单位元为 $e=[\gamma_{x_0}]_p$，而逆运算为

$$[\gamma]_p^{-1}:=[\bar\gamma]_p,\quad\forall\gamma\in\Omega(X,x_0).$$

♠

这个群最早由著名数学家 Poincaré[6] 引入，叫做基本群：

定义 3.4.2.（基本群） 我们将 $\pi_1(X,x_0)$ 称为以 x_0 为基点的**基本群**（fundamental group）.

♣

我们研究一个简单的例子：

例 3.4.3. 令 $X\subset\mathbb{R}^n$ 为星形域，并且令 $x_0\in X$ 为 X 的一个"中心点"，即 x_0 可以跟 X 中任意一个点通过线段相连. 在第 3.3 节我们构造了一个从恒等映射 $F(0,x)=x$ 到常

[6]庞加莱（Henry Poincare，1854-1912），法国数学家、物理学家、科学哲学家，在数学与应用数学的多个分支以及数学物理、天体力学方面做出了很多原创而基础性的工作，被评价为"史上最后一位数学全才". 在拓扑学方面，庞加莱开创性地开启了对高维空间拓扑的研究，因而被认为是现代拓扑学的奠基人之一. 他在 1895 年发表了一篇奠基性文章"Analysis situs"，之后在 1899 年到 1904 年又发表了五篇文章作为补充. 在这些文章中 Poincaré 引入了**基本群**和**单纯同调**的概念, 给出了 **Poincaré 对偶定理**的早期表述, 引入了链复形的 **Euler–Poincaré 示性数**, 并提出了几个重要的猜想（包括著名的 **Poincaré 猜想**）. 根据 Dieudonné 的说法, 这一系列论文首次系统地研究了拓扑学，并通过使用代数结构来区分不同胚的拓扑空间，使这一领域发生了革命性的变化，开创了代数拓扑学这一领域.

值映射 $F(1,x)\equiv x_0$ 的同伦

$$F:[0,1]\times X\to X,\qquad (t,x)\mapsto tx_0+(1-t)x.$$

现在我们令 $\gamma\in\Omega(X,x_0)$ 为任意以 x_0 为基点的圈. 则

$$H:[0,1]\times[0,1]\to X,\quad (t,s)\mapsto F(t,\gamma(s))$$

是 γ 和 γ_{x_0} 之间的一个道路同伦(这里我们用到了 $F(t,x_0)\equiv x_0$). 于是我们得到如下结论：星形域的基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 是平凡群

$$\pi_1(X,x_0)\cong\{e\}.$$

具有平凡基本群的空间被称为单连通空间：[7]

定义 3.4.4.（单连通空间）

设 X 是道路连通空间. 如果 X 的基本群是平凡群，即

$$\pi_1(X)=\{e\},$$

则我们称 X 是**单连通空间**（simply connected space）. ♣

于是 $\mathbb{R}^n$ 中任意星形域都是单连通的. 特别地，$\mathbb{R}^n$ 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集都是单连通的. 一般来说，计算给定空间的基本群是一件不平凡的事情. 我们将会证明

$$\pi_1(S^n,x_0)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & n=1,\\ \{e\}, & n\geq 2.\end{cases}$$

于是，S^1 不是单连通的，而 S^n（$n\geq 2$）是单连通的. 事实上，我们将采用不同的方法计算 S^1 和 S^n（$n\geq 2$）的基本群：映射提升法（该方法最终发展为覆叠空间的理论）以及开覆盖方法（该方法最终发展为 van Kampen 定理）.

¶ 基本群元素的几何含义：圈的形变等价类

因为 $[0,1]$ 是 LCH 空间, 我们有

$$\pi_1(X,x_0)=\Omega(X,x_0)/\underset{p}{\sim}=\pi_0(\Omega(X,x_0)),$$

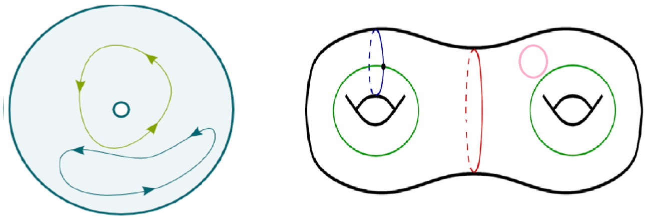
其中 $\Omega(X,x_0)$ 是 X 中以 x_0 为基点的圈的集合（赋予紧开拓扑）. 换句话说，基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 所衡量的是圈空间 $\Omega(X;x_0)$ 的道路连通性：

- 对应于 $\pi_1(X,x_0)$ 中单位元的圈 $\Longleftrightarrow$ 能在 X 中连续收缩到一个点的圈.
- 对应于 $\pi_1(X,x_0)$ 中同一元素的两个圈 $\Longleftrightarrow$ 能在 X 中通过连续形变相互转化的圈.

特别地，基本群 $\pi_1(X)$ 群 “越大”，圈空间中 “拓扑上不同的” 圈就越多，而单连通空间则是 “所有圈都能收缩成一个点” 的空间.

---

[7] 单连通这个概念最早起源于复分析，且在其中也扮演了一个基本的角色：
- 单连通的概念是由 Riemann 于 1851 年在他的博士论文中首次引入的，在这篇文章中他证明了著名的 **Riemann 映照定理**：$\mathbb{C}$ 中任意 “边界多于一个点的单连通区域” 能够被共形地映为单位圆盘.
- **Cauchy 积分定理** 表明：如果 U 是一个 $\mathbb{C}$ 中的单连通区域, 并且 $f:U\to\mathbb{C}$ 是全纯的，那么 “f 沿着 U 中任意道路的线积分的值” 仅取决于 f 在该道路两个端点处的值.



¶ 作为函子的 π_1

下面我们说明，类似于 π_0 和 π_c，π_1 也是一个函子. 因为基本群的定义是带基点的，所以我们要考虑"带有标定点的拓扑空间范畴" $\mathcal{PointedTOP}$，其中

- 对象是"带有标定点的拓扑空间" (X, x_0), 即拓扑空间 X 以及标定点 $x_0 \in X$;
- 态射是"带有标定点的连续映射" $f \in \mathcal{C}((X,x_0),(Y,y_0))$，即满足条件 $f(x_0) = y_0$ 的连续映射 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.

根据基本群的定义，对于 $\mathcal{PointedTOP}$ 中的任意对象 (X,x_0)，π_1 将它对应到群 $\pi_1(X,x_0)$. 我还需要把把态射即 $f \in \mathcal{C}((X,x_0),(Y,y_0))$ 对应到群范畴 $\mathcal{GROUP}$ 中对应对象之间的态射，即 $\pi_1(X,x_0)$ 到 $\pi_1(Y,y_0)$ 之间的群同态. 不难找到这样一个自然的群同态：设 $f: X \to Y$ 为连续映射，且 $y_0 = f(x_0)$. 则由命题3.3.17(5)，f 诱导了基本群之间的映射

$$f_*: \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0), \quad [\gamma]_p \mapsto [f\circ\gamma]_p. \tag{3.4.1}$$

我们有

命题 3.4.5.（诱导同态 f_* 的函子性）

(1) f_* 是一个群同态：$f_*([\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p) = f_*([\gamma_1]_p) * f_*([\gamma_2]_p)$.

(2) 恒等映射 Id_X 诱导了恒等同态：$(\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)} : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$.

(3) 如果 $f \in \mathcal{C}((X,x_0),(Y,y_0))$ 且 $g \in \mathcal{C}((Y,y_0),(Z,z_))$, 那么 $(g\circ f)_* = g_* \circ f_*$. ♠

证明 (1) 因为 $f\circ(\gamma_1 * \gamma_2) = (f\circ\gamma_1)*(f\circ\gamma_2)$，所以

$$f_*([\gamma_1]_p * [\gamma_2]_p) = f_*([\gamma_1 * \gamma_2]_p) = [f\circ(\gamma_1*\gamma_2)]_p = [(f\circ\gamma_1)*(f\circ\gamma_2)]_p = [f\circ\gamma_1]_p * [f\circ\gamma_2]_p.$$

从而由 f_* 的定义即得欲证.

(2) 由定义即得.

(3) $(g\circ f)_*([\gamma]_p) = [g\circ f\circ\gamma]_p = g_*([f\circ\gamma]_p) = g_*\circ f_*([\gamma]_p)$. □

于是对应关系 $\pi_1 : \mathcal{PointedTOP} \to \mathcal{GROUP}$，其中

$$(X,x_0) \rightsquigarrow \pi_1(X,x_0),$$
$$f \in \mathcal{C}((X,x_0),(Y,y_0)) \rightsquigarrow \pi_1(f) = f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0).$$

是从范畴 $\mathcal{PointedTOP}$ 到范畴 $\mathcal{GROUP}$ 的一个函子.

函子性的一个基本推论是"等价的对象"会被映为"等价的对象"：

推论 3.4.6.（基本群是拓扑不变量）

如果 $f: X \to Y$ 是一个同胚，那么 f_* 是基本群之间的同构

$$f_* : \pi_1(X,x_0) \simeq \pi_1(Y, f(x_0)).$$

♡

证明 任取 x_0 并记 $f(x_0)=y_0$. 则我们得到

$$f_*\circ(f^{-1})_*=(f\circ f^{-1})_*=(\mathrm{Id}_Y)_*=\mathrm{Id}_{\pi_1(Y,y_0)},$$
$$(f^{-1})_*\circ f_*=(f^{-1}\circ f)_*=(\mathrm{Id}_X)_*=\mathrm{Id}_{\pi_1(X,x_0)},$$

于是 f_* 与 $(f^{-1})_*$ 是互为逆的群同构. □

还可以证明，π_1 函子把"乘法对象"映为"乘法对象"（证明留作习题）:

命题 3.4.7.（乘积空间的基本群）

$\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\cong\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(Y,y_0).$ ♠

¶ 作为范畴 $\mathcal{PointedTOP}$ 中同伦类集合的 π_1

根据定义，$\pi_1(X,x_0)$ 中的元素为圈空间 $\Omega(X,x_0)$ 中元素的道路同伦类，而圈空间 $\Omega(X,x_0)$ 的元素为满足 $\gamma(0)=\gamma(1)=x_0$ 的连续映射 $\gamma:[0,1]\to X$. 于是，每个圈 γ 自动给出了一个把商空间 $S^1=[0,1]/\{0\sim 1\}$ 映到 X 且将等价类 $[0]$ 映为 x_0 的连续映射. 换而言之，如果我们取 $p=[0]=(1,0)\in S^1=\partial D\subset\mathbb{R}^2$，则圈空间 $\Omega(X,x_0)$ 的元素恰好一一对应于将 (S^1,p) 映入 (X,x_0) 的"带有标定点的连续映射"，从而我们可以将 $\Omega(X,x_0)$ 与 $\mathcal{C}((S^1,p),(X,x_0))$ 等同起来.

更进一步地，我们可以在"带有标定点的连续映射空间" $\mathcal{C}((X,x_0),(Y,y_0))$ 中考虑同伦（即连续形变），此时我们自然需要要求在形变过程中标定点要保持不变：设 $f_1,f_2\in\mathcal{C}((X,x_0),(Y,y_0))$ 是两个带有同样标定点的连续映射，则 f_1,f_2 之间的保持标定点不变的同伦是指连续映射 $F:[0,1]\times X\to Y$，使得

$$F(0,x)=f_1(x),\quad F(1,x)=f_1(x),\qquad \forall x\in X,$$
$$F(t,x_0)=y_0,\qquad \forall t\in[0,1].$$

跟上节一样，可以证明这是一个等价关系. 我们将商空间，即"保持标定点不变的同伦"所给出的同伦类集合，记为 $[(X,x_0),(Y,y_0)]$.

回到 $\pi_1(X,x_0)$ 的情形. 不难看出，不仅仅圈空间 $\Omega(X,x_0)$ 的元素对应于将 (S^1,p) 映入 (X,x_0) 的"带有标定点的连续映射"，而且在该对应关系下，圈空间 $\Omega(X,x_0)$ 中元素的道路同伦类恰好对应于"带有标定点的连续映射空间" $\mathcal{C}((S^1,p),(X,x_0))$ 中的同伦类. 于是我们得到基本群的另一个解释，即 $\pi_1(X,x_0)$ 是"在带标定点的范畴里，连续映射 $f:(S^1,p)\to(X,x_0)$ 的同伦类的集合":

$$\pi_1(X,x_0)=[(S^1,p),(X,x_0)].$$

¶ 作为范畴 $\mathcal{PointedTOP}$ 中同伦类集合的 π_0

类似地，我们也可以把 $\pi_0(X)$ 解释为"在带标定点的范畴里，连续映射的同伦类的集合"，跟 π_1 唯一的差别在于 (S^1,p) 被换为 (S^0,p)，其中 $p=1\in S^0=\{\pm1\}=\partial I\subset\mathbb{R}$:

$$\pi_0(X)=\pi_0(X,x_0)=[(S^0,p),(X,x_0)].$$

我们来解释为什么：

- 一个从 (S^0,p) 到 (X,x_0) 的带标定点的连续映射 f
  $\Longleftrightarrow$ 一个满足条件 $f(1)=x_0$ 的映射 $f:\{\pm1\}\to X$
  $\Longleftrightarrow$ 一个点 $f(-1)\in X$.
- 两个带标定点的映射 $f_1,f_2(\{\pm1\},1)\to(X,x)$ 是同伦的
  $\Longleftrightarrow$ 存在一个连续形变 $F:[0,1]\times\{\pm1\}\to X$ 使得
  $$F(t,1)\equiv x, F(0,-1)=f_1(-1), F(1,-1)=f_2(-1)$$
  $\Longleftrightarrow$ 存在连接 $f_1(-1)$ 和 $f_2(-1)$ 的连续曲线 $\gamma(t):=F(t,-1)$
  $\Longleftrightarrow$ $f_1(-1)$ 和 $f_2(-1)$ 位于 X 的同一道路连通分支中.

¶ 阅读材料：高阶同伦群 π_n

更一般地，对于 $n\geqslant 2$, 我们可以取 $p=(1,0,\cdots,0)\in S^n=\partial B^{n+1}\subset\mathbb{R}^{n+1}$，并考虑带标定点的连续映射空间 $\mathcal{C}((S^n,p),(X,x_0))$ 的同伦类的集合 $[(S^n,p),(X,x_0)]$.

跟基本群类似，我们可以在 $[(S^n,p),(X,x_0)]$ 上定义群运算，为此我们需要给出集合 $[(S^n,p),(X,x_0)]$ 的一个略微不同的描述方式. 记 $I=[0,1]$, 从而 $I^n\subset\mathbb{R}^n$ 是单位方体. 我们可以将 S^n 视作商空间 $I^n/\partial I^n$，并且将点 $p\in S^n$ 与 $[\partial I^n]\in I^n/\partial I^n$ 等同起来. 由此我们得到 $[(S^n,p),(X,x_0)]$ 的一种等价描述：
$$[(S^n,p),(X,x_0)]=[(I^n,\partial I^n),(X,x_0)].$$
现在对于任意 $f_1,f_2\in\mathcal{C}((I^n,\partial I^n),(X,x_0))$，通过分别 "收缩"$I^n$ 的第一个坐标"，我们可以得到两个连续映射
$$\widetilde{f_1}:[0,1/2]\times I^{n-1}\to X,\qquad \widetilde{f_2}:[1/2,1]\times I^{n-1}\to X.$$
因为 $\widetilde{f_1}$ 和 $\widetilde{f_2}$ 将各自定义域的 "边界" 均映为 x_0，这两个映射可以被粘合到一起得到 $f_1*f_2\in\mathcal{C}((I^n,\partial I^n),(X,x_0))$. 重复前面对基本群运算的处理方式，可以证明该乘法给出了同伦类集合 $[(S^n,p),(X,x_0)]$ 的一个群结构.

于是，对于任意拓扑空间，我们得到一系列的群，他们被称为同伦群[8]：

定义 3.4.8. (同伦群)

我们称赋予了上述群结构的同伦类的集合
$$\pi_n(X,x_0):=[(S^n,p),(X,x_0)]$$
为 X 的以 x_0 为基点的 n **阶同伦群**. ♣

跟基本群类似，π_n 是一个从 $\mathcal{PointedTOP}$ 到 $\mathcal{GROUP}$ 的函子. 不同之处在于，对于任意 $n\geqslant 2$, $\pi_n(X,x_0)$ 是一个交换群，而基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 则未必是交换群. 同伦群是代数拓扑的重要研究对象，我们在此不做过多展开.

[8]高阶同伦群的概念是由 Čech 在 1932 年首次定义的. 他在文章中证明了这些群是交换群，但遗憾的是，他在 Alexandroff 和 Hopf 的建议下撤回了该文章，因为他们认为这些群不包含比同调群更多的信息，然后也该被视为是基本群的合理推广，因为基本群一般来说非交换的. 最终事实证明他们错了！例如，跟当 $n>k$ 时同调群 $H_n(S^k)=0$，然而此时同伦群 $\pi_n(S^k)$ 一般来说是非平凡的，例如，用所谓的 Hopf 不变量可以证明，在第 1.4 节末尾给出的 Hopf 纤维化映射是非零伦的，从而 $\pi_3(S^2)\neq\{0\}$. 而且令人惊讶的是，球面同伦群的计算远远难于基本群的计算.

3.4.2 基本群的基本性质

¶ 基本群与基点选取的无关性

我们首先考虑如下问题：给定拓扑空间 X 和两个基点 $x_0, x_1 \in X$，$\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(X, x_1)$ 之间的关系是什么？

不难看出，若 X_0 是 x_0 所在的道路连通分支，则 $\Omega(X, x_0) = \Omega(X_0, x_0)$，从而 $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X_0, x_0)$. 于是，如果 x_0 与 x_1 在不同的道路连通分支中，则 $\pi_1(X, x_0)$ 和 $\pi_1(X, x_1)$ 之前是没有关联的.

但是，如果 x_0, x_1 位于 X 的同一个道路连通分支中，则跟据命题3.3.17，任意连接 x_0, x_1 的道路 $\lambda \in \Omega(X; x_0, x_1)$ 都诱导了基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 与 $\pi_1(X, x_1)$ 之间的一个映射

$$\Gamma_\lambda : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \qquad [\gamma]_p \mapsto [\bar{\lambda}*\gamma*\lambda]_p. \tag{3.4.2}$$

我们证明

命题 3.4.9. (基本群的基点无关性)
假设 x_0 和 x_1 位于 X 的同一道路连通分支中，则对于任意从 x_0 到 x_1 的道路 λ，映射 $\Gamma_\lambda : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ 是一个群同构.

证明 我们首先说明 Γ_λ 是一个群同态，为此我们作如下计算

$$\begin{aligned}\Gamma_\lambda([\gamma_1]_p*[\gamma_2]_p) = \Gamma_\lambda([\gamma_1*\gamma_2]_p) &= [\bar{\lambda}*\gamma_1*\gamma_2*\lambda]_p \\ &= [\bar{\lambda}*\gamma_1*\lambda*\bar{\lambda}*\gamma_2*\lambda]_p \\ &= [\bar{\lambda}*\gamma_1*\lambda]_p*[\bar{\lambda}*\gamma_2*\lambda]_p \\ &= \Gamma_\lambda([\gamma_1]_p)*\Gamma_\lambda([\gamma_2]_p).\end{aligned}$$

注意到映射 Γ_λ 是可逆的，且 $(\Gamma_\lambda)^{-1}$ 恰好是由道路 $\bar{\lambda}$ 所诱导的映射：

$$(\Gamma_\lambda)^{-1}([\tilde{\gamma}]_p) = [\lambda*\tilde{\gamma}*\bar{\lambda}]_p = [\bar{\bar{\lambda}}*\tilde{\gamma}*\bar{\lambda}]_p = \Gamma_{\bar{\lambda}}([\tilde{\gamma}]_p).$$

所以 $(\Gamma_\lambda)^{-1}$ 也是一个群同态，从而 Γ_λ 是一个群同构. □

注 3.4.10. 一个自然的问题是：群同态 Γ_λ 是如何依赖于 λ 的选取的？注意若 λ_1, λ_2 是两条从 x_0 到 x_1 的道路，则 $\lambda_1*\bar{\lambda}_2$ 是以 x_0 为基点的一个圈. 在习题中我们将证明：

$\Gamma_{\lambda_1} = \Gamma_{\lambda_2}$ 当且仅当 $\lambda_1*\bar{\lambda}_2$ 是零伦的，即 $[\lambda_1*\bar{\lambda}_2]_p = e \in \pi_1(X, x_0)$.

根据上面的论述，在研究 X 的基本群时，我们通常假设 X 是道路连通的，从而由命题3.4.9，对于任意 x_0, x_1，都有

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1),$$

即 X 的基本群"与基点的选取无关". 此时我们可以省略基点，把 X 的基本群记为 $\pi_1(X)$. 然而，需要注意的事情是：虽然在这种情况下 $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$，但是这两个群之间的群同构 Γ_λ 是依赖于从 x_0 到 x_1 的道路 λ 的选取的，即不同的 λ 所诱导的群同构 Γ_λ 可以是不同的. 因此，跟群 $\pi_1(X, x_0)$ 不同的是，群 $\pi_1(X)$ 不是一个具体的群，而只是一个群的同构类！(换而言之，群 $\pi_1(X, x_0)$ 中的元素有具体的几何意义，而 $\pi_1(X)$ 则只是用以表征群元素之间的关系，其中的元素则并没有确定的几何意义.)

¶ 诱导映射 f_* 的"同伦不变性"

在 π_1 的函子性中我们知道,任意 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ 诱导了一个从 $\pi_1(X,x_0)$ 到 $\pi_1(Y,f(x_0))$ 的群同态, 见公式 (3.4.1). 下面我们考察该诱导同态对 f 的依赖性. 假设 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X,Y)$, 且 $f_1 \sim f_2$. 固定 $x_0 \in X$. 令 $F : [0,1] \times X \to Y$ 为 f_1 和 f_2 之间的一个同伦. 则

$$\lambda(t) := F(t, x_0), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

是从 $y_1 = f_1(x_0)$ 到 $y_2 = f_2(x_0)$ 的一条道路, 从而诱导了群同态

$$\Gamma_\lambda : \pi_1(Y, y_1) \to \pi_1(Y, y_2), \quad [\gamma]_p \mapsto [\bar{\lambda} * \gamma * \lambda]_p.$$

我们证明

引理 3.4.11.（诱导映射的"同伦不变性"）

若 $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X,Y)$, 且 $f_1 \sim f_2$, 则作为从 $\pi_1(X,x_0)$ 到 $\pi_1(Y,y_2)$ 的群同态, 我们有 $(f_2)_* = \Gamma_\lambda \circ (f_1)_*$. ♢

证明 任取 $[\gamma]_p \in \pi_1(X,x_0)$. 我们想要构造 $f_2 \circ \gamma$ 和 $\bar{\lambda} * (f_1 \circ \gamma) * \lambda$ 之间的一个道路同伦. 令

$$G : [0,1] \times [0,1] \to Y, \quad G(t,s) = F(t, \gamma(s)).$$

取 λ_t 为从 $\lambda(t)$ 到 $\lambda(1) = y_2$ 沿着 λ 的道路(对 λ 里相应的参数作线性重新参数化即可). 那么 $\bar{\lambda}_t * G(t,s) * \lambda_t$ 是从 $\bar{\lambda} * (f_1 \circ \gamma) * \lambda$ 到 $f_2 \circ \gamma$ 的一个道路同伦. □

¶ 基本群的同伦不变性

在推论3.4.6中我们证明了同胚的拓扑空间具有相同的基本群. 下面我们证明一个非常有用的定理, 即同伦等价的拓扑空间具有相同的基本群:

定理 3.4.12.（基本群的同伦不变性）

设 X, Y 是同伦等价的拓扑空间, 则 $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$. ♡

证明 设 $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to X$ 为同伦等. 从 $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$, 我们得到

$$\Gamma_\lambda \circ f_* \circ g_* = \mathrm{Id} : \pi_1(Y, f(x_0)) \to \pi_1(Y, f(x_0)),$$

从而由 Γ_λ 是群同构可知 f_* 是满射. 同理, $g \circ f \sim \mathrm{Id}_X$ 蕴含

$$\Gamma_{\tilde{\lambda}} \circ g_* \circ f_* = \mathrm{Id} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

因此 f_* 是单射. 所以 $f_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ 是群同构. □

因为弱形变收缩核同伦等价于原空间（见上节习题）, 我们得到

推论 3.4.13.（形变收缩 $\Longrightarrow$ 相同基本群）

若 A 是 X 的（弱）形变收缩核, 则 $\pi_1(A)$ 同构于 $\pi_1(X)$. ♡

特别地, 我们得到:

推论 3.4.14.（可缩 $\Longrightarrow$ 单连通）

任意可缩空间都是单连通的. ♡

3.5 圆与球的基本群及其应用

3.5.1 S^n（$n \geq 2$）的基本群

我们先计算 S^n（$n \geq 2$）的基本群. 设 $\gamma : [0,1] \to S^n$ 是 S^n 中的一个圈. 若 γ 不是满射，则由第 3.3 节的习题，γ 是零伦的. 然而，遗憾的是，利用空间填充曲线，我们不难构造出映满 S^n 的曲线，从而无法利用上述简单论证说明 S^n 是单连通的.

我们将采用开覆盖的方法计算 S^n（$n \geq 2$）的基本群. 为此我们证明

命题 3.5.1.（并集的单连通性）

如果 $X = U \cup V$, 其中 U, V 是 X 中的单连通开集，且 $U \cap V$ 是道路连通的，则 X 是单连通的.

证明 取 $x_0 \in U \cap V$ 作为基点. 令 $\gamma : [0,1] \to X$ 为任意以 x_0 为基点的圈. 由连续性 $\{\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V)\}$ 是 $[0,1]$ 的开覆盖，从而由 Lebesgue 数引理，

$$\exists 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1 \text{ 使得 } \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U \text{ 或 } V.$$

对于任意 i，取一条从 x_0 到 $\gamma(t_i)$ 的道路 λ_i，且使得：

- 若 $\gamma(t_i) \in U$，则取 $\lambda_i \subset U$；
- 若 $\gamma(t_i) \in V$，则取 $\lambda_i \subset V$
- （于是若 $\gamma(t_i) \in U \cap V$，则取 $\lambda_i \subset U \cap V$）.

因为 U, V 以及 $U \cap V$ 都是道路连通的，上述选取是可实现的. 令 γ_i 为沿着 γ 从 $\gamma(t_{i-1})$ 到 $\gamma(t_i)$ 的 (重新参数化后的) 道路. 则

$$\begin{aligned}
\gamma &\underset{p}{\sim} \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n \\
&\underset{p}{\sim} (\gamma_1 * \bar{\lambda}_1) * (\lambda_1 * \gamma_2 * \bar{\lambda}_2) * \cdots * (\lambda_{n-1} * \gamma_n) \\
&\underset{p}{\sim} \gamma_{x_0} * \gamma_{x_0} * \cdots * \gamma_{x_0} = \gamma_{x_0},
\end{aligned}$$

其中第三步我们用到了如下事实：每个圈 $\lambda_i * \gamma_{i+1} * \lambda_{i+1}^{-1}$ 都完全位于单连通空间 U 或 V 中，从而这些圈都道路同伦于常值圈. □

我们注意到 S^n（$n \geq 2$）可以被写成两个连通开集的并，即 $U = S^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\}$ 和 $V = S^n - \{0, \cdots, 0, -1\}$. 利用球极投影（见第 1.3 节习题）我们知道 U, V 均同胚于 $\mathbb{R}^n$，从而都是单连通的. 又因为当 $n \geq 2$ 时 $U \cap V = S^n - \{(0, \cdots, 0, \pm 1)$ 是道路连通的，所以我们得到

推论 3.5.2

当 $n \geq 2$ 时，$\pi_1(S^n) \cong \{e\}$.

因为 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 同伦等价于 S^{n-1}，由同伦不变性我们得到

推论 3.5.3

对任意 $n \geq 3$，有 $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq \{e\}$.

3.5.2 S^1 的基本群

¶ **计算 $\pi_1(S^1)$**

为了计算 $\pi_1(S^1)$，我们将 S^1 嵌入 $\mathbb{C}$ 中并取基点 $x_0 = 1$. 对于任意 $n \in \mathbb{Z}$，我们考虑如下“沿着 S^1 逆时针匀速旋转 n 周的圈”，

$$\gamma_n : [0,1] \to S^1, \quad t \mapsto e^{i\cdot 2\pi n t}.$$

我们要证明

定理 3.5.4.（S^1 的基本群）

$\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$，且 $\pi_1(S^1, x_0)$ 的生成元为 $[\gamma_1]_p$ 和 $[\gamma_{-1}]_p$.

为证明定理3.5.4，我们需要构造一个从 $\mathbb{Z}$ 到 $\pi_1(S^1, x_0)$ 的群同构. 显然定理3.5.4是如下命题的推论：

命题 3.5.5.（构造群同构）

定义

$$\Phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0), \quad n \mapsto [\gamma_n]_p,$$

则映射 Φ 是一个群同构.

证明的核心想法如下：首先注意到 S^1 同胚于商空间 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，商映射为

$$p : \mathbb{R} \to S^1, \quad x \mapsto e^{2\pi i x}.$$

因为直接在 S^1 上处理有一点麻烦, 我们将 S^1 上以 $x_0 = 1$ 为基点的对象（圈，道路同伦等）都“提升”为 $\mathbb{R}$ 上起点为 0 的对象（道路，同伦等）. **这样处理起来较容易，因为 $\mathbb{R}$ 是单连通的.** 例如，我们可以将 γ_n “提升”为 $\mathbb{R}$ 上起点为 0 的道路 $\widetilde{\gamma}_n$，使得以下图表可交换（即满足 $p \circ \widetilde{\gamma}_n = \gamma_n$）：

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I = [0,1] \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\gamma}_n"] \arrow[r, "\gamma_n"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

比较 γ_n 和 p 的表达式并注意到 $\widetilde{\gamma}_n(0) = 0$，我们得到“提升道路” $\widetilde{\gamma}_n$ 的表达式:

$$\widetilde{\gamma}_n(t) = nt.$$

证明 我们分三步证明 Φ 是群同构：

第一步. Φ 是群同态.

由定义，$\Phi(m+n)$ 是一个道路同伦等价类，它的一个代表元是 $\gamma_{m+n}(t) = e^{2\pi i(m+n)t}$. 为了将 γ_{m+n} 的“提升”同 γ_m 和 γ_n 各自的“提升”联系起来，我们引入平移映射

$$T_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + m.$$

因为道路 $\widetilde{\gamma}_{m+n}$ 与道路 $\widetilde{\gamma}_m * (T_m \circ \widetilde{\gamma}_n)$ 是 $\mathbb{R}$ 中具有相同的起点和相同的终点的道路，而

$\mathbb{R}$ 是单连通的，根据第 3.4 节习题，

$$\widetilde{\gamma}_{m+n} \underset{p}{\sim} \widetilde{\gamma}_m * (T_m \circ \widetilde{\gamma}_n).$$

因此

$$\gamma_{m+n} = p \circ \widetilde{\gamma}_{m+n} \underset{p}{\sim} p \circ (\widetilde{\gamma}_m * (T_m \circ \widetilde{\gamma}_n)) = \gamma_m * \gamma_n.$$

换言之，

$$\Phi(n+m) = [\gamma_{n+m}]_p = [\gamma_m * \gamma_n]_p = [\gamma_m]_p \cdot [\gamma_n]_p = \Phi(m) \cdot \Phi(n).$$

第二步. Φ 是满射.

令 $\gamma : [0,1] \to S^1$ 为任意满足 $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$ 的道路. 我们将会证明:

引理 3.5.6.（道路提升性质）

对于 S^1 中任意起点 $\gamma(0) = 1$ 的道路 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^1$，存在 $\mathbb{R}$ 中唯一一条起点为 $\widetilde{\gamma}(0) = 0$ 的道路 $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$，使得 $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$. ♢

先假设这是正确的，那么由 $1 = \gamma(1) = p \circ \widetilde{\gamma}(1)$ 可知 $\widetilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$，即

$$\exists n \in \mathbb{Z} \text{ 使得} \widetilde{\gamma}(0) = 0, \quad \widetilde{\gamma}(1) = n.$$

因为 $\mathbb{R}$ 是可缩的，我们得到 $\widetilde{\gamma} \underset{p}{\sim} \widetilde{\gamma}_n$. 令 $\widetilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 为一个连接 $\widetilde{\gamma}$ 和 $\widetilde{\gamma}_n$ 的道路同伦. 那么

$$F = p \circ \widetilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to S^1$$

是连接 γ 和 γ_n 的道路同伦. 因此 $[\gamma]_p = [\gamma_n]_p = \Phi(n)$.

第三步. Φ 是单射.

假设 $\Phi(n) = \Phi(m)$, 即存在一个连接 γ_n 和 γ_m 的道路同伦 $F : [0,1] \times [0,1] \to S^1$. 这次我们将该道路同伦从 S^1 "提升" 到 $\mathbb{R}$. 我们将会证明:

引理 3.5.7.（同伦提升性质）

(1) 对于 S^1 中任意具有固定起点 $F(s,0) \equiv 1$ 的同伦 $F : [0,1] \times [0,1] \to S^1$，存在 $\mathbb{R}$ 中唯一具有固定起点 $\widetilde{F}(s,0) \equiv 0$ 的同伦 $\widetilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$，使得 $p \circ \widetilde{F} = F$.

(2) 若同伦 F 是道路同伦，即还具有固定终点 $F(s,1) = x_0 \in S^1$，则 $\widetilde{F}$ 也是道路同伦，即存在 $x \in p^{-1}(x_0)$ 使得 $\widetilde{F}(s,1) \equiv x$. ♢

先假设这是正确的，则存在同伦 $\widetilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 使得 $p \circ \widetilde{F} = F$，于是我们有

$$p \circ \widetilde{F}(0,t) = \gamma_n(t), \qquad p \circ \widetilde{F}(1,t) = \gamma_m(t).$$

因为 $\widetilde{F}(0,0) = 0$ 且 $\widetilde{F}(1,0) = 0$, 由上面道路提升的唯一性，我们必有

$$\widetilde{F}(0,t) = \widetilde{\gamma}_n(t), \qquad \widetilde{F}(1,t) = \widetilde{\gamma}_m(t).$$

于是由同伦提升性质引理的第二部分，

$$n = \widetilde{\gamma}_n(1) = \widetilde{F}(0,1) = \widetilde{F}(1,1) = \widetilde{\gamma}_m(1) = m.$$

这就完成了证明. □

¶ 提升引理

我们记 $I=[0,1]$. 下面我们证明上面出现的道路提升与同伦提升性质. 我们将给出这两个性质的一个统一的证明，即证明下述更强的结果，即任意具有“初始提升”的连续映射 $F: P\times I\to S^1$ 可被唯一提升到 $\mathbb{R}$:

引理 3.5.8. （S^1 情形的提升引理）

设 P 是拓扑空间，$F: P\times I\to S^1$ 是连续映射. 若映射

$$F_0=F|_{P\times\{0\}}: P\times\{0\}\to S^1$$

可以被“提升”为连续映射 $\widetilde{F_0}: P\times\{0\}\to\mathbb{R}$，即 $p\circ\widetilde{F_0}=F_0$，则存在 F 的提升 (lifting) 映射 $\widetilde{F}: P\times I\to\mathbb{R}$，使得 $\widetilde{F_0}=\widetilde{F}|_{P\times\{0\}}$，且满足该条件的提升是唯一的. ♢

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ P\times\{0\} \arrow[ur, "\widetilde{F_0}"] \arrow[r, "F_0"] & S^1 \end{tikzcd} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ P\times I \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] \arrow[r, "F"] & S^1 \end{tikzcd}$$

在提升引理里分别取 P 为单点集和 $[0,1]$，即得道路提升性质和同伦提升性质:

证明 [引理3.5.6和引理3.5.7的证明]

取 P 为单点集，则条件 $\gamma(0)=1$ 及 $\tilde{\gamma}(0)=0$ 就是引理3.5.8中所需的“初始提升”. 类似地，取 $P=[0,1]$，则条件 $F(s,0)\equiv 1$ 以及 $\widetilde{F}(s,0)\equiv 0$ 正是引理3.5.8中所需的“初始提升”. 这就证明了引理3.5.6和引理3.5.7的前半部分.

对于引理3.5.7的后半部分，由 $p\circ\widetilde{F}(s,1)=F(s,1)\equiv x_0$ 可知 $\widetilde{F}(s,1)\in p^{-1}(x_0)$. 但是 $p^{-1}(x_0)$ 是完全不连通的，而 $[0,1]$ 在连续映射 $\widetilde{F}(\cdot,1)$ 下的像是连通的，故存在一个点 $x\in p^{-1}(x_0)$ 使得 $\widetilde{F}(s,1)\equiv x$. □

¶ 提升引理的证明

[证明背后的思想.] 我们想要构造一个提升，即满足条件 $p\circ\widetilde{F}=F$ 的映射 $\widetilde{F}$. 如果 p 是可逆的，那我们可以取 $\widetilde{F}=p^{-1}\circ F$. 但显然这里的 p 不是可逆的!

关键的观察: $\boxed{p \text{ 在“局部”是可逆的!}}$

具体来说，我们可以找到 S^1 的一个覆盖, 例如

$$\widehat{U}_1=S^1\setminus\{1\},\quad \widehat{U}_2=S^1\setminus\{-1\},$$

使得

- $p^{-1}(\widehat{U}_i)=\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}}V_j^i$ 是 $\mathbb{R}$ 中开集的不交并，其中
$$V_j^1:=(j-1,j),\quad V_j^2:=(j-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}).$$
- 对于任意 $i=1,2$ 以及 $j\in\mathbb{Z}$，$p_j^i:=p|_{V_j^i}: V_j^i\to U_i$ 都是同胚.

因此我们可以通过局部可逆性（即局部同胚 p_j^i）构造“局部提升”，然后再将它们“依次粘合起来”得到“整体提升”.

证明 我们再次把证明分成三步：

$\boxed{\textbf{第一步.}}$ 在 $s_0 \in P$ 附近的局部提升.

任取 $s_0 \in P$. 由 Lebesgue 数引理，存在一个划分

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n+1} = 1$$

使得 $F(\{s_0\} \times [t_i, t_{i+1}])$ 要么包含于 $\widehat{U}_1$，要么包含于 $\widehat{U}_2$. 再由管形领域引理，存在 s_0 的开邻域 V，使得 $F(V \times [t_i, t_{i+1}])$ 要么包含于 $\widehat{U}_1$，要么包含于 $\widehat{U}_2$. 为了陈述的简单性起见，对于任意 $0 \leq i \leq n$，我们记

$$U_i = \begin{cases} \widehat{U}_1, & \text{如果 } F(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subset \widehat{U}_1, \\ \widehat{U}_2, & \text{如果 } F(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subset \widehat{U}_2. \end{cases}$$

类似地，我们也将对应的 V_j^i 和 p_j^i 的指标改变为 $0 \leqslant i \leqslant n, j \in \mathbb{Z}$. 因为

$$p \circ \widetilde{F}_0(s_0, 0) = F_0(s_0, 0) = F(s_0, 0) \subset U_0,$$

必然存在 $j \in \mathbb{Z}$ 使得 $\widetilde{F}_0(s_0, 0) \subset V_j^0$. 由连续性，存在 s_0 的开邻域 $V_0 \subset V$，使得

$$\widetilde{F}_0(V_0, 0) \subset V_j^0.$$

现在定义(第一段局部提升)

$$\widetilde{F_1} = (p_j^0)^{-1} \circ F : V_0 \times [0, t_1] \to V_j^0.$$

因为

- F 在 $V_0 \times [0, t_1]$ 上是连续的，
- $F(V_0 \times [0, t_1]) \subset U_0$，且 $p_j^0 : V_j^0 \to U_0$ 是同胚.

所以 $\widetilde{F}_1$ 是连续的，此外，对于 $\forall s \in V_0$，都有

- $\widetilde{F}_0(s, 0) \in V_j^0$，$\widetilde{F}(s, 0) \in V_j^0$，
- $p_j^0 \circ \widetilde{F}_0(s, 0) = F_0(s, 0) = F(s, 0) = p_j^0 \circ \widetilde{F}_1(s, 0)$.

于是 $\widetilde{F}_0(s, 0) = \widetilde{F}_1(s, 0)$，即 $\widetilde{F}_1|_{V_0 \times \{0\}} = \widetilde{F}_0|_{V_0 \times \{0\}}$.

接着我们用“新的初值” $\widetilde{F}_1|_{V_0 \times \{t_1\}}$ 取代“旧的初值” $\widetilde{F}_0|_{V_0 \times \{0\}}$，继续这一构造，可以得到 s_0 的开邻域 $V_1 \subset V_0$ 和一个定义在 $V_1 \times [0, t_2]$ 上的连续映射 $\widetilde{F}_2$，使得在 $V_1 \times [0, t_2]$ 上有 $p \circ \widetilde{F} = F$，并且 $\widetilde{F}_2|_{V_1 \times \{0\}} = \widetilde{F}_0|_{V_1 \times \{0\}}$.

具体构造方法如下：因为 $p \circ \widetilde{F}_1(s_0, t_1) = F(s_0, t_1) \in U_1$，所以存在 $j \in \mathbb{Z}$ 使得 $\widetilde{F}(s_0, t_1) \in V_j^1$. 于是存在 s_0 的开邻域 $V_1 \subset V_0$，使得 $\widetilde{F}_1(V_1, t_1) \subset V_j^1$. 定义

$$\widetilde{F}_2 = (p_j^1)^{-1} \circ F : V_1 \times [t_1, t_2] \to V_j^1 \subset \mathbb{R}.$$

和之前一样，可以验证 $\widetilde{F}_2$ 是连续的，并且 $\widetilde{F}_2|_{V_1 \times \{t_1\}} = \widetilde{F}_1|_{V_1 \times \{t_1\}}$. 于是由粘结引理，$\widetilde{F}_2$ 和 $\widetilde{F}_1|_{V_1 \times [0, t_1]}$ 可以粘接成一个新的连续映射，仍记为

$$\widetilde{F}_2 : V_1 \times [0, t_2] \to \mathbb{R}$$

它是 $F|_{V_1 \times [0, t_2]}$ 的提升，且 $\widetilde{F}_2|_{V_1 \times \{0\}} = \widetilde{F}_0|_{V_1 \times \{0\}}$.

重复相同的构造，我们最终得到 s_0 的一个开邻域 $\widetilde{V}$ 以及连续映射 $\widetilde{F} : \widetilde{V} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$，使得 $\widetilde{F}|_{\widetilde{V} \times \{0\}} = \widetilde{F}_0|_{\widetilde{V} \times \{0\}}$，且 $\widetilde{F}$ 是 $F|_{\widetilde{V} \times [0,1]}$ 的一个提升，即

$$p \circ \widetilde{F} = F|_{\widetilde{V} \times [0,1]}.$$

$\boxed{\textbf{第二步.}}$ P 是单点集时提升的存在唯一性.

假设 P 是一个单点集，此时 F 为映射 $F:[0,1]\to S^1$. 由第一步, F 可以被提升为 $\widetilde{F}:[0,1]\to\mathbb{R}$. 为了证明这个提升的唯一性，我们假设 $\widetilde{F}':[0,1]\to\mathbb{R}$ 是另一个提升，则 $\widetilde{F}(0)=\widetilde{F}_0(0)=\widetilde{F}'(0)$. 我们采用连通性论证. 记 $S=\{t\in[0,1]\mid \widetilde{F}(t)=\widetilde{F}'(t)\}$. 则

- $S\neq\emptyset$，因为 $0\in S$.
- S 是闭集，因为 $\widetilde{F}$ 和 $\widetilde{F}'$ 都是连续的.
- S 是开集：设 $t_0\in S$，即 $\widetilde{F}(t_0)=\widetilde{F}'(t_0)$. 不妨设 $F(t_0)\in\widehat{U}_1$ 且 $\widetilde{F}(t_0)=\widetilde{F}'(t_0)\in V_j^1$. 则由连续性，存在 t_0 的开邻域 T_0 使得

$$F(T_0)\subset\widehat{U}_1,\quad \widetilde{F}(T_0)\subset V_j^1,\quad \text{且}\quad \widetilde{F}'(T_0)\subset V_j^1.$$

  于是由 $p:V_j^1\to\widehat{U}_1$ 是同胚以及 $p\circ\widetilde{F}=p\circ\widetilde{F}'$ 可知 $T_0\in S$.

所以由区间的连通性得 $S=[0,1]$，即在整个 $[0,1]$ 上，都有 $\widetilde{F}=\widetilde{F}'$.

$\boxed{\textbf{第三步.}}$ 一般 P 时提升的存在性和唯一性.

我们在第一步中证明了对于任意 $s\in P$, 存在 P 中的 s 的开邻域 V_s 以及 $F_s=F|_{V_s\times I}$ 的“提升” $\widetilde{F}_s:V_s\times I\to\mathbb{R}$，使得

$$\widetilde{F}_s|_{V_s\times\{0\}}=\widetilde{F}_0|_{V_s\times\{0\}}.$$

现在假设 $s_0\in V_{s_1}\cap V_{s_2}$. 那么

$$\widetilde{F}_{s_1,s_0}:=\widetilde{F}_{s_1}|_{\{s_0\}\times I}:I\to\mathbb{R}\qquad\text{和}\qquad \widetilde{F}_{s_2,s_0}:=\widetilde{F}_{s_2}|_{\{s_0\}\times I}:I\to\mathbb{R}$$

都是 $F_{s_0}=F|_{\{s_0\}\times I}:I\to S^1$ 的提升，并且

$$\widetilde{F}_{s_1,s_0}(0)=\widetilde{F}_0(s_0,0)=\widetilde{F}_{s_2,s_0}(0).$$

于是由第二步, $\widetilde{F}_{s_1,s_0}=\widetilde{F}_{s_2,s_0}$. 因此如果我们定义 $\widetilde{F}:P\times I\to\mathbb{R}$ 为对每个 $s\in P$ 都满足

$$\widetilde{F}|_{V_s\times I}=\widetilde{F}_s$$

的映射，那么由粘接引理，$\widetilde{F}$ 是良定的连续映射. 由构造，它是 F 的提升，且在“初值” $P\times\{0\}$ 上跟给定的初始提升 $\widetilde{F}_0$ 一致.

最后，这样的提升必然是唯一的，因为如果 $\widetilde{F}$ 和 $\widetilde{F}'$ 是 F 的两个提升，那么对于每个 $s\in P$, $\widetilde{F}|_{\{s\}\times I}$ 和 $\widetilde{F}'|_{\{s\}\times I}$ 都是 $F|_{s\times\{0\}}$ 的提升，从而由第二步，它们是相同的. $\square$

3.5.3 S^n 基本群的应用

$\pi_1(S^1)$ 不仅是我们遇到的第一个非平凡的基本群，而且也是最重要的基本群.

¶ 计算简单空间的基本群

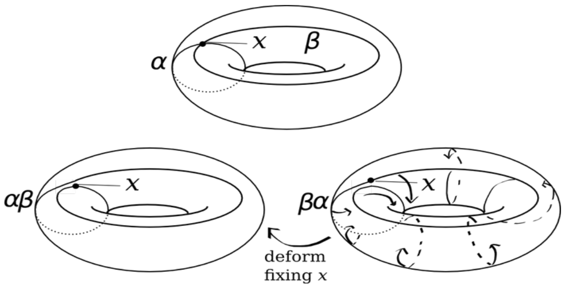
根据基本群的保乘积性，我们可以算出很多基本群，例如我们有

$$\pi_1(S^1\times\mathbb{R}^n)\simeq\mathbb{Z},\ \forall n$$

以及

$$\pi_1(\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{r})\simeq\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{r},\qquad\forall r.$$

注意到 $\pi_1(S^1\times S^1)\simeq\mathbb{Z}^2$，即 $S^1\times S^1$ 的基本群是一个由两个生成元生成的交换群. 下图给出了这两个生成元并说明了为什么它们是交换的：



类似的，基本群的同伦不变性也是计算基本群的重要工具. 例如，

$$\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\simeq\mathbb{Z},\ \forall n\geq 2.$$

右图展示了 Möbius 带的“中心圆”是 Möbius 带的形变收缩核，故 Möbius 带同伦等价于 S^1，从而

$$\pi_1(\text{Möbius 带})\simeq\mathbb{Z}.$$

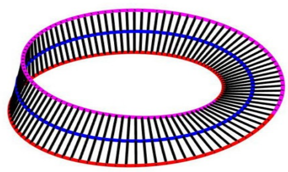


图 3.2: Möbius 带

¶ 区分拓扑空间

基本群作为拓扑不变量，被广泛应用于区分不同的拓扑空间. 例如

$$\pi_1(S^1\times S^2)\cong\mathbb{Z},\qquad \pi_1(S^3)\cong\{e\}$$

蕴含了 $S^1\times S^2\not\simeq S^3$（见第 1.4 节末尾）. 下面我们证明

命题 3.5.9. ($\mathbb{R}^2\not\simeq\mathbb{R}^n(n\geq 3)$)

对于任意 $n\geqslant 3$，$\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^2$ 是不同胚的.

证明 假设 $\mathbb{R}^n\simeq\mathbb{R}^2$, 那么由习题 1.3，我们有 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\simeq\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. 但是

$$\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\sim S^{n-1},\quad \mathbb{R}^2\setminus\{0\}\sim S^1$$

从而 $\pi_1(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})=\{e\},\pi_1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})\simeq\mathbb{Z}$, 矛盾！ □

注 3.5.10. 注意到

- 用道路连通性 (即 π_0)，可以证明：对 $n\geqslant 2$，$\mathbb{R}$ 不同胚于 $\mathbb{R}^n$.
- 用 π_1, 我们证明了：对 $n\geqslant 3$，$\mathbb{R}^2$ 不同胚于 $\mathbb{R}^n$.
- 一般情况下，用 π_k 可以证明：对 $n\geqslant k+1$，$\mathbb{R}^k$ 不同胚于 $\mathbb{R}^n$.

因为 $S^n\setminus\{pt\}$ 同胚于 $\mathbb{R}^n$，作为推论，我们得到

推论 3.5.11. ($S^2\not\simeq S^n(n\geq 3)$)

对于任意 $n\geqslant 3$，S^n 和 S^2 是不同胚的.

¶ 非收缩核

设 $A \subset X$ 是 X 的收缩核，且 $r: X \to A$ 是收缩映射，则由定义，

$$r \circ \iota = \mathrm{Id}_A,$$

其中 $\iota: A \hookrightarrow X$ 为包含映射. 任取 $a \in A$. 根据 π_1 的函子性，我们得到

$$r_* \circ \iota_* = \mathrm{Id}_{\pi_1(A,a)}: \pi_1(A,a) \to \pi_1(A,a).$$

由此我们得到

命题 3.5.12.（收缩映射诱导基本群之间的满同态）
如果存在收缩映射 $r: X \to A$，那么对于任意 $a \in A$，$r_*: \pi_1(X,a) \to \pi_1(A,a)$ 是满同态，而 $\iota_*: \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$ 是单同态. ♠

利用这个性质，我们可以通过 π_1 证明一个子空间不是全空间的收缩核：

命题 3.5.13.（圆盘不能收缩至边界圆）
单位圆周 S^1 不是闭单位圆盘 $\overline{D}$ 的收缩核. ♠

证明 用反证法. 如果存在收缩映射 $r: \overline{D} \to S^1$，则存在满同态

$$r_*: \{e\} \cong \pi_1(\overline{D}) \to \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z},$$

而这是不可能的. □

类似地可以证明：S^1 (作为赤道) 不是 S^2 的收缩核，或者更一般地，只要 $A \subset X$ 且 A 的基本群 “大于” X 的基本群，则 A 不可能是 X 的基本群.

事实上，即使 A 的基本群 “不大于” X 的基本群，也有可能通过基本群的运算规则判定 A 不是 X 的收缩核：

命题 3.5.14.（Möbius 带不能收缩至边界圆）
Möbius 带的边界圆周（见上页的图）不是 Möbius 带的收缩核. ♠

证明 设 M 是 Möbius 带，B 是它的 “边界圆周” 而 C 是它的 “中心圆”. 记将 M 中的点沿着图中 “纤维” 方向映到 C 中的收缩映射为 f, 则 $f(B)$ 为绕 C 两圈的满射. 令 $\iota: B \to M$ 为包含映射，则诱导映射 ι_* 为

$$\iota_*: \pi_1(B) \simeq \mathbb{Z} \to \pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}.$$

通过合适地选取生成元，我们有 $\iota_*(1) = 2$. 如果存在一个收缩映射 $r: M \to B$，那么 $r \circ i = \mathrm{Id}$ 蕴含着 $r_*(2) = 1$，从而 r_* 不是从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的群同态，矛盾. □

¶ Brouwer 不动点定理 ($n = 2$)

依然记平面上的单位闭圆盘为 $\overline{D}$. 下面我们证明

定理 3.5.15.（Brouwer 不动点定理, $n = 2$）
对于任意连续映射 $f: \overline{D} \to \overline{D}$, 存在 $p \in \overline{D}$ 使得 $f(p) = p$. ♡

证明 假设存在连续映射 $f : \overline{D} \to \overline{D}$ 使得对于任意 $p \in \overline{D}$，都有 $f(p) \neq p$. 那么我们令

$$r(p) = \text{“}S^1\text{与射线}\overline{f(p)p}\text{的交点”}.$$

则 $r : \overline{D} \to S^1$ 是一个从 $\overline{D}$ 到 S^1 的收缩映射，这跟命题3.5.13矛盾. $\square$

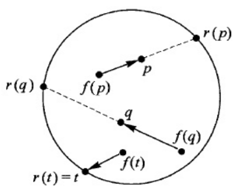


图 3.3: 收缩映射 r

¶ 代数基本定理.

下面我们用基本群证明著名的代数基本定理[9]：

定理 3.5.16.（代数基本定理）

设 $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ 为一个复系数的多项式，则存在 $z_0 \in \mathbb{C}$ 使得 $p(z_0) = 0$. ♡

证明 假设多项式 p 没有根，则 $a_0 \neq 0$. 我们考虑连续映射

$$f : S^1 \to S^1, \quad z \mapsto p(z)/|p(z)|.$$

则 f 通过同伦

$$F : [0,1] \times S^1 \to S^1, \quad (t,z) \mapsto p(tz)/|p(tz)|.$$

与常值映射

$$f_0 : S^1 \to S^1, \quad f_0(z) \equiv a_0/|a_0|$$

同伦等价，从而 f 是零伦的. 于是由引理3.4.11，f 诱导的群同态 $f_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ 是“零”同态，即对于所有的 $m \in \mathbb{Z} \simeq \pi_1(S^1)$，都有 $f_*(m) = 0$ 成立.

另一方面，f 同伦于映射

$$f_1 : S^1 \to S^1, \quad z \mapsto z^n,$$

因为它们之间有同伦[10]

$$G : [0,1] \times S^1 \to S^1, \quad (t,z) \mapsto \frac{z^n + a_{n-1}tz^{n-1} + \cdots + a_1 t^{n-1} z + a_0 t^n}{|z^n + a_{n-1}tz^{n-1} + \cdots + a_1 t^{n-1} z + a_0 t^n|}.$$

然而，因为 $f_1(\gamma_1) = \gamma_n$，它所诱导的群同态 $(f_1)_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(S^1)$ 由 $(f_1)_*(1) = n$ 给出，从而 f_* 不是零同态，矛盾. $\square$

---

[9]代数基本定理最早由出生于法国的荷兰数学家吉拉德（Albert Girard，1595-1632）在 1629 年提出. 直到 1746 年法国数学家达朗贝尔（Jean d'Alembert，1717-1783）才给出了该定理的第一个证明，但遗憾的是，他的证明并不完整. 之后有很多数学家都曾经试图证明代数基本定理，包括欧拉（1749），佛朗索瓦（1759），拉格朗日（1772），拉普拉斯（1795），伍德（1798），高斯（1799）等，不过这些证明也都是有瑕疵的. 该定理的第一个完整证明是由业余数学家阿尔冈（Jean-Robert Argand, 1768-1822）在 1806 年给出，之后高斯又给出了三个不同证明（1816 年两个，1849 年），并称之为“代数方程的基本定理”. 迄今，人们陆续给出了该定理的上百种不同证明，而所有这些证明都或多或少地涉及到实函数或者复函数的“连续性”这一拓扑概念. 所以在 Aigner 和 Ziegler 所著的《数学天书中的证明》（第 (≥ 5) 版）中，作者写道：“代数基本定理并不真的基本，它也不必是一个定理（因为有时候它是作为定义出现的），而且它的原始形式也不是一个关于代数的结果，而是一个关于分析的定理”.

[10]注意：分母是连续的，在 $t = 0$ 时分母是非零的，在 $t \neq 0$ 时分母也是非零的，因为此时它等于 $t^n p(z/t)$：换言之，$G(t,z) = p(z/t)/|p(z/t)|$，于是当 $t \to 0$ 时我们实际上在考虑 p 在“无穷远”处的性态.

¶ 阅读材料：Borsuk-Ulam 定理 ($n=2$)

在推论3.1.11中我们用连通性（即 π_0）证明了一维 Borsuk-Ulam 定理，即

任给连续映射 $f: S^1 \to \mathbb{R}$, 都存在 $x_0 \in S^1$ 使得 $f(x_0) = f(-x_0)$.

下面我们使用 π_1 证明二维 Borsuk-Ulam 定理：

定理 3.5.17.（Borsuk-Ulam 定理，$n=2$）

对于任意连续映射 $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$, 存在 $x_0 \in S^2$ 使得 $f(x_0) = f(-x_0)$. ♡

证明 假设结论不成立, 即存在连续映射 $f: S^2 \to \mathbb{R}^2$, 使得对于任意 x, 有 $f(x) \neq f(-x)$. 定义一个映射 $g: S^2 \to S^1$ 为

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

则 g 是连续的，并且 g 保持对径点，即 $g(-x) = -g(x)$.

令 $\iota: S^1 \to S^2$ 为 "将赤道嵌入球面" 的包含映射，并且令 $h := g \circ \iota : S^1 \to S^1$. 在将 h 复合一个简单的旋转后，我们不妨设 $h(1) = 1$. 于是对于任意的 $[\gamma]_p \in \pi_1(S^1, 1)$,

$$h_*([\gamma]_p) = [h \circ \gamma]_p = [g \circ \iota \circ \gamma]_p = g_*([\iota \circ \gamma]_p) = g_*(e) = e.$$

根据本节习题，h 可以被提升到一个连续映射 $\tilde{h}: S^1 \to \mathbb{R}$. 注意到 h 是保持对径点的，即 $h(-x) = -h(x)$. 因此对于任意的 $x \in S^1$,

$$p \circ \tilde{h}(-x) = h(-x) = -h(x) = -p \circ \tilde{h}(x).$$

由此可得 $\tilde{h}(-x) - \tilde{h}(x) \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, 因此由连通性，存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\tilde{h}(-x) - \tilde{h}(x) = m + \frac{1}{2}, \qquad \forall x \in S^1.$$

最后我们令 $F(x) = \tilde{h} \circ p(x)$，则对于任意的 $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x + \frac{1}{2}) = \tilde{h} \circ p(x + \frac{1}{2}) = \tilde{h}(-p(x)) = \tilde{h}(p(x)) + m + \frac{1}{2} = F(x) + m + \frac{1}{2}.$$

从而我们得到

$$F(1) = F(\frac{1}{2}) + m + \frac{1}{2} = F(0) + 2m + 1 \neq F(0),$$

这跟 $p(0) = p(1)$ 矛盾. □

作为 Borsuk-Ulam 定理的推论，不存在从 S^2 到 $\mathbb{R}^2$ 的连续单射，于是我们得到

推论 3.5.18.（S^2 不同胚于 $\mathbb{R}^2$ 的子集）

$\mathbb{R}^2$ 中没有同胚于 S^2 的子集. ♡

注 3.5.19. 用高阶的不变量例如同伦群 π_k 或同调群，可以证明高维 Borsuk-Ulam 定理：

定理 3.5.20.（Borsuk-Ulam 定理）

对于任意连续映射 $f: S^n \to \mathbb{R}^n$, 存在 $x_0 \in S^n$ 使得 $f(x_0) = f(-x_0)$. ♡

该定理最早由 Ulam[11] 所猜测，并在 1933 年被 Borsuk[12]证明. 该定理有很多等价形式，如

- 不存在一个保持对径点的连续映射 $f : S^n \to S^{n-1}$.
- 对于任意保持对径点的连续映射 $f : S^n \to \mathbb{R}^n$, 存在 $x_0 \in S^n$ 使得 $f(x_0) = 0$.
- 不存在连续映射 $f : B^n \to S^{n-1}$ 使得 f 限制到边界 S^{n-1} 上是保持对径点的.
- 令 $F_1, F_2, \cdots, F_{n+1}$ 为 S^n 的一个闭覆盖，那么存在 $1 \leqslant i \leqslant n+1$ 使得 $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$.
- 令 $U_1, U_2, \cdots, U_{n+1}$ 为 S^n 的一个开覆盖，那么存 $1 \leqslant i \leqslant n+1$ 使得 $U_i \cap (-U_i) \neq \emptyset$.

上面最后两条一般被称为 Lusternik-Schnirelmann-Borsuk 定理，最早由前苏联数学家 Lusternik 和 Schnirelmann 在 1930 年证明. 此外，Borsuk-Ulam 定理定理跟组合学中的 Tucker 引理也等价. 关于 Borsuk-Ulam 定理及其应用，尤其是在组合和几何中的应用，可参见 J. Matousek，Using the Borsuk-Ulam Theorem，Springer-Verlag, 2002.

¶ 烙饼定理

作为二维 Borsuk-Ulam 定理的应用，我们证明如下的烙饼定理（Pancake Theorem）:

推论 3.5.21.（烙饼定理） 任给 $\mathbb{R}^2$ 中两个有界可测集，存在一条直线将每个集合都平分成测度相等的两部分. ♡

证明 [证明摘要.] 对于 $u = (u_0, u_1, u_2) \in S^2$, 如果 u_1 或 $u_2 \neq 0$, 那么记

$$L_u = \{(x_1, x_2) | u_1x_1 + u_2x_2 < u_0\};$$

如果 $u = (\pm 1, 0, 0)$, 那么记

$$L_{(1,0,0)} = \mathbb{R}^2, \quad L_{(-1,0,0)} = \emptyset.$$

将两个集合记为 A 和 B. 我们可以验证映射

$$f : S^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad u \mapsto (\mathrm{area}(A \cap L_u), \mathrm{area}(B \cap L_u))$$

是连续的. 因此存在 $u^0 = (u_0^0, u_1^0, u_2^0) \in S^2$ 使得 $f(u) = f(-u)$, 蕴含了直线

$$u_1^0x_1 + u_2^0x_2 = u_0^0$$

将每个集合分割为测度相等的两部分. □

类似地，用 n 维版本的 Borsuk-Ulam 定理，可以证明

推论 3.5.22 任给 $\mathbb{R}^n$ 中 n 个有界可测集，存在一个超平面将每个集合都平分成测度相等的两部分. ♡

当 $n = 3$ 时该推论就是所谓的“火腿三明治定理”(Ham-Sandwitch Theorem).

---

[11] 乌拉姆（Stanislaw Ulam，1909-1984），波兰数学家、核物理学家，曾参与曼哈顿计划. 在纯数学方面，他主要研究集合论、拓扑学、遍历论等. 他是波兰利沃夫学派重要成员，该学派 1930-1940 年代在利沃夫（Lvov，现属乌克兰）的苏格兰咖啡馆讨论数学问题（主要是泛函分析和拓扑学方面），这些问题后来被集结成册，即《苏格兰咖啡馆数学问题集》，共 193 个问题，其中有 40 个是 Ulam 提出的，另有 26 个是 Ulam 跟别的数学家共同提出的.

[12] 博苏克（Karol Borsuk，1905-1982），波兰数学家，主要研究拓扑学和泛函分析.

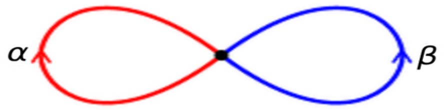
3.6 Van Kampen 定理

在上一节开头，我们通过用两个单连通开集覆盖 S^n 的方法证明了 $\pi_1(S^n)=\{e\}$. 今天我们将会把这种方法拓展到这些开集不必单连通甚至开集个数有很多的情形.

3.6.1 一些群论

¶ $S^1 \vee S^1$ 的基本群

我们考虑以下 "8 字形"$S^1 \vee S^1$:



几何上看，显然 $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ 是由两个生成元生成的，将它们分别记为 $[\alpha]$ 和 $[\beta]$，如上图所示. 然而此时它们没有理由是交换的（即未必有 $[\alpha][\beta]=[\beta][\alpha]$），因为从直觉上看，我们没法将圈 α "移动" 到圈 β. 因此，由乘积 $[\alpha]^3[\beta]^2[\alpha]^{-2}$ 的所表示的圈是先沿着 α 绕三圈，然后沿着 β 绕两圈，最后再沿着 α 反向绕两圈. 它不同于由 $[\alpha][\beta]^2$ 所表示的环路. 更一般地，任何 (有限长的) 由 $[\alpha],[\beta],[\alpha]^{-1}$ 和 $[\beta]^{-1}$ 组成的字都代表了 "8 字形" $S^1 \vee S^1$ 中的一个圈，并且除了平凡的消去关系如

$$[\alpha]^m([\alpha]^{-1})^n=[\alpha]^{m-n}$$

外，不同的字代表了不同 (伦) 的圈. 因此 $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ 的基本群不再是群的直积 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, 而应当是 $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$, 两个 $\mathbb{Z}$ 的**自由积**. 下面我们简要给出自由积的定义和基本性质.

¶ 自由群

我们定义

定义 3.6.1.（自由群）

给定任意集合 S, 我们记 $S^{-1}=\{c^{-1}:c\in S\}$，并称

$$\langle S\rangle=\{c_1c_2\cdots c_n \mid n\geq 0, c_i\in S\cup S^{-1}\}$$

中的元素为由 S 中的字母生成的**字**（word). 我们赋予 $\langle S\rangle$ 群结构:

- 群的乘法运算定义为 $c_1c_2\cdots c_n \cdot c_{n+1}\cdots c_{n+m}:=c_1c_2\cdots c_nc_{n+1}\cdots c_{n+m}$,
- 群的单位元定义为 "空字"，用 e 或 1 表示，
- 群的逆运算为 $(c_1c_2\cdots c_n)^{-1}:=c_n^{-1}\cdots c_2^{-1}c_1^{-1}$，其中我们规定 $(c^{-1})^{-1}=c$.

这样得到的群 $\langle S\rangle$ 被称为由集合 S 生成的**自由群** (free group). ♣

根据定义，除了上面列出来的乘法和取逆外，$\langle S\rangle$ 中仅有的 "运算关系" 为诸如

$$c^m(c^{-1})^n=c^{m-n}$$

之类的消去关系.

例 3.6.2.

(1) 如果 $S = \{a, b, c\}$, 那么字

$$abbba^{-1}a^{-1}ccb^{-1} \cdot aa^{-1}bbb = abbba^{-1}a^{-1}ccb^{-1}aa^{-1}bbb = ab^3(a^{-1})^2c^2b^2 \in \langle S\rangle,$$

这里我们用到了 $b^{-1}aa^{-1}b = b^{-1}b = e \in \langle S\rangle$.

(2) 如果 $S = \{c\}$, 那么 $\langle S\rangle \simeq \mathbb{Z}$，因为

$$\langle S\rangle = \{c^n \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

且群结构恰由 $c^n \cdot c^m = c^{n+m}$ 给出.

自由群 $\langle S\rangle$ 最重要的性质是如下的泛性质，该性质常常被用于作为自由群的定义：

命题 3.6.3. （自由群的泛性质）

任给群 G 和映射 $f : S \to G$, 存在唯一的群同态

$$\varphi : \langle S\rangle \to G$$

使得如果我们记 $i : S \hookrightarrow \langle S\rangle$ 为包含映射，则

$$f = \varphi \circ i.$$

$$\begin{tikzcd} \langle S\rangle \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\ S \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "f"'] & G \end{tikzcd}$$

作为推论，对于任意群 G 和它任一生成元集 S(可以取 $S = G$), 都存在唯一的满同态 $\varphi : \langle S\rangle \to G$，于是

命题 3.6.4. （任意群是自由群的商）

任意群都同构于某个自由群 $\langle S\rangle$ 的商

$$G \cong \langle S\rangle / \ker\varphi.$$

¶ 群的表现

群同态 $\varphi : \langle S\rangle \to G$ 的核是自由群 $\langle S\rangle$ 的一个正规子群，且我们可以视 G 为在 $\langle G\rangle$ 中将所以 $\ker(\varphi)$ 中的元素等同于单位元而得到群. 当然，因为 $\ker(\varphi)$ 是一个群，所以只要将 $\ker(\varphi)$ 的一组生成元等同于单位元就够了. 这样"将某些群元素等同于单位元"所给出的方程被称作**关系** (relation). 于是，任何一个群都可以用生成元和关系来表示：

$$G = \langle S \mid R\rangle,$$

其中 S 是一组生成元，而 R 是形如 $s_1 \cdots s_n = 1$ 的方程构成的一组关系. 这种表示方法被称为群 G 的一个**表现** (presentation). 当然，对于任何一个群，它的表现都是不唯一的. 在具体问题中，一般会尽量选取尽可能少的生成元集和关系集.

反之，任给一个具有表现 $\langle S|R\rangle$ 的群 G，其中 S 是生成元集，R 是关系集，我们可以将群 G 写成商群

$$G = \langle S\rangle / N,$$

其中，N 是由 R 生成的 $\langle S\rangle$ 中的最小正规子群.

例 3.6.5.

(1) 令 $G = \mathbb{Z}_n$. 那么 G 由单个元素 a 生成. 令 $\langle S\rangle = \langle a\rangle \simeq \mathbb{Z}$. 那么满同态由

$$\varphi : \langle S\rangle \to G,\ a^k \mapsto [k],$$

给出，它的核 $\ker\varphi = \{\cdots, a^{-2n}, a^{-n}, 1, a^n, a^{2n}, \cdots\}$ 为由 a^n 生成的子群. 因此

$$\mathbb{Z}_n = \langle a \mid a^n = 1\rangle.$$

(2) 对于 $G = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, 它是两个生成元生成的交换群，从而有

$$\mathbb{Z}^2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1\rangle.$$

¶ 群的自由积

接下来我们定义群的自由积.

定义 3.6.6. (群的自由积)

设 G, H 为两个群. 我们称 (形式上的) 乘积

$$g = g_1g_2\cdots g_n, \qquad (\text{其中 } s_i \in G \text{ 或 } H，\text{且 } n \geq 0)$$

为一个**字** (word). 全体字组成的集合形成了一个群

$$G * H = \{g_1g_2\cdots g_n \mid g_i \in G \text{ 或} H\},$$

其中群的运算跟自由群一样，分别为“字的连接”和“反转取逆”. 我们称这个群为 G 和 H 的**自由积** (free product). ♣

类似地，我们可以定义一族群 G_α 的**自由积**为

$$*_\alpha G_\alpha = \{g_1g_2\cdots g_n \mid \text{对任意}i,\ \text{存在}\alpha \text{ 使得}g_i \in G_\alpha\}.$$

由定义可知，如果 $G_\alpha = \langle S_\alpha | R_\alpha\rangle$, 那么 $*_\alpha G_\alpha = \langle \cup_\alpha S_\alpha | \cup_\alpha R_\alpha\rangle$.

例 3.6.7.

(1) $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a, b\rangle$. (因此交换群的自由积有可能是非交换的.)

(2) $\langle a \mid a^3 = 1\rangle * \langle b \mid b^4 = 1\rangle = \langle a, b \mid a^3 = b^4 = 1\rangle$. (因此有限群的自由积可能无限.)

(3) $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1\rangle = \{1, a, b, ab, ba, aba, bab, abab, \cdots\}$.

(4) 对于任意集合 S，$\langle S\rangle = *_{s\in S}\mathbb{Z}$.

群 G_α 的自由积 $*_\alpha G_\alpha$ 具有如下泛性质:

命题 3.6.8. (自由积的泛性质)

对于任意群 H 和一族群同态 $\varphi_\alpha : G_\alpha \to H$, 存在唯一的群同态

$$\varphi : *_\beta G_\beta \to H,$$

使得对于任意 $g_k \in G_{\alpha_k}$, 都有

$$\varphi(g_1\cdots g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1)\cdots\varphi_{\alpha_n}(g_n). \tag{*}$$

♠

$$\begin{tikzcd} *_\beta G_\beta \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\ G_\alpha \arrow[u, hook, "i_\alpha"] \arrow[r, "\varphi_\alpha"'] & H \end{tikzcd}$$

注意我们可以用 (*) 去定义提升的群同态 $\varphi : *_\beta G_\beta \to H$.

¶ 群的融合自由积

更一般地，设 F, G, H 为三个群，而

$$\varphi : F \to G, \quad \psi : F \to H$$

为两个群同态. 令 N 为 $G * H$ 中包含所有形如

$$\varphi(a)\psi(a)^{-1},\ a \in F$$

的元素的最小正规子群.

定义 3.6.9.（群的融合自由积）

我们称群

$$G *_F H := G * H/N$$

为 G 和 H 相对于群同态 φ 和 ψ 的**融合自由积** (free product with amalgamation). ♣

设 S 是 F 的一个生成元集. 根据定义，$G *_F H$ 是自由积 $G * H$ 模掉所有关系

$$\varphi(a)\psi(a)^{-1} = 1, \forall a \in S$$

后得到的商群.

例 3.6.10.

(1) 假设 $G = \langle a \rangle, H = \langle b \rangle, F = \langle c \rangle$. 那么 G 和 H 相对于同态

$$\varphi : F \to G,\ c \mapsto a^3, \qquad \text{以及} \qquad \psi : F \to H,\ c \mapsto b^4$$

的融合自由积是 $G *_F H = \langle a, b \mid a^3 \cdot b^{-4} = 1 \rangle$

(2) 我们有

- $\{e\} *_F \{e\} = \{e\}$,
- $G *_{\{e\}} H = G * H$,
- 相对于恒等同态：$G *_G G = G$,
- 相对于同态 $\varphi : F \to G$：$G *_F \{e\} = G/N$, 其中 N 是由 $\mathrm{Im}(\varphi : F \to G)$ 生成的最小正规子群.

3.6.2 van Kampen 定理及应用

¶ van Kampen 定理

下面我们陈述本节的主要定理，van Kampen 定理[13]. 该定理跟代数拓扑中用于计算同调群/上同调群的 Mayer-Vietoris 序列类似，都是通过计算（一般而言较为简单的）子空间的拓扑不变量，并细致考察子空间的交相对于全空间的拓扑，最终得到全空间的拓扑量. van Kampen 定理是计算拓扑空间基本群最重要的工具之一，我们将会利用它计算包括紧曲面在内的很多拓扑空间的基本群.

[13]范坎彭（Egbert van Kampen，1908-1942），荷兰数学家，英年早逝的拓扑学家，1933 年证明了用以计算基本群的 van Kampen 定理. 该定理的一个版本在 1930 年已经出现在德国拓扑学家塞弗特 (Herbert Seifert，1897-1996) 的博士论文中，因此这个定理也被称作 Seifert-van Kampen 定理.

定理 3.6.11.（van Kampen 定理）

设 $X=U_1\cup U_2$，其中 U_1,U_2 是 X 中的道路连通开集，且 $U_1\cap U_2$ 也是道路连通的. 则对任意 $x_0\in U_1\cap U_2$，

$$\pi_1(X,x_0)\simeq \pi_1(U_1,x_0)*_{\pi_1(U_1\cap U_2,x_0)}\pi_1(U_2,x_0),$$

其中群同态

$$\varphi:\pi_1(U_1\cap U_2,x_0)\to\pi_1(U_1,x_0)\quad 和\quad \psi:\pi_1(U_1\cap U_2,x_0)\to\pi_1(U_2,x_0)$$

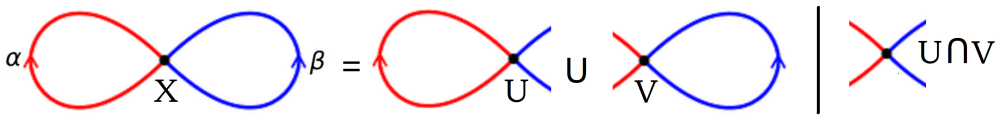
是由相应的包含映射 $U_1\cap U_2\hookrightarrow U_1$ 和 $U_1\cap U_2\hookrightarrow U_2$ 所诱导的诱导同态. ♡

注 3.6.12. 注意我们并不能用 van Kampen 定理去计算 $\pi_1(S^1)$: 如果我们令 $U_1=S^1\setminus\{1\}$ 和 $U_2=S^1\setminus\{-1\}$, 则 $\pi_1(U_1)=\pi_1(U_2)=\{e\}$, 从而 $\pi_1(U_1,x_0)*_{\pi_1(U_1\cap U_2,x_0)}\pi_1(U_2,x_0)=\{e\}\neq\pi_1(S^1,x_0)$，其原因在于：$U_1\cap U_2$ 并不道路连通.

下面我们给出用 van Kampen 定理计算基本群的一些例子.

¶ van Kampen 定理的应用：“8 字型”的基本群

考虑本节开头提到的“8 字形”，即 $X=S^1\vee S^1$. 取 U,V 为 α 和 β 的开邻域，如下图所示：



因为 U,V 都同伦等价于圆 S^1，我们有

$$\pi_1(U)\cong\langle\alpha\rangle\quad\cong\mathbb{Z},\qquad \pi_1(V)\cong\langle\beta\rangle\quad\cong\mathbb{Z}.$$

显然 $U\cap V$ 是可缩的，即 $\pi_1(U\cap V)=\{e\}$. 于是由 van Kampen 定理，我们得到

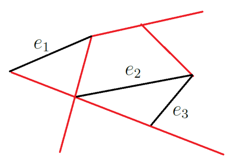
$$\pi_1(S^1\vee S^1)\cong\langle\alpha\rangle*_{\{e\}}\langle\beta\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle\quad(\cong\mathbb{Z}*\mathbb{Z}),$$

从而证实了我们在本节开头的观察.

¶ van Kampen 定理的应用：图的基本群

在第 2.2 节我们介绍了图的概念. 我们通过一个例子来解释如何用 van Kampen 定理计算图的基本群.

例 3.6.13.

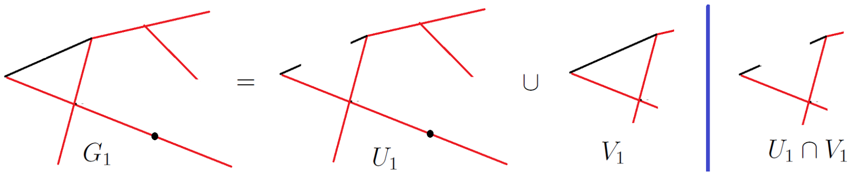
$G=$ 

首先，我们选取图 G 的一个“极大子树” (maximal subtree) G_0，比如图中被标为红色的部分. 剩余 3 条边，我们将它们分别记为 e_1,e_2,e_3.

为了计算 G 的基本群, 我们从 G_0 开始. 因为 G_0 是树，是单连通的，所以

$$\pi_1(G_0)\simeq\{e\}.$$

下面我们添加一条边，比如 e_1，然后计算 $G_1 = G_0 \cup e_1$ 的基本群. 为此我们将 G_1 分解为如下图所示的开集 U_1 与 V_1 的并：



因为 $U_1 \cap V_1$ 是可缩的，而 V_1 同伦等价于 S^1, 我们得到

$$\pi_1(G_1) \simeq \pi_1(G_0) *_{\{e\}} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}.$$

接下来我们通过添加边 e_2 并重复相同的步骤，得到

$$\pi_1(G_2) = \pi_1(G_1 \cup e_2) \simeq \pi_1(G_1) *_{\{e\}} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

最后添加边 e_3，得到

$$\pi_1(G) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

一般地，给定任意连通图 G，我们有以下结论：

(a) 任何图都存在一个极大子树 G_0（它是 G 的包含所有顶点的单连通子图：对有限图可以用归纳法证明存在极大子树，对一般的图可以用 Zorn 引理证明存在极大子树）

(b) 如果我们记 G 中不在 G_0 里面的边的集合为 $\{e_\alpha\}$，那么

$$\pi_1(G) \simeq *_{e_\alpha}\mathbb{Z}.$$

(c) 对于有限图 G, 如果我们记

$$|V(G)| = G\text{中顶点数}, \qquad |E(G)| = G\text{中边数},$$

那么 G_0 的边数为 $|V(G)| - 1$. 由此可得

$$\pi_1(G) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{k},$$

其中 $k = |E(G)| - |V(G)| + 1$.

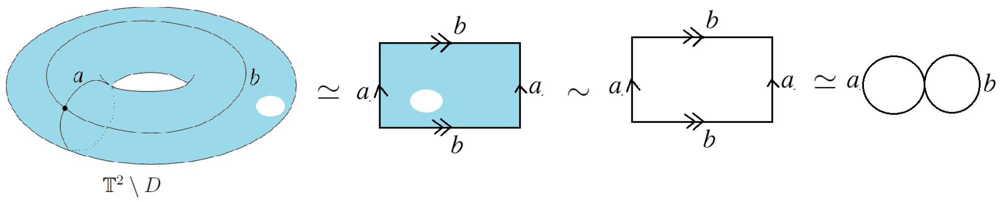
¶ van Kampen 定理的应用：再次计算 $\mathbb{T}^2$ 的基本群

接下来，我们计算 $\Sigma_1 = \mathbb{T}^2$ 的基本群. 虽然我们已经知道 $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \pi_1(S^1 \times S^1) \simeq \mathbb{Z}^2$, 但我们将利用 van Kampen 定理重新计算它的基本群，因为这个方法为如何计算 Σ_g (有 g 个洞的可定向闭曲面）的基本群提供了思路.

我们首先将 $\mathbb{T}^2$ 写作

$$U_1 = \mathbb{T}^2 \setminus \overline{D} \qquad \text{和} \qquad U_2 = \widetilde{D}$$

的并集，其中 D 是一个小圆盘，$\widetilde{D}$ 是一个包含 $\overline{D}$ 的稍微大一点点的开圆盘. 我们首先计算基本群 $\pi_1(\mathbb{T}^2 \setminus \overline{D})$. 根据下图，



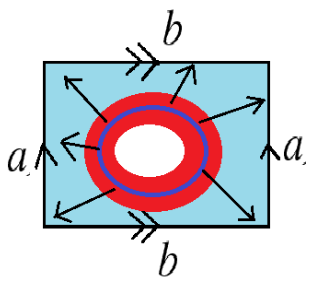
我们得到

$$\pi_1(U_1) \simeq \pi_1(S^1 \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle.$$

另一方面，显然 U_2 是可缩的，而 $U_1 \cap U_2$ 是一个同伦等价于圆周的“细圆环”，因此

$$\pi_1(U_2) \simeq \pi_1(\text{“pt”}) = \{e\} \quad \text{和} \quad \pi_1(U_1 \cap U_2) \simeq \pi(S^1) \simeq \mathbb{Z}.$$

不幸的是，以上信息不足以决定 $\pi_1(\mathbb{T}^2)$, 因为我们仍然需要显式地写出映射



$$\varphi = \iota_* : \pi_1(U_1 \cap U_2) \to \pi_1(U_1).$$

这个群同态由包含映射诱导. 根据右图，$\pi_1(U_1 \cap U_2)$ 的生成元是一个在 U_1 中可被形变到边界环路 $aba^{-1}b^{-1}$ 的圆周. 换句话说，

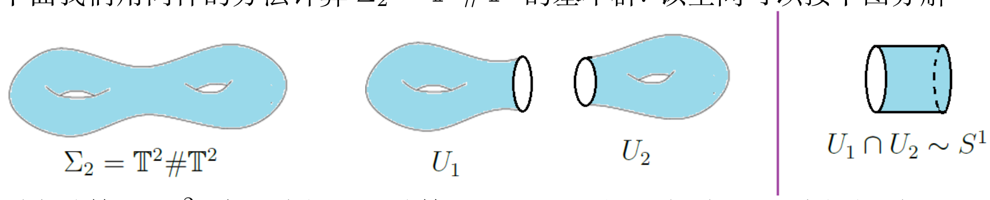
$$\varphi(1) = aba^{-1}b^{-1}.$$

因此我们得到

$$\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} \{e\} = \langle a, b \,| aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}^2.$$

¶ van Kampen 定理的应用：$\Sigma_g = \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2$ 的基本群

下面我们用同样的方法计算 $\Sigma_2 = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ 的基本群. 该空间可以按下图分解：



注意到在计算 $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ 中，我们已经计算了 U_1 和 U_2 的基本群. 因此我们得到了

$$\pi_1(U_1) \simeq \langle a_1, b_1 \rangle, \quad \pi_1(U_2) \simeq \langle a_2, b_2 \rangle, \quad \pi_1(U_1 \cap U_2) \simeq \mathbb{Z}.$$

此外，我们刚才也解释了包含映射给出的两个诱导同态分别由

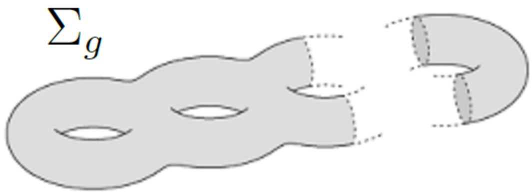
$$\varphi(1) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}, \quad \psi(1) = b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1}$$

给出，因此由 van Kampen 定理可以得到

$$\pi_1(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) \simeq \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \mid \underbrace{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}}_{\varphi(1)\psi(1)^{-1}} = 1 \rangle$$

注意这个群不再是交换群.

一般地，由归纳法可以计算“亏格”为 g 的紧无边曲面即 $\Sigma_g = \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2}_{g}$ 的基本群，



其结果为

$$\pi_1(\underbrace{\mathbb{T}^2\#\cdots\#\mathbb{T}^2}_{g}) \simeq \langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1} = 1\rangle$$

3.6.3 阅读材料：van Kampen 定理的证明

¶ van Kampen 定理（多个开集的版本）

van Kampen 定理可以被推广为 X 被多个开集 U_α 所覆盖的情形，此时我们取基点 $x_0 \in \cap_\alpha U_\alpha$ 并分别记由包含映射 $U_\alpha \hookrightarrow X$ 和 $U_\alpha \cap U_\beta \hookrightarrow U_\alpha$ 所诱导的群同态为

$$j_\alpha : \pi_1(U_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0) \quad 和 \quad \iota_{\alpha\beta} : \pi_1(U_\alpha \cap U_\beta, x_0) \to \pi_1(U_\alpha, x_0)$$

根据泛性质，j_α 诱导了唯一的从自由积到 $\pi_1(X, x_0)$ 的群同态

$$\Phi : *_\alpha \pi_1(U_\alpha, x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

van Kampen 定理告诉我们如何由群同态 Φ 计算 $\pi_1(X, x_0)$. 下面我们陈述并证明它：

定理 3.6.14.（van Kampen 定理, 一般版本）

设 $\{U_\alpha\}$ 是 X 的一个由道路连通开集组成的开覆盖，且设 $x_0 \in \cap_\alpha U_\alpha$.

(1) 若每个交集 $U_\alpha \cap U_\beta$ 都是道路连通的，则 Φ 是满射.

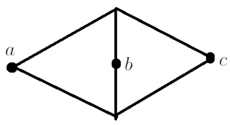
(2) 若除此之外，每个交集 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 也都是道路连通的，则 Φ 诱导了群同构

$$*_\alpha \pi_1(U_\alpha, x_0)/N \simeq \pi_1(X, x_0).$$

其中 N 是由全部形如 $\iota_{\alpha\beta}(\omega)\iota_{\beta\alpha}(\omega)^{-1}$ 的元素生成的正规子群.

我们通过注记3.6.12中 S^1 的例子可以看到，没有"$U_\alpha \cap U_\beta$ 是道路连通"这个条件，Φ 不一定是满射. 现在我们给一个例子说明条件"$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 是道路连通的"对于定理中的断言 (2) 也是必要的：

例 3.6.15.

$X =$ 

令 X 为左边的图. 那么通过同伦等价或者应用上述计算图的基本群时所得的公式，我们有 $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

但是如果我们令 $U_1 = X \setminus \{a\}, U_2 = X \setminus \{b\}$ 和 $U_3 = X \setminus \{c\}$ 并对覆盖 $\{U_1, U_2, U_3\}$ 应用 van Kampen 定理的结论，则由 $\pi_1(U_i) \simeq \mathbb{Z}$ $(1 \le i \le 3)$ 我们会错误地得出 $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.[14]这里 van Kampen 定理不适用的原因在于 U_1, U_2, U_3 的交集不是道路连通的.

[14]我们并不能简单地认为 $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ 比 $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$"小"，因为 $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ 有子群同构于 $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$，甚至由子群同构于有可数个生成元的自由群！所以 $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}*\mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ 并不显然. 证明该结论的方法之一是去证明它们有不同的交换化（这又是通过函子把复杂问题简单化的一个例子）. 参见本节习题.

¶ 一般版本 van Kampen 定理的证明

证明

(1) 映射 Φ 是满射.

任给以 x_0 为基点的圈 $\gamma:[0,1]\to X$, 由 Lebesgue 数引理，存在区间 $[0,1]$ 的一个划分 $0=s_0<s_1<\cdots<s_m=1$，使得每个 $\gamma([s_i,s_{i+1}])$ 都被包含于某个 U_α 中. 重复命题3.5.1的证明过程，即对每个 i 取定一个 U_i，使得 $\gamma([s_i,s_{i+1}])\subset U_{i+1}$，并取 λ_i 为道路连通集合 $U_i\cap U_{i+1}$ 中从 x_0 到 $\gamma(s_i)$ 的一条道路，则我们得到

$$\gamma \underset{p}{\sim} (\gamma_1*\bar\lambda_1)*(\lambda_1*\gamma_2*\bar\lambda_2)*\cdots*(\lambda_{m-1}*\gamma_m).$$

因为每个圈 $\lambda_i*\gamma_{i+1}*\bar\lambda_{i+1}$ 都在某个 U_α 中，所以 $[\gamma]_p\in \mathrm{Image}(\Phi)$, 即 Φ 是满射.

[注意：以上论证也说明了 Φ 通常而言不是单射，因为 $f([s_i,s_{i+1}])$ 有可能同时被包含于 U_α 和 U_β 中，因此圈 $\lambda_i*\gamma_{i+1}*\bar\lambda_{i+1}$ 同时位于 U_α 和 U_β 中, 从而既可以被视作 U_α 中的圈，也可以被视作 U_β 中的圈, 于是我们得到了 $[\gamma]_p$ 在$*_\alpha\pi_1(U_\alpha,x_0)$ 中两个不同的表示方法.]

(2) 我们分三步证明.

第一步. 转化问题.

我们记 $k_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\hookrightarrow X$ 为包含映射，则由

$$\Phi(\iota_{\alpha\beta}(\omega)\iota_{\beta\alpha}(\omega)^{-1})=j_\alpha\iota_{\alpha\beta}(\omega)\cdot j_\beta\iota_{\beta\alpha}(\omega^{-1})=(k_{\alpha\beta})_*(\omega)k_{\alpha\beta}(\omega^{-1})=e$$

可知 $N\subset\ker(\Phi)$. 于是满同态 Φ 诱导了满同态

$$\overline{\Phi}:*_\alpha\pi_1(U_\alpha,x_0)/N\to\pi_1(X,x_0).$$

我们需要证明 $\overline{\Phi}$ 是单射. 为此，我们考虑 $*_\alpha\pi_1(U_\alpha,x_0)$ 中的字的如下两种操作:

操作 1: 若一个字中的相邻两项 $[\gamma_i]_p,[\gamma_{i+1}]_p$ 都在同一个 $\pi_1(U_\alpha,x_0)$ 中，则用 $[\gamma_i*\gamma_{i+1}]_p$ 代替 $[\gamma_i]_p[\gamma_{i+1}]_p$.

操作 2: 若一个字中有一项 $[\gamma_i]_p\in\pi_1(U_\alpha,x_0)$，且 γ_i 是 $U_\alpha\cap U_\beta$ 中的圈，则将该项替换为 $[\gamma_i]_p\in\pi_1(U_\beta,x_0)$.

注意操作 1 不改变该字所对应的$*_\alpha\pi_1(U_\alpha,x_0)$ 的元素，而操作 2 不改变该字在商群$*_\alpha\pi_1(U_\alpha,x_0)/N$ 中的像. 于是为证 $\overline{\Phi}$ 是单射，我们只要证明:

转化后的问题: 如果 $\Phi([\gamma_1]_p[\gamma_2]_p\cdots[\gamma_M]_p)=\Phi([\gamma_1']_p[\gamma_2']_p\cdots[\gamma_N']_p)$, 则 $[\gamma_1]_p[\gamma_2]_p\cdots[\gamma_M]_p$ 可以通过有限次运用上述两种操作（及其逆操作）变成 $[\gamma_1']_p[\gamma_2']_p\cdots[\gamma_N']_p$.

第二步. 准备工作: $[0,1]\times[0,1]$ 的“砖块分解”.

现在假设 $\Phi([\gamma_1]_p[\gamma_2]_p\cdots[\gamma_M]_p)=\Phi([\gamma_1']_p[\gamma_2']_p\cdots[\gamma_N']_p)=[\gamma]_p$. 由定义,

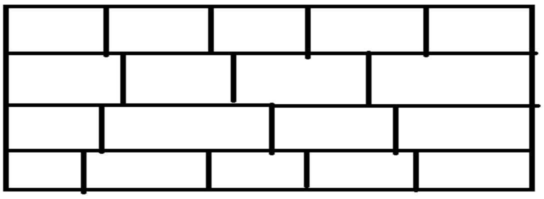
$$\gamma_1*\cdots*\gamma_M\underset{p}{\sim}\gamma\underset{p}{\sim}\gamma_1'*\cdots*\gamma_N',$$

且每个 γ_i 或 γ_i' 都是一个基点为 x_0 且完全落在某个 U_α 中的圈. 令 $F:[0,1]\times[0,1]\to X$ 为连接 $\gamma_1*\cdots*\gamma_M$ 和 $\gamma_1'*\cdots*\gamma_N'$ 的一个道路同伦. 由管形邻域引理以及 Lebesgue 数引理，我们能够将 $[0,1]\times[0,1]$ 分解为有限多个小矩形 $R_{ij}=[t_j^i,t_{j+1}^i]\times[s_i,s_{i+1}]$,

其中 $0=s_0<s_1<\cdots<s_K<s_{K+1}=1$ 且 $0=t_0^i<t_1^i<\cdots<t_{k(i)}^i=1$, 使得

- 每个 $F(R_{ij})$ 都被包含于某个 U_α 中, 我们将其记为 U_{ij}.
- $k(0)=M, k(K)=N$, 且 $t_j^0=j/M, t_j^K=j/N$. (此处我们用了管形邻域引理)
- $[0,1]\times[0,1]$ 中的每个点位于至多三个矩形 R_{ij} 当中.

这样的分解[15] 看起来如下图:



为方便起见,我们将这些"砖块"按从左到右、从下到上的顺序,记为 $R_1,R_2,\cdots,R_L$.

注意同伦 F 将矩形 $[0,1]\times[0,1]$ 的左边线和右边线都映到 x_0. 因此如果 λ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 中从左边线到右边线的道路, 那么 $F|_\lambda$ 是以 x_0 为基点的一个圈. 此外, 砖块分解图中每个砖块的每个顶点 v 落在至多三个砖块里, 从而 $F(v)$ 属于至多三个砖块所对应的开集 U_{ij} 的交集中. 由定理条件, 在这样的交集中存在一条从 x_0 到 $F(v)$ 的道路 λ_v. (若 $F(v)=x_0$, 我们取该道路为常值道路.)

第三步. 从"底"到"顶", 完成证明.

对于每个 $0\le r\le L$, 我们令 λ_r 为从左边线到右边线的将前 r 个矩形 $R_1,R_2,\cdots,R_r$ 和剩余的矩形分隔开的"折线道路", 每条折线 λ_r 是由若干段矩形的边 (含多条水平线段和至多一条竖直线段) 组成. 和满射性的证明类似, 对于 λ_r 途径的每个顶点 v, 我们可以在圈 $F|_{\lambda_r}$ 中插入一些道路 μ_v 和 $\bar{\mu}_v$, 从而将圈 $F|_{\lambda_r}$ 分解为若干以 x_0 为基点的环路, 使得每个圈都位于某个 U_α 当中. 于是, 每条折线给出了$*_\alpha\pi_1(U_\alpha,x_0)$ 中的一个字. 例如 λ_0 就是下边线, 对应于字 $[\gamma_1]_p[\gamma_2]_p\cdots[\gamma_M]_p$, 而 λ_L 就是上边线, 对应于字 $[\gamma_1']_p[\gamma_2']_p\cdots[\gamma_N']_p$.

下面我们证明 λ_r 对应的字可以通过有限次运用上述操作 1 和操作 2 (及它们的逆操作) 变成 λ_{r+1} 对应的字. 因为 λ_r 跟 λ_{r+1} 的差别只是把 R_r 的左、下两条边换成上、右两条边, 所以对应的字只有连续若干个元素 (主要取决于矩形 R_r 的上下水平边上的顶点个数) 不同. 我们首先通过操作 2, 把所有涉及到的这些"有变化的线段 (在添加上前述 λ_v 以及 $\overline{\lambda}_v$ 后) 所得到的圈的道路同伦类"全部换成"该圈在 R_r 所对应的 U_{ij} 中的圈所对应的道路同伦类". 因为 $F|_{R_r}$ 给出了这两组替换后的圈在 U_{ij} 中的道路同伦, 所以可以通过操作 1 把第一组圈的道路同伦类替换成第二组圈的道路同伦类. 于是我们证明了 λ_r 对应的字可以通过有限次运用操作 1 和操作 2 (及它们的逆操作) 变成 λ_{r+1} 对应的字. 于是从 λ_0 对应的字 $[\gamma_1]_p[\gamma_2]_p\cdots[\gamma_M]_p$ 开始, 通过重复上述过程, 可以通过有限次运用操作 1 和操作 2 (及它们的逆操作) 变成, 得到 λ_L 对应的字 $[\gamma_1']_p[\gamma_2']_p\cdots[\gamma_N']_p$, 这样我们就完成了证明.

$\square$

[15]这是一个"砖块"分解. 也可以用"六边形分解"替代, 同样能让每个点位于分解中的至多三个元素中.

3.7 覆叠空间

3.7.1 覆叠空间的概念与例子

¶ 覆叠空间的定义

我们在计算 $\pi_1(S^1)$ 时，核心步骤是证明 S^1 的提升引理即引理3.5.8，而该引理证明的关键要点是投影映射 $p:\mathbb{R}\to S^1$ 的“局部可逆性”，即存在 S^1 的开覆盖 $\{U_i\}$ 使得

- $p^{-1}(U_i)=\bigcup_j V_j^i$ 是 $\mathbb{R}$ 中开集的不交并，
- 每个 $p_j^i=p|_{V_j^i}:V_j^i\to U_i$ 是一个同胚.

事实上，这样的“覆叠结构”广泛存在于几何中，且与基本群密切相关：不仅覆叠结构可被用于计算特定空间的基本群，而且基本群也可以用于分类覆叠结构. 因此我们定义

定义 3.7.1.（覆叠空间） 设 X 是一个拓扑空间. 若存在拓扑空间 $\widetilde{X}$ 以及连续映射 $p:\widetilde{X}\to X$ 使得对于任意 $x\in X$，存在于 x 的一个开邻域 U 满足如下性质：

(1) $p^{-1}(U)=\cup_\alpha V_\alpha$，其中 V_α 是 $\widetilde{X}$ 中的不交开集.

(2) 对于任意的 α, 映射 $p_\alpha:=p|_{V_\alpha}:V_\alpha\to U$ 是一个同胚.

则我们称 $\widetilde{X}$ 为 X 的一个**覆叠空间**（covering space），称映射 p 是一个**覆叠映射**（covering map）, 并且对于任意 $x\in X$, 称 $p^{-1}(x)$ 为该覆叠映射在 x 处的**纤维** (fiber). ♣

注 3.7.2.

(1) 我们总假设 X 和 $\widetilde{X}$ 都是道路连通的. 事实上，

- 若 $\widetilde{X}$ 是 X 的覆叠空间, $X_0\subset X$ 是一个子空间，那么
$$\widetilde{X}_0:=p^{-1}(X_0)$$
是 X_0 的一个覆叠空间. 所以我们总可以通过限制到道路连通分支的方法，使得 X 是道路连通的.
- 如果 X 是道路连通的，$\widetilde{X}$ 是 X 的覆叠空间，那么 $\widetilde{X}$ 的道路连通分支是 X 的覆叠空间. 所以我们总可以通过限制到道路连通分支的方法，使得 $\widetilde{X}$ 是道路连通的.

(2) 在 X 道路连通的条件下，可以验证（留作习题）：

- p 总是满射 (假设 $\widetilde{X}\neq\emptyset$).
- 对于任意 $x\in X$，纤维 $p^{-1}(x)$ 都有着相同的势，称为覆叠的**叶数**（number of sheets）. 若 $|p^{-1}(x)|=n$, 则我们称该覆叠为一个 n-**重覆叠**（n-**fold covering**）.

¶ 覆叠空间：例子

例 3.7.3. 以下是一些覆叠空间的例子：

(1) $\mathbb{R}$ 是 S^1 的覆叠空间，其覆叠映射 $p:\mathbb{R}\to S^1$, $x\mapsto e^{2\pi ix}$.

(2) S^1 以多种不同的方式成为 S^1 的覆叠空间：对于任意整数 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$p_n : S^1 \to S^1, \quad z \mapsto z^n$$

给出了 S^1 的一个 $|n|$-重覆叠.

(3) 类似地，对于任意整数 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，映射

$$p_n : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^n$$

是一个 $|n|$ 重覆叠映射.

[然而，$p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ 不是一个覆叠映射.]

(4) 复指数映射

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

是一个覆叠映射：对于任意的 $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, 我们有

$$\exp^{-1}(z) = \{\log r + (2k\pi + \theta)i \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

由此可以验证 exp 是一个覆叠映射.

(5) S^n 是实射影空间 $\mathbb{RP}^n$（参见例1.4.35）的一个覆叠空间，覆叠映射为

$$p : S^n \to \mathbb{RP}^n = S^n/\sim, \quad x \to [x],$$

其中 $x_1, x_2 \in S^n$, $x_1 \sim x_2 \iff x_1 = \pm x_2$. 这是一个二重覆叠.

[然而，$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 不是 $\mathbb{RP}^n$ 的一个覆叠空间.]

(6) 在例1.4.44(5)中，我们定义透镜空间 $L(p, q)$ (p 和 q 为互质的整数) 为商空间

$$L(p; q) := S^3 / \sim,$$

其中 $(z_1, z_2) \sim (z_1', z_2') \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ 使得$z_1' = e^{2\pi ki/p} z_1$, $z_2' = e^{2\pi kqi/p} z_2$. 可以验证在商映射之下，$S^3$ 是 $L(p, q)$ 的一个 p-重覆叠空间.

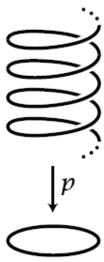
(7) 如果 $p : \widetilde{X} \to X$ 和 $p' : \widetilde{X}' \to X'$ 都是覆叠映射，那么映射

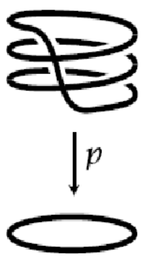
$$p \times p' : \widetilde{X} \times \widetilde{X}' \to X \times X', \ (\tilde{x}, \tilde{x}') \mapsto (p(\tilde{x}), p'(\tilde{x}'))$$

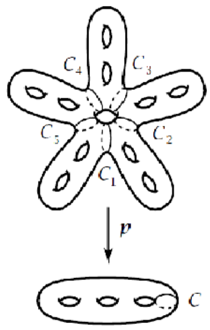
也是覆叠映射. 特别地，$\widetilde{X} = \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ 的覆叠空间.

(8) 同上节一样，我们记 “亏格” 为 g 的紧无边曲面为 Σ_g. 则 Σ_{11} 是 Σ_3 的（5 重）覆叠空间，如下图所示. 类似地，可以构建从 Σ_{kr+1} 到 Σ_{k+1} 的 r 重覆叠映射.

下面这些图给出了 (1),(2),(8) 所描述的覆叠映射：







¶ 覆叠空间 v.s. 群作用

注意到例3.7.3中的 (1), (2), (5), (6) 已经在例1.4.44中作为特定的群作用下的商空间出现过. 一般地，假设 G 是一个群，作用在拓扑空间 $\widetilde{X}$ 上，

$$X = \widetilde{X}/G := \widetilde{X}/\sim,$$

为该群作用下的商空间. 一个自然的问题是:

问题: 商映射 $p : \widetilde{X} \to X$ 是一个覆叠映射吗?

事实上，在习题 1,4 中我们已经给出了商映射 $p : \widetilde{X} \to X$ 是覆叠映射的一个充分条件:

$$\forall \tilde{x} \in \widetilde{X},\ \exists \tilde{x}\text{的开邻域}\widetilde{U}, \text{使得对}\forall g \neq e \in G, \text{有}(g \cdot \widetilde{U}) \cap \widetilde{U} = \emptyset. \qquad (\bigstar)$$

定义 3.7.4.（纯不连续作用）

如果群 G 在拓扑空间 X 上的作用满足条件 ($\bigstar$)，则我们称该作用是**纯不连续的**（properly discontinuous）.

在习题 1.4 中我们证明了如下结果，为了完整性起见我们给出详细证明:

命题 3.7.5.（特定群作用下商映射是覆叠映射）

假设群 G 作用在拓扑空间 $\widetilde{X}$ 上. 若该作用是纯不连续的, 则 $\widetilde{X}$ 是商空间 $X = \widetilde{X}/G$ 的一个覆叠空间, 且商映射 $p : \widetilde{X} \to X$ 是一个覆叠映射.

证明 令 $x \in X, \tilde{x} \in p^{-1}(x)$，$\widetilde{U}$ 为 $\tilde{x}$ 的满足条件 ($\bigstar$) 的开邻域. 记 $U = p(\widetilde{U})$. 则由定义，

$$p^{-1}(U) = p^{-1}(p(\widetilde{U})) = \bigcup_{g \in G} g \cdot \widetilde{U}$$

是 $\widetilde{X}$ 中开集的并集. 因此由商拓扑的定义, 集合 U 为 X 中的开集. (这蕴含了 p 是一个开映射.) 由此 $p(\widetilde{U})$ 是 x 的一个开邻域，且满足覆叠空间中的条件 (1).

下面验证覆叠空间定义中的条件 (2). 我们首先注意到由条件 ($\bigstar$), $p|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to U$ 是单射，由 U 的定义它是满射. 作为商映射它是连续的. 由上一段相同的论证可得它是一个开映射. 因此 $p|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \to p(\widetilde{U})$ 是一个同胚. 由此可知对于任意的 $g \in G$, 映射

$$p_g : g \cdot \widetilde{U} \to p(\widetilde{U})$$

是以下两个同胚的复合

$$g \cdot \widetilde{U} \xrightarrow{g^{-1}} \widetilde{U} \xrightarrow{p} p(\widetilde{U}),$$

从而也是一个同胚. □

可以验证例1.4.44中所涉及的群作用都是纯不连续的，故所得的商映射都是覆叠映射.

例 3.7.6. 考虑 $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ 在 $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$ 的作用，

$$1 \cdot (z, w) = (z, w), \quad (-1) \cdot (z, w) = (\bar{z}, -w).$$

这是一个纯不连续作用，给出了 $\mathbb{T}^2$ 到 $\cdots\cdots$ Klein 瓶的二重覆叠! [验证!]

3.7.2 映射的提升

¶ 提升引理

我们先给出映射提升的定义：

定义 3.7.7.（映射的提升）

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 为一个覆叠映射，而 $f:Y\to X$ 是一个连续映射. 若连续映射 $\tilde{f}:Y\to\widetilde{X}$ 使得右边的图表交换，即

$$p\circ\tilde{f}=f,$$

则称 $\tilde{f}$ 为 f 的一个**提升**（lifting）. ♣

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

通过重复引理3.5.8的证明，可以得到任意具有“初始提升”的连续映射 $F:P\times I\to X$ 可被唯一提升：

引理 3.7.8.（一般提升引理）

设 P 是拓扑空间，$p:\widetilde{X}\to X$ 是一个覆叠映射. 若映射

$$F_0=F|_{P\times\{0\}}:P\times\{0\}\to X$$

可以被“提升”为连续映射 $\widetilde{F_0}:P\times\{0\}\to\widetilde{X}$，则存在 F 的提升 $\widetilde{F}:P\times I\to\widetilde{X}$，使得 $\widetilde{F_0}=\widetilde{F}|_{P\times\{0\}}$，且满足该条件的提升是唯一的. ♢

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ P\times\{0\} \arrow[ur, "\widetilde{F_0}"] \arrow[r, "F_0"] & X \end{tikzcd} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ P\times I \arrow[ur, dashed, "\widetilde{F}"] \arrow[r, "F"] & X \end{tikzcd}$$

特别地，分别取 P 为单点集以及 $P=[0,1]$，我们可以得到

推论 3.7.9.（道路提升性质）

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射，则对于 X 中任意起点为 $\gamma(0)=x_0$ 的道路 $\gamma:[0,1]\to X$，以及任意 $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$，在 $\widetilde{X}$ 中有唯一一条起点为 $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{x}_0$ 的道路 $\tilde{\gamma}:[0,1]\to\widetilde{X}$，使得 $\tilde{\gamma}$ 是 γ 的提升，即 $p\circ\tilde{\gamma}=\gamma$. ♡

以及

推论 3.7.10.（同伦提升性质）

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射

(1) 对于 X 中任意具有固定起始点 $F(s,0)\equiv x_0$ 的同伦 $F:[0,1]\times[0,1]\to X$，和任意 $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$，在 $\widetilde{X}$ 中存在唯一具有固定起点 $\widetilde{F}(s,1)\equiv\tilde{x}_0$ 的同伦 $\widetilde{F}:[0,1]\times[0,1]\to\widetilde{X}$，使得 $\widetilde{F}$ 是 F 的一个提升，即 $p\circ\widetilde{F}=F$.

(2) 若同伦 F 是道路同伦，即还具有固定终点 $F(s,1)\equiv x_1\in X$，则 $\widetilde{F}$ 也是道路同伦，即存在 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_1)$ 使得 $\widetilde{F}(s,1)\equiv x_1$. ♡

注 3.7.11.

(1) 若 γ 是一个圈，即 $\gamma(1)=\gamma(0)$，提升后的道路 $\widetilde{\gamma}$ 一般不再是圈，即 $\widetilde{\gamma}(1)\neq\widetilde{\gamma}(0)$. 但是由同伦提升可知，如果 γ 是道路同伦等价于常值道路的圈，则提升后的道路 $\widetilde{\gamma}$ 依然是圈. 在习题中我们将给出圈提升后依然是圈的充要条件.

(2) 虽然道路同伦的提升是道路同伦，但是跟 $\tilde{x}_0$ 可以从 $p^{-1}(x_0)$ 中任选不同，只要选定了起点 $\tilde{x}_0$，则终点 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_1)$ 就已经被唯一确定下来了（这是因为道路 $F_s(\cdot)=F(s,\cdot)$ 具有唯一的提升）. 特别地，“圈的道路同伦”的提升一般不再是“圈的道路同伦”，而只是一般道路的道路同伦. 当然，如果是同伦于常值圈的“圈的道路同伦”，那么提升后依然是“圈的道路同伦”（这还是因为道路具有唯一提升）.

作为推论，我们证明

命题 3.7.12.（覆叠映射诱导基本群的单同态）

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射，且 $p(\tilde{x}_0)=x_0$. 则 $p_*:\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi_1(X,x_0)$ 是单射. ♠

证明 设 $\widetilde{\gamma}$ 是 $\widetilde{X}$ 中以 $\tilde{x}_0$ 为基点的一个圈，且 $p_*([\widetilde{\gamma}]_p)=e$，即 $\gamma:=p\circ\widetilde{\gamma}$ 道路同伦于 x_0 处的常值道路 γ_{x_0}. 则由同伦提升引理，$\widetilde{\gamma}$（作为 γ 的以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升道路）与 $\gamma_{\tilde{x}_0}$（作为 γ_{x_0} 的以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升道路）是道路同伦等价的，从而 $[\widetilde{\gamma}]_p=e\in\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)$. □

¶ 提升的唯一性

现在我们考虑一般的提升. 事实上,即使没有引理3.7.8中的额外假设(注意引理3.7.8要求具有初始提升但不要求连通性，而此处要求 Y 连通)，一般的提升也总是唯一的:

命题 3.7.13.（提升的唯一性）

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是覆叠映射，$f:Y\to X$ 为连续映射，且 $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2:Y\to\widetilde{X}$ 是 f 的两个提升. 若 Y 是连通的, 且存在 $y_0\in Y$ 使得 $\tilde{f}_1(y_0)=\tilde{f}_2(y_0)$，则在 Y 上有 $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$. ♠

证明 对于任意 $y\in Y$, 我们取 $f(y)$ 在 X 中的开邻域 U，使得 $p^{-1}(U)$ 是无交并

$$p^{-1}(U)=\bigcup_\alpha \widetilde{U}_\alpha,$$

且使得每个

$$p_\alpha:=p|_{\widetilde{U}_\alpha}:\widetilde{U}_\alpha\to U$$

都是同胚. 在这些 U_α 中，分别记包含 $\tilde{f}_1(y)$ 和 $\tilde{f}_2(y)$ 的开集为 $\widetilde{U}_1$ 和 $\widetilde{U}_2$. 下面我们采用连通性论证说明 $\tilde{f}_1\equiv\tilde{f}_2$. 为此我们令

$$Y_0=\{y\in Y\mid \tilde{f}_1(y)=\tilde{f}_2(y)\}.$$

则我们有

- $Y_0\neq\emptyset$，因为我们有 $y_0\in Y_0$.
- Y_0 是闭集：假设 $y\notin Y_0$，即 $\tilde{f}_1(y)\neq\tilde{f}_2(y)$. 因为 $p(f_1(y))=p(f_2(y))$，所以 $\widetilde{U}_1\neq\widetilde{U}_2$，从而由无交性，$\widetilde{U}_1\cap\widetilde{U}_2=\emptyset$. 由连续性，存在一个 y 在 Y 中的开邻域 N 使得

$$\tilde{f}_1(N)\subset\widetilde{U}_1,\quad \tilde{f}_2(N)\subset\widetilde{U}_2.$$

由此可得 $N\cap Y_0=\emptyset$. 因此 Y_0^c 是开集，即 Y_0 是闭集.

- Y_0 是开集：假设 $y\in Y_0$，则 $\widetilde{U}_1\cap\widetilde{U}_2\neq\emptyset$，从而 $\widetilde{U}_1=\widetilde{U}_2$. 同理我们可以找到 y 的一个开邻域 N 使得 $f_1(N)\subset\widetilde{U}_1=\widetilde{U}_2$. 因为 p 在 $\widetilde{U}_1=\widetilde{U}_2$ 上是单射, 并且

$$p\circ\tilde{f}_1=p\circ\tilde{f}_2,$$

所以我们能推出在 N 上有 $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$. 于是 $N\subset Y_0$, 从而 Y_0 是开集.

最后，由 Y 的连通性可知 $Y_0=Y$, 即在 Y 上恒有 $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$. □

¶ 提升的存在性

一般提升的存在性通常更为复杂. 假设映射 f 可被提升为 $\tilde{f}$，那么我们就会有如下带标定点的提升交换图表. 特别地，由 π_1 的函子性，我们得到提升存在的必要条件

$$f_*(\pi_1(Y,y_0))=p_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y,y_0)))\subset p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)).$$

反之我们证明，只要 Y 是道路连通且局部道路连通的，那么上述必要条件也是充分的：

定理 3.7.14. （提升存在性的判别准则）

设 $p:(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是一个覆叠映射，并且 $f:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ 是连续的. 如果 Y 是道路连通且局部道路连通的，那么 f 可被提升[a]为 $\tilde{f}$ 当且仅当

$$f_*(\pi_1(Y,y_0))\subset p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)). \qquad (*)$$

[a]注意，此处提升为带有标定点的提升，即还要满足 $\tilde{f}(y_0)=\tilde{x}_0$.

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X},\tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

证明 我们已经看到 (*) 是存在提升 $\tilde{f}$ 的必要条件.

现在我们假设 (*) 成立. 为证明提升的存在性，我们任取 $y\in Y$. 由 Y 的道路连通性，存在一条 Y 中的从 y_0 到 y 的道路 γ. 于是 $f\circ\gamma$ 是一条 X 中的以 x_0 为起点的道路，从而可以被唯一提升为 $\widetilde{X}$ 中以 $\tilde{x}_0$ 为起点的道路 $\widetilde{f\circ\gamma}$. 定义

$$\tilde{f}(y)=\widetilde{f\circ\gamma}(1).$$

下面我们证明 $\tilde{f}:Y\to\widetilde{X}$ 就是我们所求的提升. 因为由定义我们有 $\tilde{f}(y)\in p^{-1}(f(y))$, 我们仅需要验证 $\tilde{f}$ 是良定的并且是连续的.

- **[$\tilde{f}$ 是良定的]**: 设 γ' 是 Y 中从 y_0 到 y 的另一条道路. 则 $(f\circ\gamma')*(\overline{f\circ\gamma})=f\circ(\gamma'*\bar{\gamma})$ 是 X 中以 x_0 为基点的圈，且满足

$$[(f\circ\gamma')*(\overline{f\circ\gamma})]_p=f_*([\gamma'*\bar{\gamma}]_p)\in f_*(\pi_1(Y,y_0))\subset p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)).$$

因此存在一个道路同伦 $F:[0,1]\times[0,1]\to X$ 连接了圈 $(f\circ\gamma')*(\overline{f\circ\gamma})$ 和 “X 中以 x_0 为基点某个形如 $\gamma_1=p\circ\tilde{\gamma}_1$ 的圈 γ_1”，其中 $\tilde{\gamma}_1$ 是 $\widetilde{X}$ 中以 $\tilde{x}_0$ 为基点的一个圈. 我们可以道路同伦 F 提升成起点为 $\widetilde{F}(s,0)=\tilde{x}_0$ 的道路同伦 $\widetilde{F}:[0,1]\times[0,1]\to\widetilde{X}$. 我们有

  - $\widetilde{F}(0,t)$ 是以 $\tilde{x}_0$ 为起点的道路 $F(0,t)=(f\circ\gamma')*(\overline{f\circ\gamma})$ 的唯一提升. 由道路提升的唯一性，我们必然有 $\widetilde{F}(0,t)=(\widetilde{f\circ\gamma'})*(\widetilde{\overline{f\circ\gamma}})$, 其中 $\widetilde{\overline{f\circ\gamma}}$ 是道路 $\overline{f\circ\gamma}$ 的

以 $\widetilde{f\circ\gamma'}(1)$ 为起点的唯一提升.

- 同理 $\widetilde{F}(1,t)$ 是 γ_1 的以 $\tilde{x}_0$ 为起点的唯一提升，因此我们有 $\widetilde{F}(1,t)=\tilde{\gamma}(t)$.

因为 $\widetilde{F}$ 是道路同伦，故 $\widetilde{F}(0,1)=\widetilde{F}(1,1)$，即

$$(\widetilde{f\circ\gamma'})*(\widetilde{\overline{f\circ\gamma}})(1)=\widetilde{F}(0,1)=\widetilde{F}(1,1)=\tilde{\gamma}(1)=\tilde{x}_0.$$

由此 $(\widetilde{\overline{f\circ\gamma}})(1)=\tilde{x}_0$. 因此 $\overline{(\widetilde{\overline{f\circ\gamma}})}$ 是以 $\tilde{x}_0$ 为起点的 $f\circ\gamma$ 的提升，由道路提升的唯一性，$\overline{(\widetilde{\overline{f\circ\gamma}})}=\widetilde{f\circ\gamma}$. 从而有

$$\widetilde{f\circ\gamma}(1)=\overline{(\widetilde{\overline{f\circ\gamma}})}(1)=(\widetilde{\overline{f\circ\gamma}})(0)=\widetilde{f\circ\gamma'}(1).$$

- **[$\tilde{f}$ 是连续的]**: 我们首先固定一条从 y_0 到 y 的道路 γ. 取 $f(y)$ 的邻域 $U\subset X$ 以及 $\tilde{f}(y)$ 的邻域 $\widetilde{U}\subset\widetilde{X}$，使得 $p|_{\widetilde{U}}:\widetilde{U}\to U$ 是一个同胚. 由 Y 的局部道路连通性, 我们可以找到一个 y 的道路连通开邻域 $V\subset f^{-1}(U)$. 对于任意 $y'\in V$, 我们令 λ 是 V 中从 y 到 y' 的一条道路. 则 $f\circ\lambda$ 是 U 中的一条从 $f(y)$ 从 $f(y')$ 的道路. 因为 $p|_{\widetilde{U}}$ 是一个同胚，$\widetilde{f\circ\lambda}=(p|_{\widetilde{U}})^{-1}\circ f\circ\lambda$ 是 $f\circ\lambda$ 的以 $\tilde{f}(y)$ 为起点的唯一提升.

  因为 $\widetilde{f\circ\gamma}$ 是 $\widetilde{X}$ 中从 $\tilde{x}_0$ 到 $f(y)$ 的一条道路，道路 $(\widetilde{f\circ\gamma})*(\widetilde{f\circ\lambda})$ 是道路 $(f\circ\gamma)*(f\circ\lambda)=f\circ(\gamma*\lambda)$ 的以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升道路. 因为 $\gamma*\lambda$ 是 Y 中一条从 y_0 到 y' 的道路, 由 $\tilde{f}$ 的定义，我们有

$$\tilde{f}(y')=(\widetilde{f\circ\gamma})*(\widetilde{f\circ\lambda})(1)=(p|_{\widetilde{U}})^{-1}\circ f\circ\lambda(1)=(p|_{\widetilde{U}})^{-1}\circ f(y').$$

  由此可得 $\tilde{f}(V)\subset\widetilde{U}$ 且 $\tilde{f}|_V=(p|_{\widetilde{U}})^{-1}\circ f$. 因此 $\tilde{f}$ 在 V 上连续. □

¶ 应用：零伦的判定

我们给出提升存在性的一个简单应用：

命题 3.7.15.（球到圆的映射零伦）

对任意 $n\geq 2$，任意连续映射 $f:S^n\to S^1$ 是零伦的.

证明 因为 $\mathrm{Im}(f_*)=\{e\}$, f 可以被提升到映射 $\tilde{f}:S^n\to\mathbb{R}$. 但是因为 $\mathbb{R}$ 是可缩的，因此 $\tilde{f}$ 是零伦的，从而 $f=p\circ\tilde{f}$ 也是零伦的. □

翻译成同伦群的语言，该命题告诉我们：对于任意 $n\geq 2$，有 $\pi_n(S^1)=\{e\}$.

¶ 在复分析中的一个应用

我们之前就已经看到指数映射

$$\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

是一个覆叠映射. 现在我们尝试去定义**复对数函数**. 我们知道，对于 $0\neq z=re^{i\theta}$, 我们有一个多值函数 $\log z=\ln r+i(\theta+2k\pi)$（$k\in\mathbb{Z}$）. 现在我们希望对于某些给定的子集 $U\subset\mathbb{C}^*$, 定义一个 (单值的) 复函数 $\log:U\to\mathbb{C}$，使得

$$\exp\circ\log=\mathrm{Id}.$$

核心观察：因为 $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ 是覆叠映射，所以如果在 U 上存在单值的对数函数 $\log : U \to \mathbb{C}$，那么它就是嵌入映射 $\iota : U \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ 的提升映射.

根据提升存在性的判别准则：

(1) 因为 $\mathrm{Id}_*(\pi_1(\mathbb{C}^*)) \not\subset \exp_*(\pi_1(\mathbb{C}))$，故 $\mathrm{Id} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ 不能被提升，从而 $\log$ 不能被定义在 $\mathbb{C}^*$ 上.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ \mathbb{C}^* \arrow[ur, dashed, "\nexists\log"] \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{C} \arrow[d, "\exp"] \\ U \arrow[ur, dashed, "\exists\log?"] \arrow[r, "i"'] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

(2) 对数函数 $\log : U \to \mathbb{C}$ 存在当且仅当

$$i_*(\pi_1(U)) \subset \exp_*(\pi_1(\mathbb{C})) = \{e\},$$

即当且仅当 $i_*(\pi_1(U)) = \{e\}$，即U 不包含任何环绕原点的圈. 特别地，我们看到

- 若区域 $U \subset \mathbb{C}^*$ 单连通，则 $\log$ 是良好定义的（但单连通并非必要条件）.
- 若 $i_*(\pi_1(U)) = \{e\}$，即 U 不包含任何环绕原点的圈. 则对于任意 t，函数

$$z^t = e^{t\log z}$$

是在 U 上良定的连续函数. 注意：$F(t,z) := z^t$ 不是一个在 S^1 上良定的函数，因而并不是 S^1 上的恒等映射和常值映射之间的同伦.

类似地，对于任意正整数 $d > 1$, 映射

$$p_d : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad z \mapsto z^d$$

是一个 p-重覆叠映射，而 $z \mapsto z^{1/d}$ 是在该覆叠映射下包含映射 ι 的提升：

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^* \arrow[d, "p_d(z)=z^d"] \\ \mathbb{C}^* \arrow[ur, dashed, "\nexists z^{1/d}"] \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{C}^* \arrow[d, "p_d(z)=z^d"] \\ U \arrow[ur, dashed, "\exists z^{1/d}?"] \arrow[r, "i"'] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

于是，由

$$(p_d)_*(\pi_1(\mathbb{C}^*)) \simeq d\mathbb{Z} \not\supset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathrm{Id}_*(\pi_1(\mathbb{C}^*))$$

可知不存在定义在整个 $\mathbb{C}^*$ 上的映射 $z^{1/d}$. 事实上，重复之前的论证，易见 $z^{1/d}$ 在 $U \subset \mathbb{C}^*$ 上良定的当且仅当 U 不包含任何环绕原点的圈（因为 $i_*(\pi_1(U))$ 要么是 $\mathbb{Z}$ 要么是 $\{e\}$）.

更一般地，给定任意多项式 $f = f(z)$, 记 Z_f 是 f 的零点集. 我们可以问：

问题：能否在区域 $U \subset \mathbb{C} \setminus Z_f$ 上定义 $f^{1/d}$?

答案是：$f^{1/d}$ 在 U 上良定当且仅当

$$f_*(\pi_1(U)) \subset d\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \simeq \pi_1(\mathbb{C}^*).$$

例如，如果 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n}$ 为实数，并且

$$f(z) = (z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_{2n}),$$

那么我们可以在集合

$$U = \mathbb{C} \setminus \cup_{1\le k\le n}[a_{2k-1}, a_{2k}]$$

上定义 $\sqrt{f(z)}$，因为 U 中每条闭曲线必然环绕 f 的零点偶数次，从而 $[\gamma]_p$ (和 $f_*([\gamma]_p)$)

是一个“偶”的类. 这个事实在黎曼面 (Riemann surface) 的理论中扮演了重要角色.

3.7.3 用覆叠计算基本群

¶ 基本群与终点集

下面我们用覆叠空间的方法去研究底空间的基本群. 在第 3.5 节中我们用覆叠映射

$$p:\mathbb{R}\to S^1,\quad t\mapsto e^{2\pi it},$$

证明了 $\pi_1(S^1,1)\simeq\mathbb{Z}$, 其中 $\mathbb{Z}$ 实际上是所有 $\tilde{\gamma}_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $t\mapsto nt$ 的终点，换言之，作为集合，$\mathbb{Z}=p^{-1}(1)$. 一般情况下，我们有

命题 3.7.16.（基本群与终点集）

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 为一个覆叠映射，$\tilde{x}_0\in\widetilde{X}$ 且 $x_0=p(\tilde{x}_0)$. 我们定义**提升对应**

$$\alpha:\pi_1(X,x_0)\to p^{-1}(x_0),\qquad \alpha([\gamma]):=\tilde{\gamma}(1)\ \in p^{-1}(x_0)$$

其中 $\tilde{\gamma}$ 是 γ 的满足条件 $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{x}_0$ 的唯一提升. 则

(1) $\alpha:\pi_1(X,x_0)\to p^{-1}(x_0)$ 是良定的.

(2) 如果 $\widetilde{X}$ 是道路连通的，那么 α 是满射.

(3) 如果 $\widetilde{X}$ 是单连通的，那么 α 是双射. [a]

[a]注：这可以告诉我们基本群这个集合有多“大”，但并没有告诉我们群结构.

证明

(1) 因为 $\tilde{\gamma}$ 是 γ 的提升，$p(\tilde{\gamma}(1))=\gamma(1)=x_0$. 因此

$$\tilde{\gamma}(1)\in p^{-1}(x_0).$$

现在假设 $\gamma'\in[\gamma]_p$, 即 $\gamma'\underset{p}{\sim}\gamma$. 由道路提升引理，$\gamma'$ 可被唯一提升为具有起点 $\tilde{x}_0$ 的道路 $\tilde{\gamma}'$. 由同伦提升引理，$\tilde{\gamma}'$ 与 $\tilde{\gamma}$ 是道路同伦的，从而 $\tilde{\gamma}'(1)=\tilde{\gamma}(1)$. 因此映射 α 是良定的.

(2) 设 $\widetilde{X}$ 是道路连通的. 对于任意 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$, 令 λ 为 $\widetilde{X}$ 中从 $\tilde{x}_0$ 到 $\tilde{x}_1$ 的道路，则 $\gamma=p\circ\lambda:I\to X$ 是一个以 x_0 为基点的圈，从而 $[\gamma]_p\in\pi_1(X,x_0)$. 由道路提升的唯一性，$\gamma$ 的满足 $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{x}_0$ 的提升 $\tilde{\gamma}$ 必然是道路 λ. 由此可得

$$\alpha([\gamma]_p)=\tilde{\gamma}(1)=\lambda(1)=\tilde{x}_1.$$

因此 α 是满射.

(3) 最后设 $\widetilde{X}$ 单连通，γ,γ' 都是以 x_0 为基点的圈并且

$$\alpha([\gamma]_p)=\alpha([\gamma']_p).$$

也就是说，若 $\tilde{\gamma}$ 和 $\tilde{\gamma}'$ 分别是 γ 和 γ' 的以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升，那么 $\tilde{\gamma}(1)=\tilde{\gamma}'(1)$. 于是 $\tilde{\gamma}*\overline{\tilde{\gamma}'}$ 是 $\widetilde{X}$ 中以 $\tilde{x}_0$ 为基点的圈. 因为 $\widetilde{X}$ 是单连通的，我们有

$$\tilde{\gamma}*\overline{\tilde{\gamma}'}\underset{p}{\sim}c_{\tilde{x}_0}.$$

故

$$\gamma * \overline{\gamma'} = p(\tilde{\gamma} * \overline{\tilde{\gamma}'}) \underset{p}{\sim} p(c_{\tilde{x}_0}) = c_{x_0}.$$

因此我们得到 $[\gamma]_p = [\gamma']_p \in \pi_1(X, x_0)$, 即 α 是单射.

$\square$

注 3.7.17. 更一般地，在 $\widetilde{X}$ 不是单连通时，可以证明：$\pi_1(X, x_0)$ 的子群 $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ 的指标是 $|p^{-1}(x_0)|$. 换句话说，存在一个 $\pi_1(X, x_0)$ 中 $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ 的陪集到纤维 $p^{-1}(x_0)$ 之间的双射.

¶ 在万有覆叠空间上的群作用 $\rightsquigarrow$ 基本群

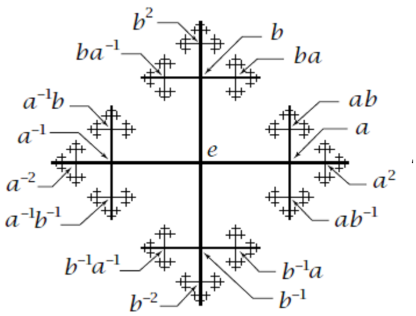
因为单连通的覆叠空间非常重要，我们定义

定义 3.7.18.（万有覆叠空间）

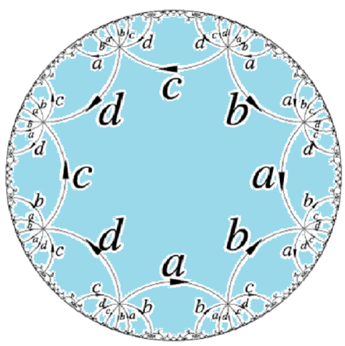
如果 $\widetilde{X}$ 是 X 的覆叠空间，且 $\widetilde{X}$ 是单连通的，则我们称 $\widetilde{X}$ 是 X 的**万有覆叠空间**（universal covering space）. ♣

例 3.7.19.

- $\mathbb{R}$ 是 S^1 的一个万有覆叠，而 S^1 并不是.
- S^2 是 S^2 的一个万有覆叠, $\mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{T}^2$ 的一个万有覆叠，单位圆盘 D 是 $\Sigma_2 = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$ 的一个万有覆叠 (如下所示)[16].
- S^n 是 $\mathbb{RP}^n$ $(n \geq 2)$ 的一个万有覆叠. S^3 是 $L(p; q)$ 的一个万有覆叠. $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 的一个万有覆叠[17].
- $S^1 \vee S^1$ 的万有覆叠是 $\langle a, b \rangle$ 的 Cayley 图，如下所示. [18]



The universal covering of $S^1 \vee S^1$



The universal covering of $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$

¶ 在万有覆叠空间上的群作用 $\rightsquigarrow$ 基本群

如果 $\widetilde{X}$ 是 X 的万有覆叠, 那么作为集合，我们有

$$\pi_1(X, x_0) = p^{-1}(x_0).$$

[16]根据**单值化定理**, D 是所有 Σ_n 的万有覆叠，其中 $n \geq 2$.

[17]一般地，**旋量群** $Spin(n)$ 是 $SO(n)$ 的一个万有覆叠，其中 $n \geq 3$.

[18]一般地，由 n 个生成元生成的自由群的 Cayley 图是 $S^1 \vee \cdots \vee S^1$ 的一个万有覆叠.

这里没有给出 $\pi_1(X,x_0)$ 的群结构，因为我们在 $p^{-1}(x_0)$ 上没有群结构. 然而，如果覆叠映射是由某个群作用给出的商映射，那么我们将会有一个群结构：

命题 3.7.20.（群作用与基本群的群结构）

设群 G 在 $\widetilde{X}$ 上的作用是纯不连续的，从而 $p:\widetilde{X}\to X=\widetilde{X}/G$ 为覆叠映射，则

(1) 对于任意 $x_0\in X=\widetilde{X}/G$ 以及 $\widetilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$，存在一个群同态

$$\beta:\pi_1(X,x_0)\to G.$$

(2) 如果 $\widetilde{X}$ 是道路连通的，那么 β 是满射，.

(3) 如果 $\widetilde{X}$ 是单连通的，那么 β 是双射.

证明 令 $\alpha:\pi_1(X,x_0)\to p^{-1}(x_0)$ 为由 $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ 确定的提升对应. 由 (★) 和定义，对于任意 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$, 存在唯一元素 $g\in G$ 使得 $g\cdot\tilde{x}_0=\tilde{x}_1$. 记

$$\rho:p^{-1}(x_0)\to G,\ \tilde{x}_1\mapsto g,$$

于是我们得到一个映射

$$\beta=\rho\circ\alpha:\pi_1(X,x_0)\to G,\qquad [\gamma]\xmapsto{\alpha}\tilde{\gamma}(1)=\tilde{x}_1\xmapsto{\rho}g\in G$$

因为 $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)\xleftrightarrow{\rho}g\in G$ 是双射，从命题3.7.16中得到 (2) 和 (3).

现在我们证明 β 是一个群同态. 为此我们令 $g_1=\beta([\gamma_1]_p),g_2=\beta([\gamma_2]_p)$，即

$$g_1\cdot\widetilde{x}_0=\widetilde{\gamma}_1(1),\qquad g_2\cdot\widetilde{x}_0=\widetilde{\gamma}_2(1).$$

则 $g_1\cdot\widetilde{\gamma}_2$ 是 $\widetilde{X}$ 中从 $g_1\cdot\widetilde{x}_0=\widetilde{\gamma}_1(1)$ 到 $g_1\cdot\widetilde{\gamma}_2(1)=g_1g_2\cdot\widetilde{x}_0$ 的一条道路. 由道路提升唯一性可知 $\widetilde{\gamma}_1*(g_1\cdot\widetilde{\gamma}_2)$ 是 $\widetilde{X}$ 中 $\gamma_1*\gamma_2$ 的以 x_0 为起点的提升, 即

$$\widetilde{\gamma_1*\gamma_2}=\widetilde{\gamma}_1*(g_1\cdot\widetilde{\gamma}_2).$$

于是 $\widetilde{\gamma_1*\gamma_2}(1)=g_1\cdot\widetilde{\gamma}_2(1)=g_1g_2\cdot\widetilde{x}_0$. 从而由定义我们得到

$$\beta([\gamma_1]_p\cdot[\gamma_2]_p)=\beta([\gamma_1*\gamma_2]_p)=\rho((\widetilde{\gamma_1*\gamma_2})(1))=g_1g_2=\beta([\gamma_1]_p)\beta([\gamma_2]_p),$$

从而完成了证明. □

作为推论，我们立刻得到

推论 3.7.21

- $\pi_1(\mathbb{RP}^n)\simeq\mathbb{Z}_2$.
- $\pi_1(L(p;q))\simeq\mathbb{Z}_p$.

有了这些基本群，我们马上得到

推论 3.7.22.（更多的零伦）

任意从 $\mathbb{RP}^2$ 或者 $L(p;q)$（$p>1$）映到 S^1 的连续映射都是零伦的.

证明 因为从 $\mathbb{Z}_2$ 或 $\mathbb{Z}_p$ 到 $\mathbb{Z}$ 的群同态一定是平凡同态，故我们有 $\mathrm{Im}(f_*)=\{e\}$，从而可以被提升为到 $\mathbb{R}$ 的映射 $\widetilde{f}$. 因为 $\mathbb{R}$ 可缩，所以 $\widetilde{f}$ 是零伦映射，于是 $f=p\circ\widetilde{f}$ 也零伦. □

3.8 覆叠空间的分类

3.8.1 万有覆叠

设 $p:(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是覆叠映射. 由命题3.7.11, 我们知道 $p_*:\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi_1(X,x_0)$ 是单同态. 因此 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群 $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0))$ 同构于 $\pi_1(\widetilde{X},\tilde{x}_0)$. 在本节中我们将建立 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群与 X 的覆叠空间之间的 (反序) 一一对应. 我们先从 $\pi_1(X,x_0)$ 中最小的子群即 $\{e\}$ 开始. 由定义3.7.18, 若 X 的覆叠空间 $\widetilde{X}$ 满足 $\pi_1(\widetilde{X})\simeq\{e\}$, 则我们称 $\widetilde{X}$ 是 X 的**万有覆叠**. 我们首先证明（在适当的条件下）万有覆叠空间的存在性, 最终我们会发现它确实是 X 的 "最大" 的覆叠空间.

¶ 万有覆叠的存在性

给定拓扑空间 X, 我们想要构造它的万有覆叠空间. 然而, 并非每个空间都有万有覆叠空间. 事实上, 若 $p:\widetilde{X}\to X$ 是一个万有覆叠, 则对于任意 $x\in X$, 存在 x 的邻域 U 和 $\widetilde{X}$ 中一个开集 $\widetilde{U}$ 使得 $p|_{\widetilde{U}}:\widetilde{U}\to U$ 是一个同胚. 于是 U 每个圈 γ 能够通过映射 $(p|_{\widetilde{U}})^{-1}$ 被提升成 $\widetilde{U}$ 中的一个圈 $\tilde{\gamma}$. 因为 $\pi_1(\widetilde{X})=\{e\}$, 提升的圈 $\tilde{\gamma}$ 在 $\widetilde{X}$ 中是零伦的. 复合上投影映射 p 后, 我们发现 γ 必然是 X 中的零伦圈. 于是我们得到存在万有覆叠的必要条件:

对于任意 x, 存在 x 的一个邻域 U 使得 U 中的任意圈在 X 中都是零伦的.

用基本群的语言来说, 该条件意味着包含映射 $i:U\hookrightarrow X$ 诱导的群同态 $i_*:\pi_1(U,x)\to\pi_1(X,x)$ 是平凡同态, 即 $i_*(\pi_1(U,x))=\{e\}$. (粗略地讲, 这表明 X 不能有任意小的 "洞" .) 我们把满足该条件的拓扑空间称为半局部单连通空间: [19]

定义 3.8.1. (半局部单连通)

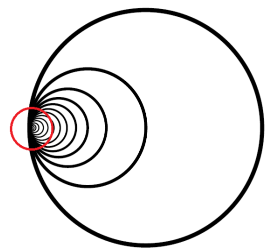
若对于任意 $x\in X$, 存在 x 的邻域 U 使得包含映射 $i:U\hookrightarrow X$ 的诱导同态 i_* 满足

$$i_*(\pi_1(U,x))=\{e\},$$

则我们称 X 是**半局部单连通空间** (semi-locally simply connected space). ♣

于是由上述讨论知, 拓扑空间 X 具有万有覆叠的必要条件是它是半局部单连通的. 注意如果 $i_*(\pi_1(U,x))=\{e\}$ 而 $x\in V\subset U$, 则我们自动有 $i_*(\pi_1(V,x))=\{e\}$.

例 3.8.2. 我们在习题 1.4 中见过的**夏威夷耳环** (Hawaii earing)X 是如图所示的一族越来越小的圆所构成的空间. 它是道路连通且局部道路连通的, 但是不是半局部单连通的, 因此它不存在万有覆叠. 另一方面, 夏威夷耳环的锥空间 $C(X)$ 是可缩的, 因此是半局部单连通的, 但却不是局部单连通的.



[19] 照例, 如果对于 X 中任意点 x 的任意邻域 V, 都存在 x 的邻域 $U\subset V$, 使得 U 是单连通的, 则我们称 X 是**局部单连通的** (locally simply connected). 这个条件比半局部单连通强, 因为它要求 U 中的任意圈在 U 中是零伦的, 而半局部单连通则只要求 U 中的任意圈在 X 中是零伦的.

下面我们证明半局部单连通条件也是充分的:

定理 3.8.3.（万有覆叠的存在性）

假设 X 是道路连通且局部道路连通的，那么 X 存在万有覆叠 $\widetilde{X}$ 当且仅当 X 是半局部单连通的.

思路. 如何从 S^1 出发构造拓扑空间 $\mathbb{R}$? 在 S^1 中固定起点 $x_0=1$，在 $\mathbb{R}$ 中固定起点 $\tilde{x}_0=0$. 则 $\mathbb{R}$ 中任意一点都是 S^1 中一条道路的提升道路的终点，且两条提升道路具有相同终点当且仅当它们投影到 S^1 的道路是道路同伦的. 因此 $\mathbb{R}$ 中的点与 S^1 上的道路同伦类是一一对应的!

那么，如何在道路同伦类空间上定义拓扑呢? 一种备选是取道路空间上的紧开拓扑，然后取同伦类空间上的商拓扑. 但是为了我们的目的即得到覆叠（局部同胚），我们采取另一种更为直接的方法: 先证明“局部上”商映射是双射，然后选定 S^1 的一组由“很小的开集”组成的拓扑基，并将这些集合的“提升”定义为道路同伦类空间的开集，用它们在道路同伦类空间生成一个拓扑基. 这就是我们所需要的.

证明 我们已经看到半局部单连通是必要条件. 下面证明充分性.

第零步. 术语: 基本开集.

为简单起见，若 U 是 X 中的道路连通开集，且 $i_*(\pi_1(U,x))=\{e\}$，则我们称 U 是 X 中的基本开集. 注意任意 $x\in X$ 都有邻域是基本开集: 由半局部单连通性，存在 x 的邻域 V 使得 $i_*(\pi_1(V,x))=\{e\}$. 再由局部道路连通性，存在 x 的更小的邻域 $U\subset V$ 使得 U 是道路连通的. 于是 U 就是 x 的一个基本开邻域.

第一步. 构造集合 $\widetilde{X}$.

设 X 道路连通，局部道路连通且半局部单连通，$x_0\in X$. 我们定义

$$\widetilde{X}=\{[\gamma]_p\mid \gamma \text{ 是以} x_0 \text{ 为起点的一条} X \text{ 中的道路}\}.$$

考虑投影映射

$$p:\widetilde{X}\to X,\quad [\gamma]_p\to\gamma(1).$$

因为 X 道路连通，所以 p 是满射.

第二步. p 是“局部”双射.

对于任意起点 $\gamma(0)=x_0$ 的道路 $\gamma:[0,1]\to X$, 令 $U\subset X$ 为 $\gamma(1)$ 的一个基本开邻域. 考虑

$$U_{[\gamma]_p}=\{[\gamma*\lambda]_p\mid \lambda \text{ 是 } U \text{ 中满足} \lambda(0)=\gamma(1) \text{ 的一条道路}\}\subset\widetilde{X}.$$

注意 $U_{[\gamma]_p}$ 是良定的，即仅依赖于集合 U 跟道路同伦类 $[\gamma]_p$，而不依赖于同伦类中道路 γ 的选取. 我们有

(a) 如果 $[\gamma']_p\in U_{[\gamma]_p}$，那么 $U_{[\gamma]_p}=U_{[\gamma']_p}$.

原因: 设 $[\gamma']_p=[\gamma*\lambda]_p$, 则 $U_{[\gamma']_p}$ 中的元素都形如 $[\gamma*\lambda*\lambda']_p$, 从而在 $U_{[\gamma]_p}$ 中. 同理 $U_{[\gamma]_p}$ 中的元素都形如 $[\gamma*\lambda']_p=[\gamma*\lambda*\bar{\lambda}*\lambda']_p$, 从而也在 $U_{[\gamma']_p}$ 中.

(b) 映射 $p_{U,[\gamma]_p}=p|_{U_{[\gamma]_p}}:U_{[\gamma]_p}\to U$ 是双射.

原因：因为 U 是道路连通的，所以 $p_{U,[\gamma]_p}(U_{[\gamma]_p})=U$，即 $p_{U,[\gamma]_p}$ 是满射. 下证它是单射. 若 $p_{U,[\gamma]_p}([\gamma*\lambda_1]_p)=p_{U,[\gamma]_p}([\gamma*\lambda_2]_p)=x$，则 λ_1 和 λ_2 都是 U 中从 $\gamma(1)$ 到 x 道路，于是 $\overline{\lambda_1}*\lambda_2$ 是 U 中的圈，从而在 X 中是零伦的，于是 $[\gamma*\lambda_1]_p=[\gamma*\lambda_1*\overline{\lambda_1}*\lambda_2]_p=[\gamma*\lambda_2]_p$. 即 $p_{U,[\gamma]_p}$ 是单射.

第三步. 在 $\widetilde{X}$ 上定义拓扑.

为了在 $\widetilde{X}$ 上定义一个拓扑，我们首先考虑 X 中的开集族

$$\mathcal{U}=\{U\subset X\mid U\text{ 是基本开集.}\}$$

则 $\mathcal{U}$ 是 X 的拓扑的一个拓扑基：由命题1.4.10，只需验证“对于 X 中任意开集 V 以及 $x\in V$，存在 x 的基本开邻域 U 使得 $x\in U\subset V$”. 为此，我们只要取 x 的任意一个基本开邻域 V_1，然后取 U 为 $V_1\cap V$ 的包含 x 的道路连通分支即可.

断言： 集族

$$\widetilde{\mathcal{U}}:=\{U_{[\gamma]_p}\mid U\in\mathcal{U},\gamma\text{ 是}X\text{ 中一条从}x_0\text{ 到}U\text{中某点的道路}\}$$

构成了 $\widetilde{X}$ 上的一个拓扑基.

原因：显然这些集合之并是 $\widetilde{X}$. 现在假设 $[\gamma'']_p\in U_{[\gamma]_p}\cap V_{[\gamma']_p}$，则 $\gamma''(1)\in U\cap V$. 因为 $\mathcal{U}$ 是 X 上的一组拓扑基，存在集合 $W\in\mathcal{U}$ 使得 $\gamma''(1)\in W\subset U\cap V$. 根据第二步的 (a), 我们有 $U_{[\gamma]_p}=U_{[\gamma'']_p}$ 和 $V_{[\gamma']_p}=V_{[\gamma'']_p}$. 由此可得

$$[\gamma'']_p\in W_{[\gamma'']_p}\subset U_{[\gamma'']_p}\cap V_{[\gamma'']_p}=U_{[\gamma]_p}\cap V_{[\gamma']_p}.$$

第四步. p 是一个覆叠映射.

我们在第二步已经看到了 $p_{U,[\gamma]_p}:U_{[\gamma]_p}\to U$ 是双射. 进一步的，对于任意基本开集 $V\subset U$，以及任意满足 $\gamma'(1)\in V$ 的道路同伦类 $[\gamma']_p\in U_{[\gamma]_p}$，我们有 $V_{[\gamma']_p}\subset U_{[\gamma]_p}$，且 $p_{U,[\gamma]_p}|_{V_{[\gamma']_p}}=p_{V_{[\gamma']_p}}$，于是 $p_{U,[\gamma]_p}$ 同样也给出了从 $V_{[\gamma']_p}\subset U_{[\gamma]_p}$ 到 V 的双射. 由此可知，关于第三步所构造的拓扑，$p_{U,[\gamma]_p}:U_{[\gamma]_p}\to U$ 是一个同胚.

因为 p 在每个开集 $U_{[\gamma]_p}$ 上是连续的, 所以 $p:\widetilde{X}\to X$ 是连续的. 又因为对于任意 $U\in\mathcal{U}$，$p^{-1}(U)=\bigcup_{[\gamma]_p}U_{[\gamma]_p}$, 且由第二步的结论 (a)，该并集是无交并，故 p 是覆叠映射

第五步. $\widetilde{X}$ 是道路连通的.

我们取常值道路类 $[\gamma_{x_0}]_p$ 作为 $\widetilde{X}$ 中的基点. 对于任意起点 $\gamma(0)=x_0$ 的道路 $\gamma:[0,1]\to X$，我们令 $\gamma_t(s)=\gamma(st)$, 则 γ_t 是起点为 x_0 的道路，从而我们得到一个映射

$$f:[0,1]\to\widetilde{X},\qquad f(t):=[\gamma_t]_p.$$

下证 f 是 $\widetilde{X}$ 中一条连接 $[\gamma_{x_0}]_p$ 和 $[\gamma]_p$ 的道路，从而 $\widetilde{X}$ 是道路连通的. 为此我们只要证明

断言： f 是连续的.

原因：任取 $U_{[\gamma']_p}$. 设 $f(t_0)\in U_{[\gamma']_p}$，即 $[\gamma_{t_0}]_p\in U_{[\gamma']_p}$，则存在 U 中起点为 $\gamma'(1)$ 而终点为 $\gamma_{t_0}(1)$ 的道路 λ，使得 $[\gamma_{t_0}]_p=[\gamma'*\lambda]_p$. 由 γ 的连续性，存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\gamma(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\subset U$. 对于任意 $t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$，令 λ_t 为沿着 γ 从 $\gamma(t_0)$ 到 $\gamma(t)$ 的道路，则由 U 是基本开集可知 $[\gamma_t]_p=[\gamma_{t_0}*\lambda_t]_p=[\gamma'*\lambda*\lambda_t]$，即对于任意 $t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ 都有 $f(t)\in U_{[\gamma']_p}$. 这就证明了 f 的连续性.

第六步. $\widetilde{X}$ 是单连通的.

设 $f:[0,1]\to\widetilde{X}$ 是基点为常值道路同伦类 $[\gamma_{x_0}]_p$ 的任意圈，则 $p\circ f$ 是 X 中基点为 x_0 的一个圈. 我们想要证明 f 是零伦的. 注意到 p_* 是单同态，故只需证明 $[p\circ f]_p=p_*([f]_p)=e$. 为此，我们在 $\widetilde{X}$ 中找一条连接 $[\gamma_{x_0}]_p$ 和 $[p\circ f]_p$ 的道路：令

$$\mu_t:[0,1]\to X \qquad \mu_t(s):=p\circ f(st).$$

则 μ_t 为 X 中起点为 x_0 的道路，且 $\mu_1=p\circ f$. 由第五步的断言，

$$g:[0,1]\to\widetilde{X}, \qquad g(t):=[\mu_t]_p$$

是连续映射，从而是 $\widetilde{X}$ 中一条从 $[\gamma_{x_0}]_p$ 到 $[p\circ f]_p$ 的道路. 我们有

$$p(g(t))=p([\mu_t]_g)=\mu_t(1)=p\circ f(t),$$

即道路 g 是圈 $p\circ f$ 在 $\widetilde{X}$ 中以 $[\gamma_{x_0}]_p$ 为起点的提升. 另一方面，根据定义，f 也是 $p\circ f$ 的以 $[\gamma_{x_0}]_p$ 为起点的提升. 由道路提升的唯一性，我们有 $g(t)=f(t)$. 于是我们得到

$$[p\circ f]_p=[\mu_1]_p=g(1)=f(1)=[\gamma_{x_0}]_p=e\in\pi_1(X,x_0).$$

因此 $p\circ f$ 是零伦的，从而 $\widetilde{X}$ 是单连通的. □

3.8.2 覆叠空间的分类

在构造了万有覆叠空间以后，下面我们建立 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群和 X 的覆叠空间之间的一一反序对应. 该理论被称为覆叠空间的 Galois 理论，因为它跟代数中所学的域论中的Galois 理论的基本定理有很大的相似性：

- Galois 理论的基本定理：对于给定的域 k 及其有限 Galois 扩张 E/k，在介于 k 与 E 的中间域扩张 F 与 Galois 群 $Gal(E/k)$ 的子群之间有一一反序对应.
- 覆叠空间的 Galois 理论：对于道路连通，局部道路连通且半局部单连通空间 X，在 X 的覆叠空间与基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群之间有一一反序对应.

¶ 具有一般基本群的覆叠空间的存在性

首先我们证明对于 $\pi_1(X,x_0)$ 的任意子群 H，存在一个以 H 为基本群的覆叠空间：

定理 3.8.4.（一般覆叠空间的存在性）

设 X 是道路连通，局部道路连通且半局部单连通空间. 则对于 $\pi_1(X,x_0)$ 的任意子群 H, 存在 X 的覆叠空间 $p:\widetilde{X}_H\to X$ 和基点 $\tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)$ 使得

$$p_*(\pi_1(\widetilde{X}_H,\tilde{x}_0))=H.$$

♡

证明 给定 $\pi_1(X,x_0)$ 的子群 H，我们在所构造的 X 的万有覆叠空间 $\widetilde{X}$ 中定义等价关系

$$[\gamma]_p \underset{H}{\sim} [\gamma']_p \iff \gamma(1)=\gamma'(1) \text{ 且} [\gamma*\bar{\gamma}']_p\in H.$$

因为 H 是一个子群，不难验证这是一个等价关系. 我们定义 $\widetilde{X}_H$ 为商空间

$$\widetilde{X}_H=\widetilde{X}/\underset{H}{\sim},$$

并且令 $\tilde{x}_0 \in \widetilde{X}_H$ 为包含 $[\gamma_{x_0}]_p$ 的等价类. 只需要验证

- 由 $[\gamma]_p \mapsto \gamma(1)$ 诱导的自然投射 $p : \widetilde{X}_H \to X$ 是一个覆叠映射.

  原因: 假设 $[\gamma]_p \underset{H}{\sim} [\gamma']_p$, 并且假设 $U \subset X$ 是 $\gamma(1)$ 的基本开邻域. 则对于 U 中任意满足 $\lambda(0) = \gamma(1)$ 的道路 λ, $\lambda * \bar{\lambda}$ 在 X 中是零伦的, 从而

  $$[\gamma * \lambda * \overline{\gamma' * \lambda}]_p = [\gamma * \lambda * \bar{\lambda} * \overline{\gamma'}]_p = [\gamma * \overline{\gamma'}]_p \in H,$$

  即 $[\gamma * \lambda]_p \underset{H}{\sim} [\gamma' * \lambda]_p$. 换言之, 邻域 $U_{[\gamma]_p}$ 和 $U_{[\gamma']_p}$ 在 $\widetilde{X}_H$ 中是相同的. 因此由 $\widetilde{X}$ 是 X 的一个覆叠空间可知 p 是一个覆叠映射.

- $p_*(\pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_0)) = H$.

  原因: 令 γ 为 X 中以 x_0 为基点的一个圈. 根据定理3.8.3证明的第六步, γ 在 $\widetilde{X}$ 中以 $\tilde{x}_0 = [\gamma_{x_0}]_p$ 为起点的提升道路 $\tilde{\gamma}$ 的终点是 $[\gamma]_p$. 因此这个提升的道路 $\tilde{\gamma}$ 在商映射 $\widetilde{X} \to \widetilde{X}_H$ 下的像 $\tilde{\gamma}_H$ 是 $\widetilde{X}_H$ 中的圈当且仅当 $[\gamma]_p \underset{H}{\sim} [\gamma_{x_0}]_p$, 即当且仅当 $[\gamma]_p \in H$. 另一方面, $\tilde{\gamma}_H$ 恰好是 γ 在 $\widetilde{X}_H$ 中的提升, 从而由习题 3.7, $\tilde{\gamma}_H$ 是圈当且仅当 $[\gamma]_p \in p_*(\pi_1(\widetilde{X}_H, \tilde{x}_0))$. 于是结论得证.

□

¶ 覆叠空间的同构

在证明了子群 $H \subset \pi_1(X, x_0)$ 与 X 的覆叠空间之间的对应的存在性后, 接下来我们研究这种对应的唯一性. 我们需要如下定义以区分 X 上不同的覆叠空间.

定义 3.8.5. (覆叠空间同构)

设 $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ 和 $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ 是 X 上的两个覆叠空间. 如果存在一个同胚 $h : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ 使得

$$p_1 = p_2 \circ h,$$

则我们称这两个覆叠空间是**同构的** (isomorphic), 并称映射 h 为一个**覆叠空间同构** (covering space isomorphism). ♣

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X}_1 \arrow[rr, "h", "\simeq"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

注 3.8.6.

(1) 不难验证同构关系是 X 上所有覆叠空间所构成的集合上的等价关系.

(2) 设 $p : \widetilde{X} \to X$ 为一个覆叠空间, 则

$$\mathrm{Aut}(p) := \{h : \widetilde{X} \to \widetilde{X} \mid h \text{是一个覆叠空间的同构}\}$$

在映射的复合下构成了一个群.

定义 3.8.7. (覆叠变换群)

我们称群 $\mathrm{Aut}(p)$ 为覆叠映射 $p : \widetilde{X} \to X$ 的**覆叠变换群** (covering transformation group). [该群也被称为该覆叠的 **Deck 变换群**或 **Galois 群**.] ♣

对于任意纤维 $p^{-1}(x)$，根据定义覆叠变换群 $\mathrm{Aut}(p)$ 的每个元素都给出了 $p^{-1}(x)$ 中元素的一个置换. 注意由道路提升的唯一性，只要 $h \in \mathrm{Aut}(p)$ 不是恒等映射（且 $\widetilde{X}$ 道路连通），则该置换没有不动点.

现在假设 $h : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ 是一个 X 上覆叠空间的同构. 那么对于任意 $x_0 \in X$, h 是一个从集合 $p_1^{-1}(x_0)$ 到集合 $p_2^{-1}(x_0)$ 之间的一一映射. 特别地，如果我们选取 $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ 并且令 $\tilde{x}_2 = h(\tilde{x}_1) \in p_2^{-1}(x_0)$, 则如下“带标定点的图表”交换：

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \arrow[rr, "h", "\simeq"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \arrow[dl, "p_2"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

即 $p_2 \circ h = p_1, p_1 \circ h^{-1} = p_2$. 对这两个等式应用基本群的函子性，我们得到

$$(p_1)_*(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_*(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)).$$

这给出了同一个拓扑空间 X 上两个覆叠空间之间存在（保基点）同构的必要条件：同构的覆叠空间对应于 $\pi_1(X, x_0)$ 中相同的子群.

¶ 覆叠空间的唯一性

下面我们证明在同构的意义下，具有给定基本群的覆叠空间是唯一的：

命题 3.8.8.（覆叠空间的唯一性）

设 X 是道路连通且局部道路连通的拓扑空间，那么 X 的两个道路连通的覆叠空间 $p_1 : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ 和 $p_2 : (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ 之间存在保基点的覆叠空间同构 $h : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ 当且仅当

$$(p_1)_*(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = (p_2)_*(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)).$$

♠

证明 刚才已经证明了必要性，下证充分性，即如果条件成立，那么存在一个覆叠空间的同构 $h : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)$. 由提升存在性的判别准则，我们可以将 p_1 提升为一个连续映射 $\tilde{p}_1 : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)$，使得

$$p_1 = p_2 \circ \tilde{p}_1.$$

类似地，我们将 p_2 提升为连续映射 $\tilde{p}_2 : (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)$，使得

$$p_2 = p_1 \circ \tilde{p}_2.$$

由提升的唯一性，我们得到

$$\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}_2} \quad 且 \quad \tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = \mathrm{Id}_{\widetilde{X}_1}.$$

因此 $\tilde{p}_1$ 就是我们所寻找的覆叠同构. □

特别地，我们得到：对于任意道路连通，局部道路连通且半局部单连通空间，其万有覆叠空间在同构的意义下是唯一的.

¶ 覆叠空间的分类

结合定理3.8.4和命题3.8.8，我们得到

定理 3.8.9.（带基点覆叠空间的分类定理）

设 X 为道路连通，局部道路连通且半局部单连通拓扑空间. 那么对应关系

$$(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \quad \rightsquigarrow \quad p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

给出了集合

$$\{\text{道路连通覆叠空间 } p : (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0) \text{ 在保基点同构下的同构类}\}$$

与集合

$$\{\pi_1(X, x_0) \text{ 的子群}\}$$

之间的一个一一对应，且该对应是反序的，即如果 $p_1 : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (X, x_0)$ 和 $p_2 : (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2) \to (X, x_0)$ 是 X 的两个道路连通覆叠空间，则

$$(p_1)_*(\pi_1(\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset (p_2)_*(\pi_1(\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2))$$

当且仅当存在一个覆叠映射 $p_3 : (\widetilde{X}_1, \tilde{x}_1) \to (\widetilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ 使得 $p_1 = p_2 \circ p_3$. ♡

我们还可以忽略对应中的基点，此时我们有

定理 3.8.10.（无基点的覆叠空间分类定理）

设 X 是道路连通，局部道路连通且半局部单连通的拓扑空间. 那么集合

$$\{\text{道路连通覆叠空间 } p : \widetilde{X} \to X \text{ 的同构类}\}$$

和集合

$$\{\pi_1(X, x_0) \text{ 的子群的共轭类}\}$$

之间存在一一对应. ♡

证明 由习题 3.7，对于一个覆叠空间 $p : (\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$, 如果我们将基点从 $\tilde{x}_0$ 变为 $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, 两个子群 $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ 和 $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1))$ 是彼此共轭的.

另一方面，假设我们给定任意子群 $H = p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0))$ 和任意 $H' = g^{-1}Hg$, 其中 $g = [\gamma]_p \in \pi_1(X, x_0)$. 我们令 $\tilde{\gamma}$ 为 γ 的以 $\tilde{x}_0$ 为起点的提升，并且记 $\tilde{x}_1 = \tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(x_0)$, 则不难证明 $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_1)) = g^{-1}Hg$. □

作为覆叠空间分类定理的推论，我们可以说明为什么万有覆叠空间是“万有”的:

推论 3.8.11.（万有覆叠的万有性）

如果 $\widehat{X}$ 是 X 的一个万有覆叠空间，并且 $\widetilde{X}$ 是 X 的任意覆叠空间，那么 $\widehat{X}$ 是 $\widetilde{X}$ 的 (万有) 覆叠空间. ♡

¶ 在代数中的应用：Nielsen-Schreier 定理

应用覆叠空间理论及图的基本群的结论，可以给出如下代数定理的简单拓扑证明:

定理 3.8.12.（Nielsen-Schreier 定理）

自由群的任意子群都是自由群. ♡

证明 [概要] 设 F 是自由群，而 H 是它的一个子群. 取一个线性图 G 使得 $\pi_1(G) \simeq F$. 可以验证 G 道路连通，局部道路连通且半局部单连通. 因此存在覆叠空间 $p : \widetilde{G} \to G$ 使得 $\pi_1(\widetilde{G}, \widetilde{e}) \simeq H$. 但 $\widetilde{G}$ 也是线性图，故 $\pi_1(\widetilde{G})$ 是自由群.（参见 Munkres 的书 §83 和 §84.）□

¶ 应用：寻找所有的覆叠空间

由分类定理，我们可以通过基本群得到一个拓扑空间的所有覆叠空间.

例 3.8.13. 因为

$$\pi_1(\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{e, a\} \oplus \{e, b\}$$

的子群为

$$\{e\}, \{e, a\}, \{e, b\}, \{e, ab\}, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

所以 $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m$ 全部的覆叠空间是：

$$S^n \times S^m, \quad \mathbb{RP}^n \times S^m, \quad S^n \times \mathbb{RP}^m, \quad \mathbb{RP}^n \times \mathbb{RP}^m, \quad S^n \times S^m/(v, w) \sim (-v, -w).$$

第 4 章 几何拓扑中的几个重要定理

4.1 Brouwer 不动点定理

4.1.1 Brouwer 不动点定理

¶ Brouwer 不动点定理

在第 3.6 节我们证明了二维 Brouwer[1] 不动点定理，即任意连续映射 $f : \overline{D} \to \overline{D}$ 都有一个不动点, 其中 $\overline{D}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中闭圆盘. 下面我们要证明任意维数的 Brouwer 不动点定理.[2] 该定理是数学中最重要的存在性定理之一，并在微分方程、泛函分析、经济学、博弈论等领域有着广泛的应用. 事实上，随着人们证明越来越多的不动点定理，目前不动点定理已经发展成数学的一个分支.

我们记 $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ 以及 $\overline{B^n} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant 1\}$.

定理 4.1.1.（Brouwer 不动点定理）

对于任意连续映射 $f : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$, 存在 $p \in \overline{B^n}$ 使得 $f(p) = p$. ♡

由习题 3.3 中我们知道，Brouwer 不动点定理蕴含了任意 S^n（$n \geq 1$）是不可缩的.

注 4.1.2.

(1) 对于拓扑空间 X，如果任意连续映射 $f : X \to X$ 都有一个不动点，则我们称 X 具有**不动点性质**（fixed point property）. 显然，不动点性质是一个拓扑性质. 因此任意同胚于 $\overline{B^n}$ 的拓扑空间 X 都有不动点性质.

(2) 显然，以下空间都没有不动点性质：

- 平面圆环 $A_{r,R} = \overline{B(R)} \setminus B(r)$（考虑旋转映射）, 它不是单连通的,
- S^n (考虑对径点映射)，它是单连通的但却不可缩,
- 开球 B^n（考虑往边界上一点的“收缩”映射)，它是可缩的但却非紧.

在 1932 年 Borsuk 猜想任意紧可缩区域都有不动点性质，但是 1953 年 Kinoshita 给出了一个反例.

Brouwer 不动点定理有多种证明. Brouwer 原始的证明是基于映射度的概念，而对于一般连续映射定义映射度往往需要代数拓扑中的同调理论. 该证明将在代数拓扑课程中介绍，而本书中尚未建立起相关的工具. 该定理还可以用组合学的 Sperner 引理予以证

[1] 布劳威尔 (L. E. J. Brouwer，1881-1966)，荷兰数学家、哲学家，在拓扑学、集合论、测度论、复分析等领域有突出贡献，被誉为二十世纪最杰出的数学家之一. 布劳威尔在拓扑学方面的主要贡献是我们本节即将证明的不动点定理以及区域/维数不变性定理，以及下一节将要提到的 Jordan 曲线定理的高维推广即 Jordan-Brouwer 定理. 有意思的是，虽然 Brouwer 是是数学哲学领域直觉主义流派的创始人，坚持数学对象必须可以构造，并不承认排中律，但他关于 Brouwer 不动点定理的证明却并非构造性的.（事实上，在进一步发展他的直觉主义观点之后，Brouwer 本人已经开始否定自己关于不动点定理的证明. ）

[2] 该定理 $n = 3$ 的情况最早是在 1904 年由拉脱维亚数学家 P. Bohl 证明，但他的文章没有引起注意. 后来在 1909 年由 Brouwer 再次给出了 $n = 3$ 时的证明. 在 1910 年，Hadamard 首次证明了一般情形，同年 Brouwer 采用不同的方法证明了该定理. Brouwer 方法的创新性在于他系统性地应用了来自代数拓扑的工具.

明. 下面我们将给出基于“微分拓扑”的证明. 这个证明最早是由 J. Milnor[3]给出的，后被 Rogers 简化过. 其证明思路是:

- 首先证明一个“简单”版本，即该定理对光滑映射成立.
- 然后通过逼近定理将连续映射约化到光滑映射的情形.

我们在本书中选用这个证明的原因有两条：第一、我们希望通过这个证明，介绍拓扑学的另一个分支即“微分拓扑”的基本思想；第二、这个证明是一个纯“初等”的证明（即不涉及到高深的工具），而在（本定理以及下个定理）证明中我们将看到在本书前半部分所学的点集拓扑知识是如何应用的.

¶ 光滑性的优势

通常对于光滑映射证明一个定理要比对连续映射证明该定理要简单很多，因为我们有一个非常强有力的工具：微分（即线性逼近).

回顾一下：如果 $U\subset\mathbb{R}^n, V\subset\mathbb{R}^m$ 是开集且

$$f=(f_1,\cdots,f_m):U\to V$$

是一个 C^1 映射, 那么 f 在 $x\in U$ 处的微分 $\mathrm{d}f_x$ 是一个线性映射

$$\mathrm{d}f_x=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,$$

$$\vec{v}\mapsto \mathrm{d}f_x(\vec{v})=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\vec{v}=\left(\sum_j\frac{\partial f_1}{\partial x_j}v_j,\cdots,\sum_j\frac{\partial f_m}{\partial x_j}v_j\right)^T.$$

在数学分析中我们已经看到了

- $\mathrm{d}(f\circ g)_x=\mathrm{d}f_{g(x)}\circ \mathrm{d}g_x$,
- $\mathrm{d}(\mathrm{Id}_U)_x=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

因此微分 d 是一个从“对象为（带标定点的）欧氏空间区域、态射为 C^1 映射的范畴”到“对象为线性空间、态射为线性映射的范畴”的函子. 为了直观地看到微分的优势，我们用微分的函子性来证明（这不过是再次证明“函子把等价的对象变为等价的对象”）

定理 4.1.3.（维数不变性定理，光滑版本）

令 $U\subset\mathbb{R}^n, V\subset\mathbb{R}^m$ 为开集. 如果 $m\neq n$, 那么不存在 C^1 微分同胚 $f:U\to V$ [a].

[a] 如果 f 是可逆的 C^1 映射且 f^{-1} 也是 C^1 的，则我们称它是一个 C^1 **微分同胚**（C^1 diffeomorphism）.

证明 假设 $f:U\to V$ 是一个 C^1 微分同胚. 通过取微分我们得到线性映射, $\mathrm{d}f_x:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 和 $(\mathrm{d}f^{-1})_{f(x)}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. 由函子性,

$$f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_V\Longrightarrow \mathrm{d}f_x\circ\mathrm{d}f^{-1}_{f(x)}=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}$$

$$f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_U\Longrightarrow \mathrm{d}f^{-1}_{f(x)}\circ\mathrm{d}f_x=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}.$$

因此线性映射 $\mathrm{d}f_x$ 和 $\mathrm{d}f^{-1}_{f(x)}$ 互为逆映射, 从而 $m=n$. □

[3] 米尔诺（John Milnor, 1931-），杰出的美国数学家，主要研究微分拓扑，K 理论和动力系统，先后获得过菲尔兹奖 (1962)、沃尔夫奖 (1989)、阿贝尔奖 (2011). 他在 1956 年发现具有非标准微分结构的七维怪球，从此微分拓扑开始作为拓扑学的一个独立分支蓬勃发展.

在数学分析中我们学过，微分还有一个非常重要的性质，即反函数定理，我们可以粗略地把它解释为函子 d 具有很高的"保真性"：

定理 4.1.4.（反函数定理）

若 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开集，$f:U\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射，且 df_x 是可逆线性映射，则存在 x 的邻域 $U_x\subset U$ 以及 $f(x)$ 的邻域 V_x 使得 $f:U_x\to V_x$ 是微分同胚. ♡

一般地，若对于任意 $x\in U$，都存在 x 的邻域 $U_x\subset U$ 以及 $f(x)$ 的邻域 V_x 使得 $f:U_x\to V_x$ 是微分同胚，则我们称 f 是一个**局部微分同胚**（local diffeomorphism）. 由定义易知任意局部微分同胚都是开映射，作为推论，我们马上得到

推论 4.1.5.（区域不变性，光滑版本）

若 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开集，$f:U\to\mathbb{R}^n$ 是 C^1 映射，且对于任意 $x\in U$，df_x 是可逆线性映射，则 f 是开映射. ♡

一个自然的问题是：什么时候局部微分同胚是一个整体微分同胚？我们有

命题 4.1.6.（双射 + 局部微分同胚 $\Longrightarrow$ 微分同胚）

若 C^1 映射 $f:U\to V$ 在任意 x 附近都是局部微分同胚，且 f 是双射，则 f 是微分同胚. ♠

证明是显然的：为了证明 f^{-1} 是 C^1 映射，只需证明它在任意 $f(x)$ 附近是 C^1 映射，而这是由反函数定理保证的. 细节留作习题.

¶ 从"无光滑收缩"到 Brouwer 的不动点定理

下面我们证明 Brouwer 不动点定理. 在证明之前让我们重温我们在第 3.6 节给出的 $n=2$ 时 Brouwer 不动点定理的论证，该定理的整个证明分三步：

(1) 首先我们证明 $\pi_1(S^1)\cong\mathbb{Z}$,

(2) 其次我们证明 $\pi_1(S^1)\neq\{e\}\Longrightarrow$ "不存在收缩映射 $r:\overline{D}\to S^1$",

(3) 最后我们证明"不存在收缩映射 $r:\overline{D}\to S^1$" $\Longrightarrow$ Brouwer 不动点定理（$n=2$）.

前两步跟基本群有关，显然无法用在高维，因为我们已经知道当 $n\geq 2$ 时有 $\pi_1(S^n)=\{e\}$. 但第三步跟维数关系不大，我们回顾一下：

> 如果对于任意 $p\in\overline{D}$ 都有 $f(p)\neq p$, 那么存在一个收缩映射 $r:\overline{D}\to S^1$，其表达式如下
> $$r(p)=p+\lambda(p)(p-f(p)).$$
> 如果作进一步的计算，我们不难得到
> $$\lambda(p)=\frac{-p\cdot(p-f(p))+\left[(p\cdot(p-f(p)))^2+|p-f(p)|^2(1-|p|^2)\right]^{\frac{1}{2}}}{|p-f(p)|^2}.$$

关键的观察:

- 对于任意维数，可以用同样的方法构造 r，且 $\lambda(p)$ 具有相同表达式.

- 上式分子 $[\cdots]^{\frac{1}{2}}$ 中的项是正的，从而如果 f 是 C^1 的，则映射 $r:\overline{D}\to S^1$ 是 C^1 的.

于是重复该论证，我们得到

结论 1 ：若不存在从 $\overline{B^n}$ 到 S^{n-1} 的 C^1 收缩，则任意 C^1 映射 $f:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 有不动点.

接下来我们通过用光滑映射逼近连续映射的方法，证明

结论 2 ：若任意 C^1 映射 $f:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 有不动点，则任意连续映射 $f:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 有不动点.

证明 令 $f:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 为连续映射. 由 Stone-Weierstrass 定理，对于任意 $l\in\mathbb{N}$ 存在一个光滑映射 (实际上可取为“多项式”) $p_l:\overline{B^n}\to\mathbb{R}^n$ 使得

$$|p_l(x)-f(x)|<\frac{1}{l},\quad \forall x\in\overline{B^n}.$$

这样得到的 p_l 的像集可以落在单位球的外面，但是我们可以通过定义

$$f_l:=\frac{l}{l+1}p_l$$

将其收缩至单位球内. 于是 $f_l:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 是 C^1 的，且 f_l 在 $\overline{B^n}$ 上一致收敛到 f.

根据条件，对于任意的 l，存在 $x_l\in\overline{B^n}$ 使得 $f_l(x_l)=x_l$. 取一个收敛子列满足 $x_{l_i}\to x_0$, 我们得到

$$f(x_0)=\lim_{i\to\infty}f_{l_i}(x_{l_i})=\lim_{i\to\infty}x_{l_i}=x_0.$$

于是结论得证. □

由结论 1 和结论 2，我们把 Brouwer 不动点定理化归为如下光滑版本的“无收缩定理”:

定理 4.1.7. (无光滑收缩)

不存在 C^1 映射 $f:\overline{B^n}\to S^{n-1}$ 使得 $f|_{S^{n-1}}=\mathrm{Id}$. ♡

¶ 无光滑收缩：证明

下面我们证明“无光滑收缩”定理。其证明思路如下：假设存在一个光滑收缩 f. 因为 $\overline{B^n}$ 是凸集，我们可以找到一个具体的 C^1-同伦 f_t 连接恒等映射 Id 和收缩映射 f. 为了找到矛盾，我们需要仔细研究某个在该同伦下变化的量. 例如，我们可以研究体积 $\mathrm{Vol}(f_t(\overline{B^n}))$ 的变化. 一方面当 $t=1$ 上我们有 $\mathrm{Vol}(f_1(\overline{B^n}))=0$. 另一方面当 t 很小时 f_t “接近于” $f_0=\mathrm{Id}$，我们可以想象此时 $\mathrm{Vol}(f_t(\overline{B^n}))\equiv\mathrm{Vol}(\overline{B^n})$. 不过 $\mathrm{Vol}(f_t(\overline{B^n}))$ 跟 t 的依赖关系并不明确. 因此我们可以先假装 f_t 是微分同胚，并应用积分的换元公式，改而研究 $F(t)=\int_{\overline{B^n}}\det(df_t)_x dx$.

【无光滑收缩定理的证明】

证明 假设存在一个 C^1 映射 $f:\overline{B^n}\to S^{n-1}$ 使得

$$f|_{S^{n-1}}=\mathrm{Id}.$$

对于 $t\in[0,1]$, 我们令 $f_t:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 为如下连接恒等映射 $\mathrm{Id}_{\overline{B^n}}$ 和 f(视为到 $\overline{B^n}$ 的映射) 的同伦,

$$f_t(x)=(1-t)x+tf(x)=x+t(f(x)-x)=:x+tg(x).$$

为了研究这一族映射的微分关于 t 的变化并最终导出矛盾，我们定义

$$F:[0,1]\to\mathbb{R},\qquad F(t)=\int_{B^n}\det(\mathrm{d}f_t)_x\,\mathrm{d}x=\int_{B^n}\det(I+t\mathrm{d}g_x)\,\mathrm{d}x.$$

由线性代数，F 是关于 $t\in[0,1]$ 的一个多项式.

一方面，在 $t=1$ 时我们有

$$f_1(x)=f(x)\in S^{n-1},\quad \forall x\in\overline{B^n}.$$

因此对于任意 $x\in B^n$，以及任意 $|\vec{v}|<1-|x|$（从而 $x+t\vec{v}\in\overline{B^n}$），我们有

$$2\langle(\mathrm{d}f_1)_x\vec{v},f_1(x)\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\langle f_1(x+t\vec{v}),f_1(x+t\vec{v})\rangle=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}1=0.$$

于是

$$\mathrm{Im}((\mathrm{d}f_1)_x)\subset f_1(x)^{\perp}=\{u\in\mathbb{R}^n\mid u\perp f_1(x)\}.$$

这说明 $\mathrm{rank}((\mathrm{d}f_1)_x)\leqslant n-1$, 从而 $\det((\mathrm{d}f_1)_x)=0,\forall x\in B^n$. 故

$$F(1)=\int_{B^n}\det(\mathrm{d}f_1)_x\,\mathrm{d}x=0,$$

另一方面，由于 $f_0|_{\overline{B^n}}=\mathrm{Id}$, 我们有理由猜测

断言: $\exists t_0>0$ 使得对于 $0\leqslant t\leqslant t_0$, $f_t:\overline{B^n}\to\overline{B^n}$ 是一个 C^1-微分同胚.

我们首先假设这个断言是成立的. 由变量代换公式，

$$F(t)=\int_{f_t(\overline{B^n})}\mathrm{d}x=\mathrm{Vol}(\overline{B^n}),\quad \forall t\in[0,t_0].$$

因此 F 是一个在区间 $[0,t_0]$ 上为常值的多项式. 于是由例3.1.7或者由代数基本定理，F 必然对所有的 $t\in[0,1]$ 都恒等于该常值. 特别地，

$$F(1)=\mathrm{Vol}(\overline{B^n})>0,$$

从而得到矛盾. □

【断言的证明】

证明 记 $g(x)=f(x)-x$，则 $f_t(x)=x+tg(x)$.

我们首先证明存在 $t_1>0$ 使得 f_t 在 $t\in[0,t_1]$ 上是单射. 假设存在 $x_1\neq x_2$, 使得 $f_t(x_1)=f_t(x_2)$, 则

$$|x_1-x_2|=t|g(x_1)-g(x_2)|.$$

由于 f 是 C^1 的，g 同样是 C^1 的. 因此存在 $C>0$ 使得

$$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant C|x_1-x_2|,\quad \forall x_1,x_2\in\overline{B^n}.$$

由此可得

$$|x_1-x_2|\leqslant Ct|x_1-x_2|.$$

因为 $x_1\neq x_2$，所以我们得到 $t\geq t_1:=\frac{1}{C}$. 换言之，如果$t<t_1$，那么f_t 是 单射.

接着我们证明存在 $t_2>0$ 使得 f_t 在 $t\in[0,t_2]$ 上是满射. 因为 $\det(\mathrm{d}f_t)$ 关于 t 是连续的，且 $\det(\mathrm{d}f_0)=1$, 所以存在 $t_2>0$ 使得

$$\det(\mathrm{d}f_t)>0,\quad \forall t\in[0,t_2].$$

于是由定理4.1.4以及推论4.1.5，当 $t\in[0,t_2]$ 时映射 $f_t:B^n\to\mathbb{R}^n$ 是局部微分同胚，从

而是开映射. 特别地,

$$G_t := f_t(B^n)$$

是开集. 下面我们证明当 $t < t_2$ 时, $G_t = B^n$. 我们再次运用反证法, 假设 $G_t \neq B^n$. 取 $y_0 \in \partial G_t \cap B^n$. 取 $x_l \in B^n$ 使得 $f_t(x_l) \to y_0$. 由 $\overline{B^n}$ 的紧性, 存在一个子列

$$x_{l_i} \to x_0 \in \overline{B^n}.$$

由 f_t 的连续性, $f_t(x_0) = y_0$. 由于 G_t 是开集, $y_0 \notin G_t$. 从而我们必然有 $x_0 \notin B^n$, 即 $x_0 \in S^{n-1}$. 因此我们有

$$y_0 = f_t(x_0) = x_0 \in S^{n-1}.$$

这与 $y_0 \in B^n$ 矛盾.

最后取 $t_0 = \min\{t_1, t_2\}$. 则我们已经证明了当 $t \in [0, t_0]$ 时 f_t 是双射且是局部微分同胚, 所以由命题4.1.6, 对于任意 $t \in [0, t_0]$, f_t 是一个 C^1 的微分同胚. □

¶ Brouwer 不动点定理: 第二种形式

下面我们给出 Brouwer 不动点定理的另一种被广泛应用的形式:

定理 4.1.8. (Brouwer 不动点定理, 第二形式)

令 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为非空的紧凸集. 那么任意连续映射 $f : K \to K$ 都有一个不动点. ♡

证明思路如下 (细节留作习题): 通过平移, 我们可以假设 $0 \in K$. 令 $V = \mathrm{span}_{\mathbb{R}} K$. 那么 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间, 因此存在 m 使得 $V \simeq \mathbb{R}^m$. 此外, $K \subset V$ 不位于 V 中任何真超平面, 因此 K 有非空内点. [这个事实需要证明.] 从而由 K 的凸性得到 $K \simeq \overline{B^m}$.

¶ 在无穷维的 Brouwer 不动点: 一个反例

一个自然的问题是: Brouwer 不动点定理对于无穷维空间是否成立?

例 4.1.9. 考虑 l^2-空间

$$X = l^2 = \{(a_1, a_2, \cdots) \mid \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty\}.$$

在第 1.1 节中, 我们已经看到了 X 是度量空间, 其度量为

$$d((a_i), (b_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2}.$$

记 l^2 中的单位球为 $\overline{B} = \overline{B(0,1)}$. 考虑映射

$$f : \overline{B} \to \overline{B}, \quad a = (a_1, a_2, \cdots) \mapsto (\sqrt{1 - \|a\|_2^2}, a_1, a_2, \cdots).$$

那么 f 是连续的, 因为当 $d(a, b) \to 0$ 我们有

$$[d(f(a), f(b))]^2 = (\sqrt{1 - \|a\|_2^2} - \sqrt{1 - \|b\|_2^2})^2 + \|a - b\|_2^2 \to 0.$$

然而, f 没有不动点: 如果 $f(a) = a$, 那么

$$a_1 = a_2 = \cdots = \sqrt{1 - \|a\|_2^2},$$

而这组方程无解.

¶ (阅读材料) 无穷维版本的不动点定理：Schauder 不动点定理

以上论证表明不动点定理的原始形式在无穷维空间中不成立. 一个原因在于：l^2 闭单位球是非紧的. 不过，1930 年 J. Schauder [4] 证明了不动点定理的第二形式 (其中我们用紧凸集取代闭单位球) 在无穷维空间中成立：

定理 4.1.10.（Schauder 不动点定理）
令 $\emptyset \neq K$ 为赋范向量空间 V 中的紧凸集. 则任意连续映射 $f: K \to K$ 有不动点. ♡

证明 因为 K 是度量空间中的紧集，对于任意 $\varepsilon > 0$ 可以找到一个 K 的有限的 ε-网 $\{x_1, \cdots, x_n\}$. 对于任意 $x \in K$ 和 $1 \leqslant i \leqslant n$ 我们定义

$$\rho_i(x) = \begin{cases} 0, & d(x, x_i) > \varepsilon, \\ \varepsilon - d(x, x_i), & d(x, x_i) \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

显然每个 ρ_i 是连续的，并且对于任意的 $x \in K$, 存在 i 使得 $\rho_i(x) > 0$. 于是映射

$$\rho_\varepsilon : K \to K, \quad x \mapsto \frac{\sum\limits_{i=1}^n \rho_i(x) x_i}{\sum\limits_{i=1}^n \rho_i(x)}$$

是良定的 (这里我们用 K 的凸性)，连续的，且满足

$$d(\rho_\varepsilon(x), x) < \varepsilon, \quad \forall x \in K$$

因为 $\rho_\varepsilon(x)$ 是这些位于 $B(x, \varepsilon)$ 的 x_i 的凸组合. 现在对于每个 n, 考虑有限维线性空间

$$V_n = \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_n\} \subset V.$$

记

$$K_\varepsilon = \mathrm{conv}(x_1, \cdots, x_n)$$

为 $x_1, \cdots, x_n$ 的 (闭) 凸闭包，则 $K_\varepsilon \subset V_n$ 是非空紧凸集，并且 $f_\varepsilon = \rho_\varepsilon \circ f : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$ 是连续的. 因此存在 $x_\varepsilon \in K_\varepsilon \subset K$ 使得 $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. 这蕴含着

$$d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) = d(f_\varepsilon(x_\varepsilon), f(x_\varepsilon)) = d(\rho_\varepsilon(f(x_\varepsilon)), f(x_\varepsilon)) < \varepsilon$$

从而

$$\inf\{d(x, f(x)) | x \in K\} = 0.$$

因为 K 是紧集，上述最小值是可以取到的，即存在 x_0 使得 $f(x_0) = x_0$. □

4.1.2 Browwer 区域不变性定理

¶ Brouwer 的区域不变性和维数的拓扑不变性.

作为 Brouwer 不动点定理的应用，我们可以去掉定理4.1.3中的光滑性假设，证明

[4] 绍德尔（Juliusz Schauder，1899-1943），波兰数学家，波兰利沃夫学派重要成员，主要研究泛函分析及相关领域，以 Schauder 不动点定理、Schauder 基、Leray-Schauder 原理而闻名. 二战期间受纳粹迫害而亡.

定理 4.1.11.（维数的拓扑不变性）

令 $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ 为开集. 如果 $m \neq n$, 那么 $U \not\simeq V$.

虽然这个定理看起来很显然，但它的证明并不容易. 这个定理首先由 Brouwer 证明. 事实上，他证明了下面这个更强的定理：

定理 4.1.12.（Brouwer 区域不变性定理）

如果 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开集，并且 $f: U \to \mathbb{R}^n$ 是连续单射，那么 f 是开映射.

注 4.1.13. 相比于推论4.1.5，这个定理的条件是非常若的. 注意这个定理在 $n = +\infty$ 时失效. 例如，如果我们取

$$f: l^2 \to l^2, \quad (a_1, a_2, \cdots) \mapsto (0, a_1, a_2, \cdots),$$

那么 f 是连续单射，但是 $f(l^2)$ 不是 l^2 中的开集.

【Brouwer 区域不变性 $\Longrightarrow$ 维数的拓扑不变性】

证明 假设存在一个同胚 $f: U \to V$. 不妨设 $n > m$ (否则考虑 f^{-1}). 令

$$i: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \qquad i(x_1, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0).$$

那么连续单射

$$i \circ f: U \to \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

的像集包含于一个真子空间，从而不是开集. 这与 Brouwer 区域不变性定理矛盾. □

¶ Brouwer 区域不变性定理：局部版本及其证明

因为开集是一个局部条件，并且开集的平移和伸缩仍然是开集，因此只要证明以下局部版本就能得到 Brouwer 区域不变性定理.

定理 4.1.14.（Brouwer 区域不变性定理，局部版本）

令 $f: \overline{B^n} \to \mathbb{R}^n$ 为连续单射. 那么 $f(0)$ 位于 $f(\overline{B^n})$ 的内部.

下面我们证明“局部 Brouwer 区域不变性定理”. 其证明思路是：假设 $f(0)$ 不是一个内点，即 $f(\overline{B^n})$ 以外存在任意接近 $f(0)$ 的点. 为了导出矛盾，我们将构造一个连续映射 $h: f(\overline{B^n}) \to \mathbb{R}^n$，使得

(1) h “接近于 f^{-1}”：对于任意 $x \in \overline{B^n}$，都有 $|x - h(f(x))| \leqslant 1$.

(2) $h \circ f$ 没有零点.

由 (1)，我们得到一个连续映射

$$\mathrm{Id} - h \circ f: \overline{B^n} \to \overline{B^n}, \quad x \mapsto x - h(f(x)),$$

而由 (2)，该映射没有不动点，从而得到矛盾！为了构造这样的 h，我们首先构造一个非常接近于 f^{-1} 的连续映射, 然后扰动它使得它在 $f(\overline{B^n})$ 上没有零点.

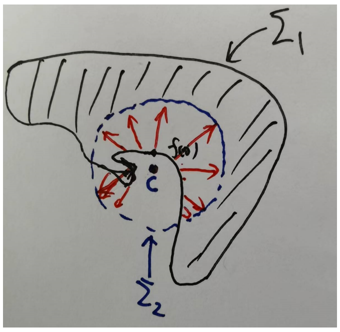
【局部 Brouwer 区域不变性定理的证明】

证明 假设 $f(0)$ 不是 $f(\overline{B^n})$ 的内点. 那么对于任意 $\varepsilon > 0$ (我们将会在稍后选取), 存在

$c \in \mathbb{R}^n \setminus f(\overline{B^n})$ 使得 $|c - f(0)| < \varepsilon$. 记

$$\Sigma_1 = \{y \in f(\overline{B^n}) : |y - c| \geqslant \varepsilon\}, \quad \Sigma_2 = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - c| = \varepsilon\}.$$

那么 $\Sigma := \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ 是紧集，并且 $f(0) \notin \Sigma$.



根据假设, $f : \overline{B^n} \to f(\overline{B^n})$ 是一个从紧集到 Hausdorff 集的可逆连续映射. 因此 f 是一个同胚，即它有一个连续逆 $f^{-1} : f(\overline{B^n}) \to \overline{B^n}$. 因为 $f(\overline{B^n})$ 是紧集，从而也是闭集，根据 Tietze 扩张定理, 存在一个连续映射 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 使得在 $f(\overline{B^n})$ 上有

$$g = f^{-1}.$$

由以上构造,

$$f(0) \notin \Sigma_1 \quad 且 \quad \Sigma_1 \subset f(\overline{B^n}).$$

因此在 Σ_1 上 $g \neq 0$. 由 g 的连续性和 Σ_1 的紧性, 存在 $0 < \delta < \frac{1}{2}$ 使得

$$|g(y)| \geqslant \delta, \quad \forall y \in \Sigma_1.$$

由 Stone-Weierstrass 定理，存在“多项式映射” $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 使得

$$|p(y) - g(y)| < \frac{\delta}{2}, \quad \forall y \in \Sigma.$$

特别地，对于所有的 $y \in \Sigma_1, p(y) \neq 0$. 然而, p 在 Σ_2 上可能为 0. 为了解决这个问题，我们需要轻微地“扰动 p”.

事实 1. 存在 $a_0 \in B(0, \frac{\delta}{2})$ 使得 $a_0 \notin p(\Sigma_2)$.

假设这一点正确. 我们定义 $\widetilde{p} = p - a_0$, 那么在 Σ 上有 $\widetilde{p} \neq 0$, 这是由于

- $|\widetilde{p}(y) - g(y)| < \delta \Rightarrow \widetilde{p}(y) \neq 0, \forall y \in \Sigma_1$.
- 由构造，对于 $y \in \Sigma_2, \widetilde{p}(y) \neq 0$.

因为仍然可能存在一些 $f(\overline{B^n})$ 中的点不在 Σ 中，我们定义

$$\Phi : f(\overline{B^n}) \to \Sigma, \quad y \mapsto \begin{cases} y, & |y - c| \geqslant \varepsilon, \\ c + \varepsilon \frac{y-c}{|y-c|}, & |y - c| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

因为 $c \notin f(\overline{B^n})$, 所以 Φ 是良定的，并且是连续的. 因此若我们令

$$h : f(\overline{B^n}) \to \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto \widetilde{p}(\Phi(y)),$$

则 h 是连续的，并且 $h(y) \neq 0, \forall y \in f(\overline{B^n})$. 另一方面，我们将证明

事实 2. 我们有 $|h(f(x)) - x| \leqslant 1, \forall x \in \overline{B^n}$.

我们依然先假定事实 2 成立. 于是我们得到一个没有不动点的连续映射 $\mathrm{Id} - h \circ f : \overline{B^n} \to \overline{B^n}$，从而得到矛盾！这样就完成了定理的证明. □

最后我们证明事实 1 和事实 2.

【事实 1 的证明】

证明 [测度论的证明.] 因为 p 是一个多项式，它是 C^1 的. 因此 $\exists A>0$ 使得

$$|p(y_1)-p(y_2)| \leqslant A|y_1-y_2|$$

对于任意的 $y_1, y_2 \in B(c, 2\varepsilon)$ 成立. 于是对于任意箱体

$$B := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset B(c, 2\varepsilon),$$

我们有

$$\mathrm{Vol}(p(B)) \leqslant A^n \mathrm{Vol}(B).$$

另一方面，我们能够用很多箱体 $B_1, \cdots, B_m$ 覆盖 $\Sigma_2 = \partial B(c, \varepsilon)$, 且使得

$$\mathrm{Vol}(B_1) + \cdots + \mathrm{Vol}(B_m) \leqslant \frac{1}{A^n} \cdot \frac{1}{2} \mathrm{Vol}(B(0, \frac{\delta}{2})).$$

于是我们可以得到结论

$$\mathrm{Vol}(p(\Sigma_2)) \leqslant \frac{1}{2} \mathrm{Vol}(B(0, \frac{\delta}{2})).$$

因此，存在 $a_0 \in B(0, \frac{\delta}{2})$ 使得 $a_0 \notin p(\Sigma_2)$. □

[注意，同理可知，不存在光滑的 “Peano 曲线” .]

【事实 2 的证明]

证明 我们固定一个足够小的 ε 使得

$$|y - f(0)| < 2\varepsilon \Longrightarrow |g(y)| = |g(y) - g(f(0))| < \frac{1}{4}.$$

根据定义，

$$|\widetilde{p}(y) - g(y)| < \delta, \quad \forall y \in \Sigma.$$

如果 $y = f(x) \in \Sigma_1$, 那么

$$|h(f(x)) - x| = |\widetilde{p}(\Phi(f(x))) - g(f(x))| = |\widetilde{p}(f(x)) - g(f(x))| < \delta < \frac{1}{2}.$$

如果 $y = f(x) \notin \Sigma_1$, 即 $|y - c| < \varepsilon$, 我们有:

- $|g(y)| < \frac{1}{4}$ 是因为 $|y - f(0)| \leqslant |y - c| + |c - f(0)| < 2\varepsilon$,
- $|g(\Phi(y))| < \frac{1}{4}$ 是因为 $|\Phi(y) - f(0)| \leqslant |\Phi(y) - c| + |c - f(0)| < 2\varepsilon$,

从而

$$\begin{aligned} |h(f(x)) - x| &= |h(y) - g(y)| \\ &\leqslant |\widetilde{p}(\Phi(y)) - g(\Phi(y))| + |g(\Phi(y)) - g(y)| < \delta + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1. \end{aligned}$$

这就是我们所需要的. □

¶ 拓扑流形

我们回顾一下拓扑流形的定义:

定义 4.1.15.（拓扑流形）

如果 X 是第二可数的 Hausdorff 空间，且满足局部欧条件，即

- 对于任意 $x \in X$，都存在 x 开邻域 $U_x \subset X$，$\mathbb{R}^n$ 中的开集 $V_x \subset \mathbb{R}^n$ 以及同胚映射 $\varphi_x : U_x \to V_x$，

则我们称 X 是一个 n **维拓扑流形**（topological manifold of dim n），并称三元组 (φ_x, U_x, V_x) 为 x 处的**一个坐标卡**（coordinate chart）. ♣

类似地我们可以定义

定义 4.1.16.（带边拓扑流形）

(1) 如果 X 是第二可数的 Hausdorff 空间，且满足带边版本的局部欧条件，即
- 对于任意 $x \in X$，都存在 x 开邻域 $U_x \subset X$，开集
$$V_x \subset \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) | x_n \geqslant 0\},$$
以及同胚映射 $\varphi_x : U_x \to V_x$，

则我们称 X 是一个 n **维带边拓扑流形**（topological manifold with boundary of dim n），并称三元组 (φ_x, U_x, V_x) 为 x 处的**一个坐标卡**（coordinate chart）.

(2) 若 X 是一个 n 维带边拓扑流形，且存在 x 处的坐标卡 (φ_x, U_x, V_x) 使得 $\varphi_x(x) = (x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$，则我们称 x 是 X 的一个**边界点** (boundary point). X 的所有边界点的集合记为 ∂X，称为带边流形 X 的**边界**（boundary）. ♣

根据区域不变性定理，可以证明（留作习题）

- n 维拓扑流形及 n 维带边拓扑流形的维数 n 是良定的.
- 带边拓扑流形的一个点“是否是边界点”不依赖于坐标卡的选取.

我们知道，拓扑流形都是局部紧的，仿紧的，局部道路连通的，半局部单连通的，可度量化的并且能够嵌入到高维欧式空间. 下面是一些简单的例子：

例 4.1.17.

(1) S^n，B^n，$\mathbb{R}^n$，$\mathbb{RP}^n$ 都是 n 维流形. $\overline{B^n}, [0,1]^n$ 都是 n 维带边流形.

(1) 两个拓扑流形的乘积依然是拓扑流形，维数是两个流形维数之和.

(1) 两个 n-维拓扑流形的连通和仍然是一个 n-维拓扑流形.

(1) $S^2 \vee S^1$ 不是一个拓扑流形. $S^1 \vee S^1$ 也不是.

在接下来的几节，我们主要研究一维、二维（带边或不带边）拓扑流形.

4.2 Jordan 曲线定理

4.2.1 弧和 Jordan 曲线

¶ 弧和 Jordan 曲线

最简单的 1 维紧流形是 S^1, 最简单的 1 维紧带边流形是 $[0,1]$.

定义 4.2.1. (弧与 Jordan 曲线)

(1) 我们称同胚于 $[0,1]$ 的拓扑空间为**简单弧**（simple arc）或 **Jordan 弧**（Jordan arc）.

(2) 我们称同胚于 S^1 的拓扑空间为**简单闭曲线**（simple closed curve）或 **Jordan 曲线**（Jordan curve）.

♣

定义中“简单”表示无自交. 注意弧 (arc)、曲线 (curve) 和道路 (path)、圈 (loop) 的区别：弧、曲线是几何对象 (点集)，而道路、圈是分析对象 (映射).

我们主要研究 $\mathbb{R}^2$ 或 S^2(或曲面) 中的弧和曲线. 我们从三个简单的观察开始：

命题 4.2.2. (补集的连通分支)

设 γ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单弧或简单闭曲线. 那么

(1) $\mathbb{R}^2\backslash\gamma$ 恰好有一个无界连通分支.

(2) $\mathbb{R}^2\backslash\gamma$ 的连通分支就是 $\mathbb{R}^2\backslash\gamma$ 中的道路连通分支.

(3) 对于 $\mathbb{R}^2\backslash\gamma$ 的任意连通分支 A, 我们有 $\partial A\subset\gamma$.

♠

证明 (1) 因为 γ 是紧的, 所以存在 $R>0$ 使得 $\gamma\subset B(0,R)$. 于是连通集 $B(0,R)^c\subset\mathbb{R}^2\backslash\gamma$.

(2) 因为 γ 是紧的，它必然是闭的，从而 $\mathbb{R}^2\backslash\gamma$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开集. 由命题3.2.7，它的连通分支都是道路连通的.

(3) 如果 $x\notin\gamma$, 那么 $x\in\mathbb{R}^2\backslash\gamma$, 从而存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(x,\varepsilon)$ 包含于 $\mathbb{R}^2\backslash\gamma$ 的一个连通分支. 因此 x 不在 $\mathbb{R}^2\setminus\gamma$ 的任何一个连通分支的边界上. 特别地, $x\notin\partial A$. □

¶ 弧不分割性质

一般地，对于一个连通拓扑空间 X 以及子空间 A，如果 $X\setminus A$ 是不连通的，则我们称 A **分割** X(A separates X). 我们首先证明平面上的简单弧无法分割平面：

定理 4.2.3. (弧不分割定理)

对于任意简单弧 $C\subset\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2\setminus C$ 是连通的.

♡

证明 设 $C\subset\mathbb{R}^2$ 为简单弧. 假设 $\mathbb{R}^2\setminus C$ 是不连通的. 根据命题4.2.2(1), $\mathbb{R}^2\setminus C$ 至少有一个有界连通分支 A. 取任意 $x_0\in A$. 取 $r>0$ 充分大使得 $C\subset B(x_0,r)$.

事实. 存在一个收缩映射 $f:\overline{B(x_0,r)}\longrightarrow C$.

原因：根据简单弧的定义，存在一个同胚 $\varphi:[0,1]\longrightarrow C$. 考虑映射 $\varphi^{-1}:C\longrightarrow[0,1]$. 根据 Tietze 扩张定理，存在连续映射 $g:\overline{B(x_0,r)}\longrightarrow[0,1]$ 使得

在 C 上有 $g=\varphi^{-1}$. 现在令 f 为复合映射

$$f=\varphi\circ g:\overline{B(x_0,r)}\xrightarrow{g}[0,1]\xrightarrow{\varphi}C.$$

那么 f 是连续的，并且在 $C\subset\overline{B(x_0,r)}$ 上有 $f=\mathrm{Id}$.

注意到由 r 的选取方式, $A\subset B(x_0,r)$. 我们通过以下方式定义 $h:\overline{B(x_0,r)}\longrightarrow\overline{B(x_0,r)}$,

$$h(x)=\begin{cases}f(x), & x\in\overline{A},\\ x, & x\in A^c\cap\overline{B(x_0,r)}.\end{cases}$$

则 h 在 $\overline{A}$ 和 $A^c\cap\overline{B(x_0,r)}$ 上都是连续的. 由命题4.2.2(3), 交集

$$\overline{A}\cap(A^c\cap\overline{B(x_0,r)})=\partial A\cap\overline{B(x_0,r)}=\partial A$$

是 C 的一个子集. 因此 $x\in\partial A\cap\overline{B(x_0,r)}$ 时 $f(x)=x$, 于是 h 在 $\overline{B(x_0,r)}$ 上连续. 此外,

$$x_0\notin h(\overline{A})\quad\text{且}\quad x_0\notin h(A^c\cap\overline{B(x_0,r)})=A^c\cap\overline{B(x_0,r)}.$$

因此 h 事实上是一个映到 $\overline{B(x_0,r)}\setminus\{x_0\}$ 的连续映射

$$h:\overline{B(x_0,r)}\longrightarrow\overline{B(x_0,r)}\setminus\{x_0\}.$$

将 h 与标准的收缩映射

$$h_1:\overline{B(x_0,r)}\setminus\{x_0\}\longrightarrow\partial B(x_0,r),\quad x\mapsto x_0+r\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$$

复合，我们得到一个连续映射

$$\widetilde{h}=h_1\circ h:\overline{B(x_0,r)}\longrightarrow\partial B(x_0,r).$$

因为当 $x\in\partial B(x_0,r)$ 时 $h(x)=x$，所以此时 $\widetilde{h}(x)=x$，即 $\widetilde{h}$ 是一个收缩映射，矛盾. □

通过类似的论证，可以证明上述定理的高维版本：

定理 4.2.4.（收缩核不分割定理）

设 $K\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集并且是 $\mathbb{R}^n$ 的一个收缩核. 那么 $\mathbb{R}^n\setminus K$ 是连通集. ♡

作为推论，我们可以把命题4.2.2(3)改进为[5]

命题 4.2.5.（补集连通分支的边界）

设 γ 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一条简单弧或简单闭曲线，且 A 是 $\mathbb{R}^2\setminus\gamma$ 的一个连通分支，则 $\partial A=\gamma$. ♠

证明 先设 $\mathbb{R}^2\setminus\gamma$ 是连通的，即 $A=\mathbb{R}^2\setminus\gamma$. 因为 γ 同胚于 $[0,1]$ 或 S^1，所以作为 $\mathbb{R}^2$ 的子集它没有内点. 于是 $\overline{A}=\mathbb{R}^2$，从而 $\partial A=\overline{A}\cap A^c=\gamma$.

再设 $\mathbb{R}^2\setminus\gamma$ 是不连通的，并设 B 是 $\mathbb{R}^2\setminus\gamma$ 的另一个连通分支. 此时 $\gamma=J$ 必然是 Jordan 曲线. 由命题命题4.2.2(3), 我们有 $\partial A\subset J$. 如果假设 $\partial A\neq J$, 那么存在 $a\in J\setminus\partial A$. 由此可得

$$a\notin A\cup\partial A=\overline{A}.$$

[5]在证明命题4.2.2(3)时我们只用了 γ 是闭集这一点，从而该结论对任意闭集都成立. 但是命题4.2.5的结论对于更复杂的集合是不成立的：例如图形“A”.

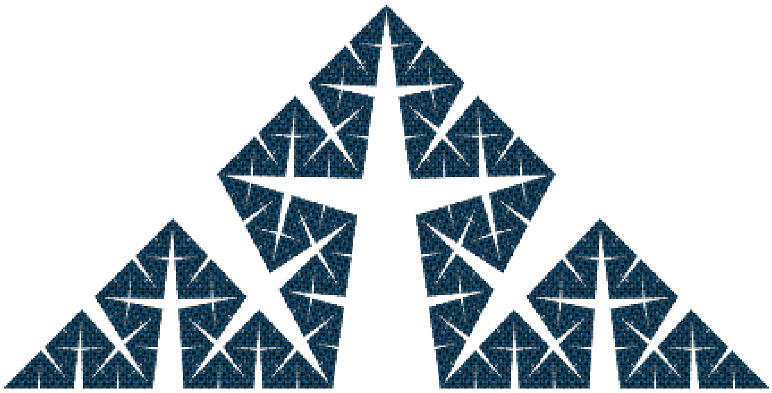
因此存在一个开集 $U \ni a$ 使得 $U \cap A = \emptyset$. 因为 $J \simeq S^1, a \in J, \partial A \subset J$，所以 ∂A 落在包含于 J 内的某条弧 C 中 (这条弧能通过切掉 $J \cap U$ 中包含 a 的一小段弧得到).

由弧不分割定理，$\mathbb{R}^2 \setminus C$ 是连通的. 所以对于任意 $x \in A, y \in B$, 存在一条 $\mathbb{R}^2 \setminus C$ 中从 x 到 y 的道路 β. 于是 $\beta \cap C = \emptyset$. 但这是不可能的，因为如果我们令 $t_0 \in [0,1]$ 为最小的使得 $\beta(t) \in A^c$ 的数，那么 $\beta(t_0) \in \overline{A} \cap A^c = \partial A \subset C$. □

4.2.2 Jordan 曲线定理

¶ Jordan 曲线

虽然根据定义，Jordan 曲线是“简单”的，但几何上它可能非常不简单. 我们已经在引言中看到过这样的例子. 以下有一个更复杂的例子：



这是一条 Jordan 曲线，最早由美国数学家 W. Osgood 发现，因此被称为 Osgood 曲线，它具有正测度. [注意，Peano 曲线不是 Jordan 曲线.]

尽管存在各种复杂的 Jordan 曲线，Jordan 曲线在下述意义下依然是简单的：[6]

定理 4.2.6.（Jordan 曲线定理）

对于任意 Jordan 曲线 $J \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 恰好有两个连通分支, 并且每个连通分支的边界都是 J.

¶ Poincare-Miranda 定理和它的推论

因为 Jordan 曲线定理在低维拓扑以及复分析中非常重要，人们先后给出了很多不同的证明. 我们采用 R. Maehara 在 1984 年给出的证明. 我们需要 Brouwer 不动点定理的一个等价形式，Poincare-Miranda 定理，见习题 4.1：

[6] B. Bolzano 最早明确陈述了这个定理, 并指出它并非是不证自明的, 而是需要一个证明. 在 1893 年, C. Jordan 首次给出了证明. 一些数学家认为他的这个证明不够完备, 因为他假设了该定理对于简单多边形成立 (但这个情形并不难证明). 因此，不少数学家认为第一个给出完备证明的是美国数学家 O. Veblen(1905).

定理 4.2.7. (Poincare-Miranda 定理)

设 $f=(f_1,\cdots,f_n):[0,1]^n\to\mathbb{R}^n$ 为连续的. 若对于任意 $1\le i\le n$, 我们有

$$f_i\le 0 \quad 在 \quad \{x\in[0,1]^n \mid x_i=0\},$$

$$f_i\ge 0 \quad 在 \quad \{x\in[0,1]^n \mid x_i=1\}.$$

则存在 $p\in[0,1]^n$ 使得 $f(p)=0$.

作为推论，我们证明

引理 4.2.8. (关键引理)

设

$$h(t)=(h_1(t),h_2(t)) \quad 和 \quad v(t)=(v_1(t),v_2(t)) \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

是 $[0,1]\times[0,1]$ 中的两条连续道路，满足

$$h_1(0)=0,\ h_1(1)=1,\ v_2(0)=0,\ v_2(1)=1.$$

那么这两条道路相交，即存在 $s,t\in[0,1]$ 使得 $h(s)=v(t)$.

证明 考虑映射 $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}^2$,

$$f(s,t)=(f_1(s,t),f_2(s,t)):=(h_1(s)-v_1(t),v_2(t)-h_2(s)).$$

我们有

$$当 s=0 时，f_1\leqslant 0, \quad 当 s=1 时，f_1\geqslant 0,$$

$$当 t=0 时，f_2\leqslant 0, \quad 当 t=1 时，f_2\geqslant 0.$$

由 Poincaré-Miranda 定理, 存在 $(s,t)\in[0,1]^2$ 使得 $f(s,t)=0$, 即

$$h_1(s)=v_1(t) \quad 和 \quad h_2(s)=v_2(t).$$

□

¶ Jordan 曲线定理的证明

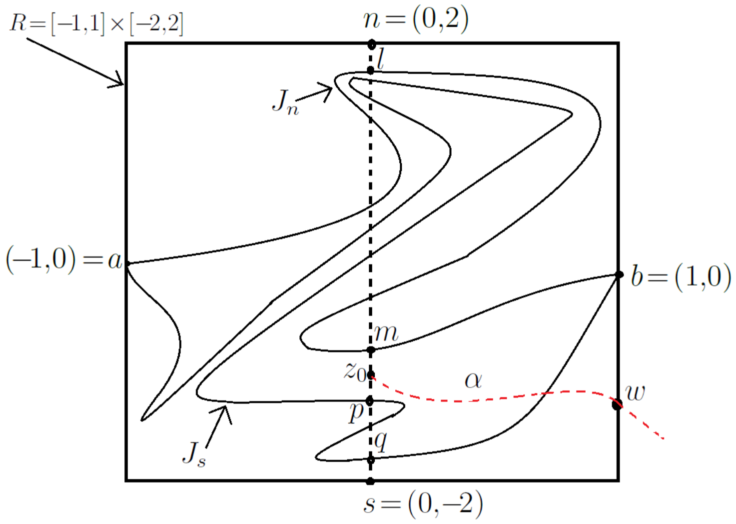
下面我们证明 Jordan 曲线定理：根据命题4.2.2(1), $\mathbb{R}^2\setminus J$ 恰好有一个无界连通分支. 因此我们需要找到一个有界连通分支并证明它是唯一的.

$\boxed{\text{第一步}}$. 曲线 J 的两段弧.

因为 J 是紧致的, 存在 $a,b\in J$ 使得

$$d(a,b)=\sup\{d(x,y)|x,y\in J\}=\operatorname{diam}(J).$$

不失一般性, 我们可以假设 $a=(-1,0),b=(1,0)$. 记 $R=[-1,1]\times[-2,2]$，那么 $J\subset R$ 且 $J\cap\partial R=\{a,b\}$. 记 $n=(0,2),s=(0,-2)$.



由引理4.2.8, $\overline{ns}\cap J\neq\emptyset$. 因为 $\overline{ns}\cap J$ 是紧致的，在 $\overline{ns}\cap J$ 存在唯一具有最大 y-坐标的点，记为 l. 点 a,b 将 J 分为两段弧. 记 J_n 为包含 l 的弧, J_s 为另一条弧. 令 $m\in\overline{ns}\cap J_n$ 为 $\overline{ns}\cap J_n$ 中使得 y-坐标最小的点. (它可以与 l 相同).

断言: $\overline{ms}\cap J_s\neq\emptyset$.

事实上，如果 $\overline{ms}\cap J_s=\emptyset$，那么

$$(\overline{nl}+\widehat{lm}+\overline{ms})\cap J_s=\emptyset,$$

这与关键引理矛盾.

令 p,q 分别为 $\overline{ms}\cap J_s$ 中使得 y-坐标最大和 y-坐标最小的点（其存在性由紧性保证）.

第二步. $\mathbb{R}^2\setminus J$ 至少有两个连通分支.

令 z_0 为 m 和 p 的中点，并且令 U 为 $\mathbb{R}^2\setminus J$ 中包含 z_0 的连通分支. 我们想要证明 U 是一个有界连通分支. 假设结论不成立，即 U 是 $\mathbb{R}^2\setminus J$ 中唯一的无界连通分支. 那么存在一条道路 $\alpha\subset\mathbb{R}^2\setminus J$, 连接了 z_0 到 R 以外的某点. 令 w 为道路 α 与 ∂R 首次相交的点，并且将道路 α 中从 z_0 到 w 的部分记为 α_w(其位于 R 中). 注意到 $w\neq a,b$, 因为 $\alpha\subset\mathbb{R}^2\setminus J$.

情形 1: w 位于 ∂R 的下半段.

如果我们将 ∂R 中从 w 到 s、既不包含 a 也不包含 b 的道路记为 $\widehat{ws}$, 那么

$$(\overline{nl}+\widehat{lm}+\overline{mz_0}+\alpha_w+\widehat{ws})\cap J_s=\emptyset,$$

这与关键引理矛盾.

情形 2: w 位于 ∂R 的上半段. 那么

$$(\widehat{nw}+\alpha_w+\overline{z_0s})\cap J_n=\emptyset,$$

再次导致矛盾.

因此 U 必然是 $\mathbb{R}^2\setminus J$ 的有界连通分支.

第三步. $\mathbb{R}^2\setminus J$ 恰好有两个连通分支.

假设 U 是包含 z_0 的有界连通分支. 如果 $\mathbb{R}^2\setminus J$ 还有另一个有界连通分支 $\widetilde{U}$，我们记

$$\beta=\overline{nl}+\widehat{lm}+\overline{mp}+\widehat{pq}+\overline{qs},$$

则 $\beta \cap \widetilde{U} = \emptyset$. 因为 $a, b \notin \beta$, 由 β 的紧性, 存在小圆盘 $V_a \ni a, V_b \ni b$ 使得

$$V_a \cap \beta = V_b \cap \beta = \emptyset.$$

由命题4.2.5, $a, b \in \partial\widetilde{U} \subset \overline{\widetilde{U}}$, 因此存在 $a_1 \in V_a \cap \widetilde{U}$ 和 $b_1 \in V_b \cap \widetilde{U}$. 因为 $\widetilde{U}$ 是连通的，所以可以找到连接 a_1 和 b_1 的道路 $\gamma \subset \widetilde{U}$. 于是我们得到

$$(\overline{aa_1} + \gamma + \overline{b_1 b}) \cap \beta = \emptyset,$$

这与关键引理矛盾. 从而我们完成了定理的证明.

¶ 一些注记

注 4.2.9.

(1) 我们可以将 $\mathbb{R}^2$ 视作 $S^2 - \{pt\}$. 从而 $\mathbb{R}^2$ 的一条 Jordan 曲线也是 S^2 的一条 Jordan 曲线. 在这个框架下我们有:

定理 4.2.10.（S^2 的 Jordan 曲线定理）

S^2 中任意 Jordan 曲线将 S^2 分为两部分，每个部分都以 J 为边界.

事实上，Jordan 曲线定理可以被加强为:

定理 4.2.11.（Jordan-Schoenflies 定理）

对于 S^2 中的任意 Jordan 曲线 J，存在一个同胚 $\rho : S^2 \to S^2$ 使得 $\rho(J)$ 为 S^2 中的赤道（从而 $S^2 \setminus J$ 的每个连通分支是可缩的）.

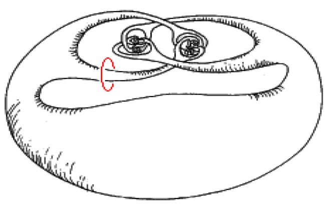
对于 $\mathbb{R}^2$ 中的 Jordan 曲线 J，Jordan-Schoenflies 定理告诉我们 $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 的有界连通分支同胚于圆盘 D，而 $\mathbb{R}^2 \setminus J$ 的无界连通分支同胚于 $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$.

(2) 1911 年 Brouwer 将 Jordan 曲线定理推广至高维:

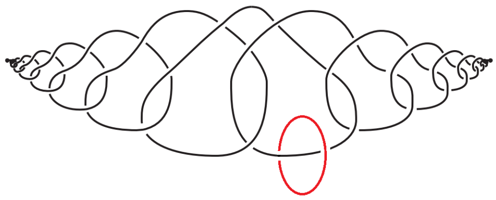
定理 4.2.12.（Jordan-Brouwer 分割定理）

假设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 并且 $X \simeq S^{n-1}$, 那么 $\mathbb{R}^n \setminus X$ 恰好有两个连通分支，其中一个是有界的，另一个是无界的，并且 X 是它们公共的边界.

不过，Jordan-Schoenflies 定理在高维情况不成立. 一个著名的反例是 Alexander 角球.



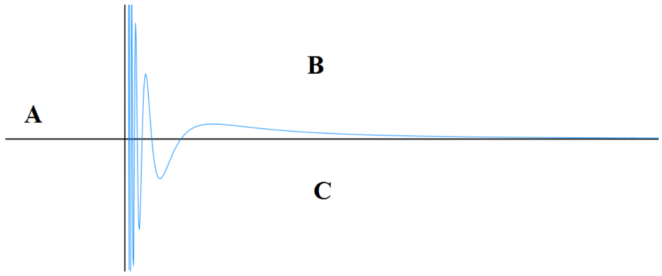
下面是一个类似的 (反) 例. 我们知道如果我们移除 $\mathbb{R}^3$ 中一条线段, 剩余部分是单连通的. 但是如果我们移走 $\mathbb{R}^3$ 中一条弧，同样的结论可能不成立, 虽然弧是同胚于 $[0, 1]$ 的. 例如，$\mathbb{R}^3$ 中如下所示的弧的补集不是单连通的:



(3) $\mathbb{R}^2$ 中“非紧的曲线”即 $\mathbb{R}$ 在同胚映射下的像集可能会更复杂. 例如，考虑“曲线”

$$\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\quad t\mapsto(e^t,e^{-t}\sin(e^{-t}))$$

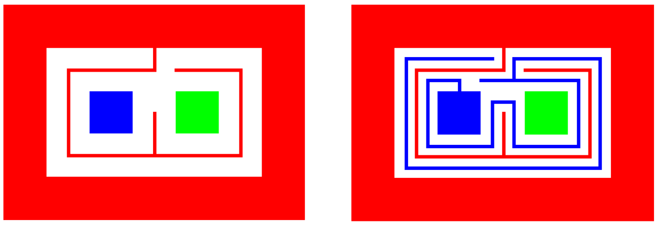
则 $\mathbb{R}^2\setminus\gamma$ 仅有一个连通分支，但是有三个道路连通分支.



(4) 平面几何甚至会更加复杂. 例如，存在三个 (甚至更多) 开集 $U_1,U_2,U_3\subset\mathbb{R}^2$, 使得

- U_1,U_2,U_3 是不相交的;
- U_1,U_2,U_3 是连通开集;
- $\partial U_1=\partial U_2=\partial U_3$ (因此边界不可能是一条 Jordan 曲线)

这样的集合被称作**和田湖**（Wada lake），最早由日本数学家和田健雄（Takeo Wada）发现并由他的学生米山国藏（Kunizo Yoneyama）于 1917 年发表. 后来人们发现这样的结构很“自然地”出现在动力系统理论之中.



每个人都知道什么是曲线，直到他学习了足够多的数学，
于是在层出不穷的例外情况里迷惘彷徨.
– F. 克莱因

4.3 曲线

4.3.1 曲线的分类

在本节我们将证明 1 维流形的分类定理:

定理 4.3.1.（一维流形的分类定理）

在同胚意义下，仅有两种不同的连通 1-维流形: S^1 和 $\mathbb{R}^1$. ♡

注 4.3.2.

(1) 根据流形的定义，如果 M 是一个 1 维流形，那么对于任意 $x \in M$, 都存在 x 附近的一个坐标卡 (φ, U, V)，其中 U 是 x 的开邻域，V 是 $\mathbb{R}$ 的开子集而 $\varphi : U \to V$ 是一个同胚. 因为开区间同胚于 $\mathbb{R}$，所以我们总可以取 $V = \mathbb{R}$.[7] 我们把这种 $V = \mathbb{R}$ 类型的坐标卡简写为 (φ, U).

(2) 类似地，对于带边 1 维拓扑流形，我们有

定理 4.3.3.（带边一维流形的分类）

在同胚意义下，仅有两种不同的边界非空的连通 1 维带边流形: $[0, 1]$ 和 $[0, 1)$. ♡

于是，对于连通 1 维（带边或不带边）流形，通过它是否紧致以及是否带边，我们就可以把它完全确定下来.

下面我们证明定理4.3.1，其证明思路是清晰的：将“相邻的坐标卡”粘合成更大的坐标卡，直至无法进一步粘合. 稍微探索一下我们不难发现，粘合两段同胚于 $\mathbb{R}$ 的坐标卡时，有两种可能性：第一种是两个坐标卡的交集是连通的，此时我们可以把它们粘成一个“更长”的同胚于 $\mathbb{R}$ 的坐标卡；第二种是两个坐标卡的交集是各自的两段，此时我们可以把它们粘合为 S^1.

¶ 两个坐标卡的交集

我们首先刻画两个坐标卡的交集:

引理 4.3.4.（两个 1 维坐标卡的交集）

设 (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2) 为 1 维流形 M 的两个坐标卡，满足 $U_1 \not\subset U_2$ 和 $U_2 \not\subset U_1$. 设 $W \subset U_1 \cap U_2$ 是一个连通分支，$\varphi_1(W) = (a, b)$ 且 $\varphi_2(W) = (c, d)$, 其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. 此外，假设“转移映射”

$$\varphi_{12} := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (a, b) \to (c, d)$$

是单调递增的. 那么我们有

$$a \in \mathbb{R}, b = +\infty, c = -\infty, d \in \mathbb{R} \quad \text{或者} \quad a = -\infty, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d = +\infty.$$ ♢

[7] 同样的，对于 n 维流形我们也总是可以取 V 为 $\mathbb{R}^n$ 本身，因为总可以缩小 U 使得 V 是 n 维开球，而 n 维开球是同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的.

证明 我们需要排除其他的情况. 我们知道

$$a, c < +\infty \quad 和 \quad b, d > -\infty,$$

而从条件 "$U_1 \not\subset U_2$ 和 $U_2 \not\subset U_1$" 我们知道

$$(a, b) \neq (-\infty, +\infty) \quad 且 \quad (c, d) \neq (-\infty, +\infty).$$

需要排除的其余情况是

- $a, c \in \mathbb{R}$: 此时 $\varphi_1^{-1}(a)$ 和 $\varphi_2^{-1}(c)$ 都是 M 中定义好的点.

  首先我们断言在这种情况下，必有 $\varphi_1^{-1}(a) = \varphi_2^{-1}(c)$. 假设 $\varphi_1^{-1}(a) \neq \varphi_2^{-1}(c)$. 那么对于 $\varphi_1^{-1}(a)$ 的任意充分小的邻域 U_a, $\varphi_1(U_a)$ 是 a 的一个开邻域. 类似地，对于 $\varphi_2^{-1}(c)$ 任意充分小的邻域 U_c, $\varphi_2(U_c)$ 是 c 的一个小邻域. 因为 $\varphi_{12} : (a, b) \to (c, d)$ 是一个单调递增的同胚，它必然将任意小的集合 $(a, a+\varepsilon_1)$ 映射到某个集合 $(c, c+\varepsilon_2)$. 由此可得

  $$\varphi_{12}(\varphi_1(U_a) \cap (a, b)) \cap \varphi_2(U_c) \neq \emptyset.$$

  这说明

  $$\varphi_2(U_a \cap \varphi_1^{-1}((a, b))) \cap \varphi_2(U_c) \neq \emptyset,$$

  从而 $U_a \cap U_c \neq \emptyset$. 这与 M 是 (T2) 空间矛盾.

  于是我们有 $\varphi_1^{-1}(a) = \varphi_2^{-1}(c)$，故 $\varphi_1^{-1}(a)$ 是 U_2 的一个内点，从而也是 $U_1 \cap U_2$ 的内点. 因此 a 是 $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ 的一个内点，这导致了矛盾，因为 a 是 $\varphi_1(W)$ 的一个边界点，而 $\varphi_1(W)$ 是 $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ 的一个连通分支. 因此我们不能有 $a, c \in \mathbb{R}$.
- $b, d \in \mathbb{R}$: 用和以上相同的论证，我们将会得到矛盾. □

¶ 区间上的映射

要研究 1 维流形，我们必然需要先研究区间上的映射. 以下引理的证明都是初等的，将被留作习题:

引理 4.3.5

任意连续单射 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 必然是严格单调的. ♢

引理 4.3.6. (坐标卡粘法 I)

设 (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2) 是两个坐标卡，满足

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (a, +\infty) \quad 且 \quad \varphi_2(U_1 \cap U_2) = (-\infty, d).$$

如果

$$\varphi_{12} := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (a, +\infty) \to (-\infty, d)$$

是单调递增的，那么存在一个同胚 $\varphi : U = U_1 \cup U_2 \to \mathbb{R}$. ♢

引理 4.3.7. (坐标卡粘法 II)

设 (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2) 为两个坐标卡并且 $U_1 \cap U_2$ 由两个连通分支 W_1, W_2 组成. 如果存在 $f < a$ 以及 $d < g$ 使得

$$\varphi_1(W_1) = (a, +\infty), \qquad \varphi_2(W_1) = (-\infty, d),$$
$$\varphi_1(W_2) = (-\infty, f), \qquad \varphi_2(W_2) = (g, +\infty),$$

那么存在一个同胚 $\varphi : U_1 \cup U_2 \to S^1$. ♢

¶ 坐标卡的粘合

现在我们可以粘合:

命题 4.3.8. (坐标卡的粘合)

假设 M 是 1 维流形, (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2) 是两个坐标卡, 则 $U_1 \cap U_2$ 至多有两个连通分支, 且

(1) 如果 $U_1 \cap U_2$ 是连通的, 那么存在一个坐标卡 (φ, U) 使得 $U = U_1 \cup U_2$.

(2) 如果 $U_1 \cap U_2$ 有两个连通分支, 那么 $U_1 \cup U_2$ 同胚于 S^1. ♠

证明 若 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, 命题自动成立. 我们剩下三种情况需要讨论, 即 $U_1 \cap U_2$ 由一个, 两个或至少三个连通分支构成.

情形 1. $U_1 \cap U_2$ 是连通的.

如果 $U_1 \subset U_2$ 或 $U_2 \subset U_1$, 结论是显然的. 因此我们假设 $U_1 \not\subset U_2$ 且 $U_2 \not\subset U_1$. 因为 $U_1 \cap U_2$ 是连通开集, 像集 $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ 和 $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$ 是 $\mathbb{R}$ 的连通开子集. 故

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) = (a, b), \qquad \varphi_2(U_1 \cap U_2) = (c, d),$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. 由此可知 "转移映射"

$$\varphi_{12} := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : (a, b) \to (c, d)$$

是一个同胚. 由引理4.3.5, φ_{12} 是单调的. 不失一般性, 我们可以假设 φ_{12} 是单调递增的 (否则我们可以用 $-\varphi_1$ 取代 φ_1).

由引理4.3.4, 我们必然有

$$a \in \mathbb{R}, b = +\infty, c = -\infty, d \in \mathbb{R} \quad \text{或} \quad a = -\infty, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}, d = +\infty.$$

因此不失一般性, 我们可以假设

$$a \in \mathbb{R}, b = +\infty, c = -\infty, d \in \mathbb{R},$$

否则我们只需要交换 (φ_1, U_1) 和 (φ_2, U_2). 【注意在对调 φ_1 与 φ_2 时, 不改变 φ_{12} 的单调性, 即: 若 φ_{12} 是单调递增的, 那么对调后得到的 $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})^{-1}$ 依然是单调递增的. 所以此处的 "不失一般性" 操作不会破坏前面的 "不失一般性".】 这样, 由引理4.3.6就得到欲证的结论.

情形 2. $U_1 \cap U_2$ 有两个连通分支.

分别记 $U_1 \cap U_2$ 的两个连通分支为 W_1 和 W_2. 先考虑 W_1. 跟情形 1 类似, 通过两个

“不失一般性”我们可以把条件化归为

$$\varphi_1(W_1)=(a,+\infty),\qquad \varphi_2(W_1)=(-\infty,d),$$

并且 $\varphi_{12}=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:(a,+\infty)\to(-\infty,d)$ 是单调递增的. 由连通性，我们有

$$\varphi_1(W_2)=(e,f),\quad \varphi_2(W_2)=(g,h).$$

因为 $(a,+\infty)\cap(e,f)=\emptyset$, 我们必然有 $f\in\mathbb{R}$. 同理 $g\in\mathbb{R}$. 这蕴含着 $\varphi_{12}=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}:(e,f)\to(g,h)$ 是单调递增的，因为否则我们有 $(-\varphi_2)\circ\varphi_1^{-1}:(e,f)\to(-h,-g)$ 是单调递增的，并且 $f,-g\in\mathbb{R}$, 这与引理4.3.4矛盾. 因此我们可以对 W_2 应用引理4.3.4得到

$$\varphi_1(W_2)=(-\infty,f),\quad \varphi_2(W_2)=(g,+\infty).$$

注意到我们有 $f<a$ 以及 $d<g$，于是应用引理4.3.7就可以得到欲证的结论.

情形 3. $U_1\cap U_2$ 至少有三个连通分支.

这种情况不会发生. 事实上，若 W_1,W_2 和 W_3 是 $U_1\cap U_2$ 的连通分支，那么 $\varphi(W_i)$ 中的某一个是有界区间. 运用引理 4.3.4并重复情形 2 中的论证可以得到矛盾. □

¶ 分类定理的证明

【定理4.3.1的证明】

证明 因为 M 是 (A2) 的, 可以找到可数多个坐标卡 (φ_k,U_k) 覆盖 M. 定义 $\widetilde{U}_1=U_1$, 然后归纳地定义

$$\widetilde{U}_{n+1}=\widetilde{U}_n\cup U_{k(n)},$$

其中 $k(n)$ 是使得 $U_k\cap\widetilde{U}_n\neq\emptyset$ 且 $U_k\not\subset\widetilde{U}_n$ 的最小下标 k.

事实. 我们有 $\bigcup_n\widetilde{U}_n=M$.

> **证明** 记 $\widetilde{M}=\bigcup_n\widetilde{U}_n$. 根据构造, $\widetilde{M}$ 是 M 的连通开集. 假设 $\widetilde{M}\neq M$. 取任意 $x\in M\setminus\widetilde{M}$. 取使得 $x\in U_m$ 的最小下标 m. 我们断言 $U_m\cap\widetilde{M}=\emptyset$.
>
> 事实上，如果存在 n 使得 $U_m\cap\widetilde{U}_n\neq\emptyset$, 则对于任意 $n'>n$ 都有 $U_m\cap\widetilde{U}_{n'}\neq\emptyset$. 因此存在 $l\leq m$ 使得 $U_{k(n+l)}=U_m$.
>
> 因此 $M\setminus\widetilde{M}$ 是开集. 这与 M 的连通性矛盾. □

现在我们应用命题4.3.8进行粘合.

情形 1: 存在 n 使得 $\widetilde{U}_n\cap U_{k(n)}$ 有两个连通分支.

我们取使得 $\widetilde{U}_n\cap U_{k(n)}$ 有两个连通分支的最小的n. 因为从 $\widetilde{U}_1$ 开始，在应用命题4.3.8(1)粘合 $n-1$ 次后，我们得到一个将 $\widetilde{U}_n$ 映为 $\mathbb{R}$ 的坐标卡，所以可以应用命题4.3.8(2)粘合 $\widetilde{U}_n$ 和 $U_{k(n)}$ 后所得的 $\widetilde{U}_{n+1}$ 同胚于 S^1. 于是 $\widetilde{U}_{n+1}$ 是紧集，从而在 (T2) 空间 M 中也是闭集. 但由构造，$\widetilde{U}_{n+1}$ 是 M 中的开子集. 所以由 M 的连通性，我们得到 $M=\widetilde{U}_{n+1}\simeq S^1$.

情形 2: 对每个 n，$\widetilde{U}_n\cap U_{k(n)}$ 都仅有一个连通分支.

此时我们得到了坐标卡的一个递增序列

$$\widetilde{U}_1\subset\widetilde{U}_2\subset\widetilde{U}_3\subset\cdots$$

以及相应的坐标卡映射 $\widetilde{\varphi}_n : \widetilde{U}_n \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}$.

情形 2.1： 如果在有限步以后这个序列停止了，那么我们应用命题4.3.8(1)进行有限次粘合就完成了证明.

情形 2.2： 如果该序列一致持续下去，那么我们先选择一个同胚 $\phi_1 : \widetilde{U}_1 \xrightarrow{\simeq} (0,1)$. 在定义 $\phi_n : \widetilde{U}_n \xrightarrow{\simeq} (a_n, b_n)$ 之后，我们可以归纳定义 $\phi_{n+1} : \widetilde{U}_{n+1} \xrightarrow{\simeq} (a_{n+1}, b_{n+1})$ 使得（请读者自行写出该同胚）

$$\text{要么} \quad (a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n - 1, b_n) \quad \text{要么} \quad (a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, b_n + 1),$$

并且使得 ϕ_{n+1} 和 ϕ_n 在 $\widetilde{U}_n$ 上相同. 我们记 $a = \lim_{n\to\infty} a_n, b = \lim_{n\to\infty} b_n$（它们是整数或者 $\pm\infty$），并定义 $\varphi : M = \cup\widetilde{U}_n \to (a, b)$ 如下：

$$\text{若 } x \in \widetilde{U}_n\text{，则令} \varphi(x) = \phi_n(x).$$

则 φ 是从 M 到 (a, b) 的同胚（请读者验证：它为什么是良定的以及为什么是同胚？）. 最后，若区间 $(a, b) \neq \mathbb{R}$，则我们再复合一个从 (a, b) 到 $\mathbb{R}$ 的同胚. 总之，我们可以得到从 M 到 $\mathbb{R}$ 的同胚. 这样就完成了证明. □

4.3.2 纽结和链环初步

¶ 纽结

根据分类定理，在同胚意义下，圆周 S^1 是唯一的连通紧致 1 维流形. 似乎在拓扑上对紧 1 维流形的研究到此为止了. 然而，事实并非如此！

事实上，数学中有一个目前依然非常活跃的领域，叫做**纽结理论**（knot theory），研究的就是如何在空间 $\mathbb{R}^3$ 中放置圆周 S^1. [8] 下面我们对扭结做一个非常简要的介绍.

定义 4.3.9.（扭结）

我们称任何一个嵌入 $f : S^1 \to \mathbb{R}^3$ 的像集 K 为一个**纽结**（knot）. ♣

这里有一些纽结的简单例子：

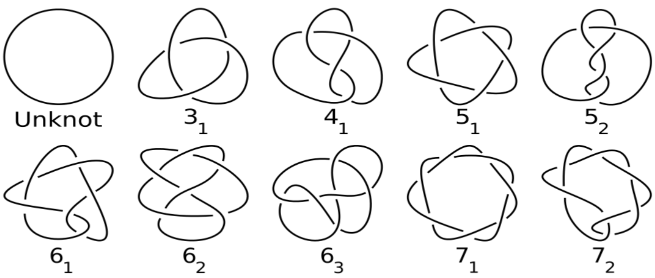


图 4.1: 部分不超过 7 个交叉点的扭结表

[8]我们都知道，在远古时代的中国，人们就会使用纽结 (绳结) 计数和记事. 纽结的数学理论最早是在 1771 年由法国数学家 A. Vandermonde 所发展的：在讨论跟位置的几何相关的纽结的性质时，他明确注意到了其拓扑特性的重要性. 在 1833 年，也许是受其地磁场研究的启发，Gauss 在他的日记的一个简短注记中引入了计算两个链环的**环绕数** (linking number) 的**环绕积分**（linking integral），但并没有给出推导. 在 1860 年代, 英国数学物理学家、热力学之父开尔文勋爵（Lord Kelvin）提出了"原子打结涡旋理论"，即原子是以太中的纽结，不同的元素可能是由不同的纽结决定的. 虽然这个物理理论被证明是错误的，但它启发苏格兰数学物理学家 P. Tait 制作史上第一张扭结表，开始对纽结进行数学上的分类）.

(此处数字表示“交叉点”数，而下标并无具体含义，只是它们在最早的扭结表中出现的次序. 7 个交叉点的扭结共有 7 个，8 个交叉点的扭结共有 21 个，而 9 个交叉点的扭结则有 36 个.)

如果一个扭结是 $\mathbb{R}^3$ 中有限条线段的并，则我们称它是一个**多边形纽结**（polygonal knot），例如：

图 4.2: 多边形扭结

¶ 纽结等价

像绝大多数的数学理论一样，我们需要在扭结之间定义“等价”这个概念，并且对不同的纽结进行分类. 粗略地讲，两个纽结是等价的是指我们可以将一个纽结在 $\mathbb{R}^3$ 中“形变”到另外一个扭结，并且在这个形变过程中始终不破坏纽结本身.

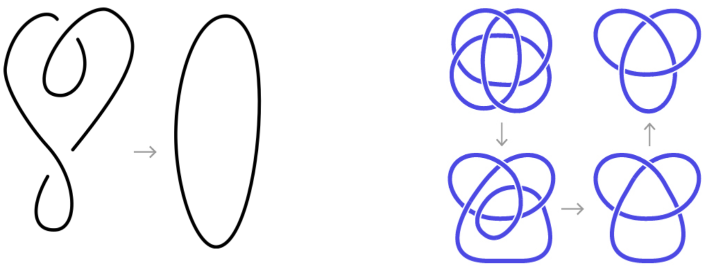


图 4.3: 扭结形变

因此在定义纽结的“等价”这个概念时，我们并不是要寻找两个像集 K_1 和 K_2 之间的同胚 (它们都同胚于 S^1)，而是尝试寻找背景空间 $\mathbb{R}^3$ 中的一族同胚，使得沿着这族背景空间上的同胚，一个纽结可被形变成另外一个.

定义 4.3.10.（等价扭结）

设 K_1 和 K_2 是两个纽结. 如果存在一个连续映射 $H : [0,1]\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 使得

(1) 对于每个 $t\in[0,1]$, 映射 $H(t,\cdot):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 都是同胚.

(2) $H(0,\cdot) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

(3) $H(1,K_1) = K_2$.

则我们称 K_1 和 K_2 是**等价的**（equivalent），并称 H 为**背景同痕**（ambient isotopy）. ♣

注 4.3.11. 根据 Jordan-Schoenflies 定理，嵌入 $\mathbb{R}^2$ 的 S^1 一定可以同痕到标准的单位圆. 而在本节习题中我们看到，嵌入 $\mathbb{R}^n$（$n\geq 4$）的 S^1 也都可以同痕到标准的 S^1. 这就是为什么我们仅考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的扭结（当然，这等价于在 S^3 中研究扭结. 也有人研究可嵌入特定曲面的扭结.）.

为了简单起见，我们只考虑**驯顺纽结**（tamed knots），即等价于多边形纽结的纽结. 特别地，我们不考虑如下图所示的“野纽结”（wild knot）

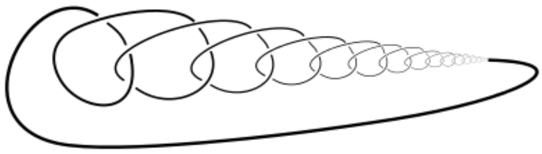


图 4.4: 野扭结

¶ 纽结群

那么，我们如何区分不同的纽结呢? 因为纽结作为像集都是同胚的，所以研究 $\pi_1(K)$ 是没有意义的. 然而由定义4.3.10我们很容易看到，等价的纽结在 $\mathbb{R}^3$ 中的补集是同胚的[9]. 作为推论，等价纽结的补集的基本群是同构的. 因此很自然地定义

定义 4.3.12.（扭结群） 设 $K \subset \mathbb{R}^3$ 为一个纽结. 我们称 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ 为 K 的**纽结群**（knot group）. ♣

例 4.3.13. 我们已经在习题 3.5 中通过同伦形变的方法得到平凡结的纽结群是

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,y,z)\,|y^2+z^2=1\}) \cong \mathbb{Z}.$$

下面我们用 van Kampen 定理给出该结论一个简单的证明：记

$$X = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,y,z)\,|y^2+z^2=1\}.$$

考虑

$$U = X \cap \{z > -1/2\}, \quad V = X \cap \{z < 1/2\}.$$

则不难发现

$$\pi_1(U) = \langle a \rangle, \quad \pi_1(V) = \langle b \rangle, \quad \pi_1(U \cap V) = \langle \alpha, \beta \rangle$$

且

$$(j_1)_*(\alpha) = a, \quad (j_1)_*(\beta) = a^{-1}, \quad (j_2)_*(\alpha) = b, \quad (j_2)_*(\beta) = b^{-1}.$$

于是我们发现 $\pi_1(U \cap V)$ 的两个生成元所给出的两个关系中，有一个是多余的，也就是我们只有一个“有效”关系 $ab^{-1} = 1$，从而

$$\pi_1(X) = \langle a, b | ab^{-1} = 1 \rangle = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

一般来说，有一个非常简单的方式计算驯顺纽结 K 的扭结群，最早由 Wirtinger[10]给出: 不妨设 K 是多边形扭结. 把 K 放置在上半空间中“好的位置”，使得 K 在平面 $z=0$ 上有“好的”投影：K 上任意三点都不能经投影而重合于一点，经投影而重合的点对只

[9]反过来，H. Tietze 在 1908 年提出如下猜想：$\mathbb{R}^3$ 中的两个扭结等价（即存在背景同痕）当且仅当它们的补空间之间有保持定向的同胚. 该猜想在 1987 年最终被美国拓扑学家 C. Gordan 和 J. Luecke 证明.

[10]W. Wirtinger（维尔丁格，1865-1945），奥地利数学家，其工作涉及复分析、几何、代数、数论、李理论、扭结理论等多个领域.

有有限对. 根据投影，我们可以如图所示地将纽结分为“过街天桥”和“地下通道”:

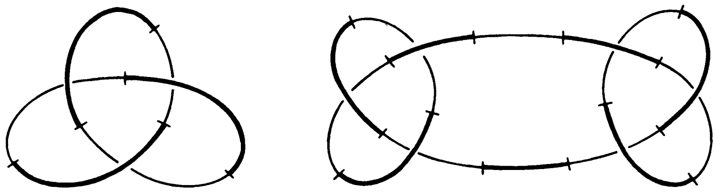


图 4.5: 三叶结与正方结

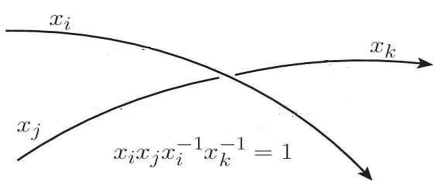
因为扭结同胚于 S^1，我们可以给它指定一个方向. 对于每段“过街天桥”，我们作一个环绕它的小圆圈，并按照右手法则赋予它一个方向（即右手握拳，拇指伸出朝向扭结线段的方向，则右手剩余手指环绕的方向该圆圈的方向），我们把这样得到的小圆圈记为 $x_1,\cdots,x_m$（准确地说，我们还需要事先取定一个“上帝视角”的点作为基点，并把所有小圆圈连接到该基点. 下面总默认如此并且不再赘述. ）. 它们是纽结群的生成元.

下面观察所有的“地下通道”：每个“地下通道”都连接了两段“过街天桥”，且绝大部分“地下通道”上方都有一段“过街天桥”.

- 若一段“地下通道”连接了 x_j 和 x_k 这两个“过街天桥”，且其上方还有“过街天桥” x_i，则我们写出一个关系

$$x_i x_j x_i^{-1} x_k^{-1} = 1.$$

直观地说，这表示 $x_i x_j$ 与 $x_k x_i$ 所代表的圈在基本群里是同一个元素，如下图所示.



- 若一段“地下通道”连接了 x_j 和 x_k 这两个“过街天桥”，但其上方没有“过街天桥”，则我们写出关系

$$x_i x_k^{-1} = 1.$$

这表示 x_i 和 x_k 所代表的圈在基本群里是同一个元素，其意义是明显的.

因为“过街天桥”和“地下通道”是交错出现的，于是我们总共得到 n 个关系. 稍微细致研究一下会发现，这些关系中任意 $n-1$ 个蕴含了第 n 个，因此有效的关系总共有 $n-1$ 个，我们将其记为 $r_1,\cdots,r_{n-1}$. 现在我们可以写下纽结 K 的纽结群的一个表现：

定理 4.3.14.（扭结群的 Wirtinger 表现）

任意一个驯顺纽结 K 的纽结群是一个有限表现群

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \langle x_1,\cdots,x_n | \, r_1,\cdots,r_{n-1}\rangle.$$

其中 $x_1,\cdots,x_n,r_1,\cdots,r_{n-1}$ 如上描述.

证明 【不难想见，证明的核心工具是 van Kampen 定理. 不过真正计算时还是需要一些技巧以使得相应子空间的基本群便于计算.】因为我们所考虑的是驯顺扭结，所以不妨假设它是一个多边形扭结. 首先我们注意到，根据同伦不变性，可以把该扭结的“地下通道”都“加厚”成“方形管子”，其纵截面是边长为 ε 的正方形. 为了便于计算，在放置扭结时，我们把“地下通道”全部摆平，使得地下通道都是宽度和厚度均为 ε 的长方体方块，且恰好位于 $0 \leq z \leq \varepsilon$ 区域里，而“过街天桥”则全部在 $z \geq \varepsilon$ 区域. 如前所述，我们总共有 n 个“过街天桥”和 n 个“地下通道”.

下面取 U 为 $\mathbb{R}^3 \setminus K$ 中 $z > 0$ 部分，而 V 为 $\mathbb{R}^3 \setminus K$ 中 $z < \varepsilon$ 部分. 则由构造，$\pi_1(V) = \{e\}$，因为该区域同伦等价于 $\mathbb{R}^3$ 中的 $z < 0$ 部分. 因为 $U \cap V$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中“薄片”即 $0 < z < \varepsilon$ 部分，且挖掉了 n 个对应于“地下通道”的上下通透的洞，所以它同伦等价于挖掉 n 个洞的平面，从而其基本群为

$$\pi_1(U \cap V) = \langle \alpha_1, \cdots, \alpha_n \rangle,$$

其中 α_i 为“围绕第 i 个地下通道”的圈. 类似地，我们可得

$$\pi_1(U) = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle,$$

其中 x_i 为“围绕第 i 个‘过街天桥’”的圈. 为了应用 Van Kampen 定理，我们还需要计算每个 α_i 在 $\pi_1(U)$ 中诱导的元素. 为此，对每个“地下通道”，我们按照其上方是否有“过街天桥”进行讨论：

- 若某个“地下通道”连接了圈 x_j 和 x_k 所绕的两个“过街天桥”，且其上方还有圈 x_i 所绕的“过街天桥”，则由下图可知

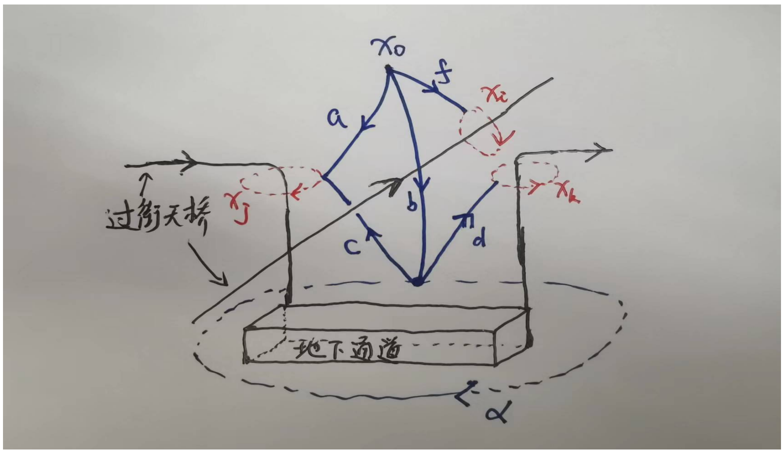


图 4.6: 关系示意图

$$\begin{aligned} b{*}\alpha{*}\bar{b} &\sim b{*}c{*}x_j{*}\bar{c}{*}d{*}\bar{x}_k{*}\bar{d}{*}\bar{b} \\ &\sim (b{*}c{*}\bar{a}){*}(a{*}x_j{*}\bar{a}){*}(a{*}\bar{c}{*}\bar{b}){*}(b{*}d{*}\bar{x}_k{*}\bar{d}{*}\bar{b}) \\ &\sim (f{*}x_i{*}\bar{f}){*}(a{*}x_j{*}\bar{a}){*}(f{*}\bar{x}_i{*}f){*}(b{*}d{*}\bar{x}_k{*}\bar{d}{*}\bar{b}) \end{aligned}$$

即在 $\pi_1(U, x_0)$ 中，圈 α 所代表的圈跟 $x_i x_j x_i^{-1} x_k^{-1}$ 是一致的. 因为在 V 中 α 所代

表的的圈是可缩的，所以我们得到关系

$$x_i x_j x_i^{-1} x_k^{-1} = 1.$$

- 若某个“地下通道”连接了圈 x_j 和 x_k 所绕的两个“过街天桥”，且其上方没有“过街天桥”，则通过同样但跟简单的分析，显然有

$$x_i x_k^{-1} = 1.$$

最后我们要说明，所有这 n 个关系中，我们可以略去其中任意一个. 事实上，在选定 $\pi_1(U\cap V)$ 的生成元时，我们可以做一个小小的变动：我们只要选定前 $n-1$ 为生成元分别为绕某 $n-1$ 个“地下通道”的圈，然后选定第 n 个生成元为绕所有 n 个地下通道的“大圈”. 则这个元素不仅在 V 中是可缩的，而且在 U 中也是可缩的，从而并不会给我们新的关系. 于是定理证明完毕. □

我们举两个简单的例子：

例 4.3.15.

(1) 上述三叶结的扭结群为

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus K) &\cong \langle x_1,x_2,x_3 \mid x_1x_3x_1^{-1}x_2^{-1}=1, x_2x_1x_2^{-1}x_3^{-1}=1\rangle\\ &\cong \langle x_1,x_2 \mid x_1x_2x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2^{-1}=1\rangle\end{aligned}$$

这说明三叶结跟平凡结是不等价的.

(2) 考虑“五角星”扭结 5_1. 则我们得到

$$\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus 5_1) \cong \langle x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 \mid x_1x_3 = x_4x_1 = x_2x_4 = x_5x_2 = x_3x_5\rangle.$$

我们可以解出 x_2, x_4, x_5 如下

$$x_5 = x_3^{-1}x_1x_3, \quad x_4 = x_1x_3x_1^{-1}, \quad x_2 = x_5^{-1}x_1x_3 = x_3^{-1}x_1x_3x_1x_3.$$

代入 $x_1x_3 = x_2x_4$，最后得到

$$\pi_1(\mathbb{R}^3\setminus 5_1) \cong \langle x_1,x_3 \mid x_3x_1x_3x_1 = x_1x_3x_1x_3x_1x_3\rangle.$$

遗憾的是，一般而言并没有简单的办法判定两个用生成元和关系给出的群是否同构. 事实上，对于扭结群，我们无法像对于曲面那样，通过阿贝尔化来区分它们的扭结群：所有扭结群的阿贝尔化都同构于 $\mathbb{Z}$（见习题）.

除了扭结群之外，人们还陆陆续续发现了扭结的很多不变量，用于区分不同的扭结，例如美国数学家 J. Alexander 在 1923 年发现的 Alexander 多项式，以及新西兰数学家 V. Jone 在 1984 年发现的 Jones 多项式等（该多项式很快被用于解决 Tait 在 19 世纪所提出的关于扭结的若干猜想）并因此而在 1990 年荣获 Fields 奖. 另一位 Fields 奖获得者、美国数学家和理论物理学家 E. Witten 则在 20 世纪 80 年代末发现了 Jones 型扭结多项式跟 Chern-Simons 理论[11]关系密切.

[11]该理论最早可追溯至中国数学家陈省身先生跟他的学生、数学家和金融大鳄 J. Simons 在 1974 年所引入的 Chern-Simons 形式.

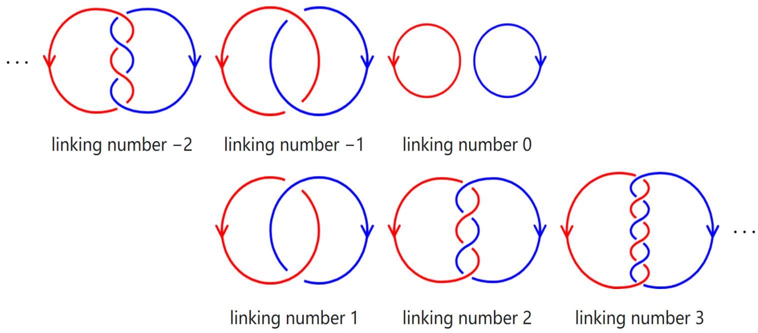
¶ 链环

至今为止，当研究流形或其他简单类型的拓扑空间时，我们往往会说一些类似于“不失一般性，我们假设我们所研究的对象是连通的，因为不连通的对象仅仅是它的连通分支的并集 (并且当我们的研究对象是紧的时候，这个并集还是有限并). 但是事实上，在研究 $\mathbb{R}^3$ 中的紧曲线时，考虑不连通的曲线会导致很多复杂而有趣的现象.

定义 4.3.16.（链环）

我们称有限多个不交的圆周嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 时的像集 L 为**链环**（link）. ♣

下面是一些两个圆周构成的链环:



正如纽结的情形一样，我们可以定义链环的等价并计算基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$，且其计算方法跟扭结群一样.

例 4.3.17.

(1) 设 L 为两个圆组成的平凡链环, 即图中环绕数为 0 的链环. 它的补集的基本群为

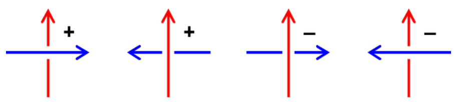
$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) \cong \langle x_1, x_2 \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

(2) 设 L 为 Hopf 链环，即图中环绕数为 1 的链环. 它的补集的基本群为

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L) \cong \langle x_1, x_2 | x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

特别地，我们发现 Hopf 链环跟平凡链环不等价.

给定一个由两个圆周组成的链环 (由嵌入给出自然的定向), 我们可以定义一个被称为**环绕数**（linking number）的数值不变量. 粗略地说，如果我们将两个圆周构成的链环放在一个“好的”位置，那么交错处存在四种可能的构型. 我们根据下图将每处交错标记为 $+1$ 或 -1，并定义为环绕数（linking number）为所标记值之和的一半.



神奇的是，环绕数可以通过一个二重积分计算. 因为该公式最早是由 Gauss 发现的，因此被称作 **Gauss 环绕积分**（Gauss linking integral）:

定理 4.3.18.（Gauss 环绕积分）

设 $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ 为 S^1 在 $\mathbb{R}^3$ 中的不交嵌入，则它们的环绕数为

$$\mathrm{Link}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S^1 \times S^1} \frac{\det(\dot\gamma_1(s), \dot\gamma_2(t), \gamma_1(s) - \gamma_2)}{|\gamma_1(s) - \gamma_2(t)|^3} ds dt$$

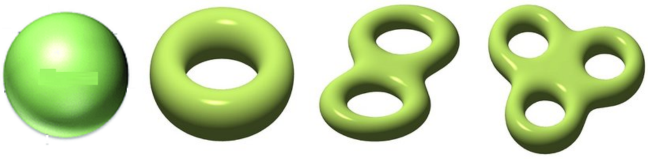
♡

4.4 紧曲面及其分类

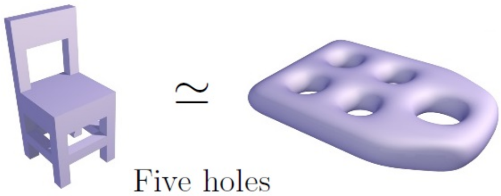
4.4.1 曲面和多边形表示

¶ 曲面的多样性

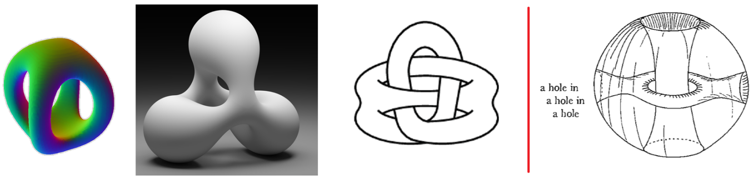
在引言中我们提到，任意 (可定向) 无边紧曲面一定同胚于某个 Σ_g，例如



不过，同一个曲面嵌入 $\mathbb{R}^3$ 后可能看起来很不一样，例如下面两个曲面都是 Σ_5：

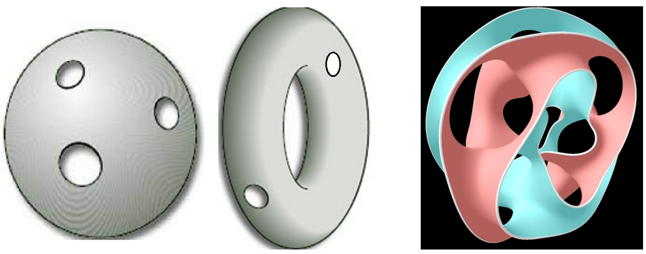


还有很多看起来更复杂的例子 (每个都与某个 Σ_g 同胚)：

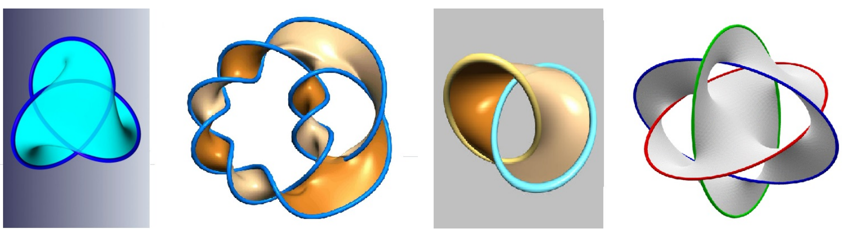


你能数清上面每个曲面的“洞”的数量吗?

我们还可以研究带边紧曲面[12]：

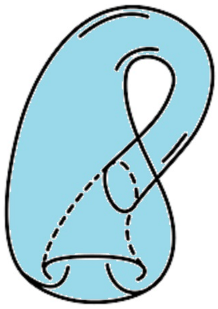
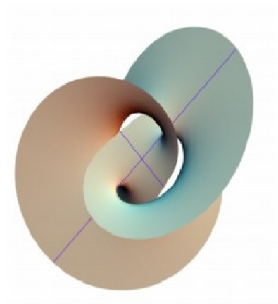


注意任何带边紧曲面的边界都必然是一个无边的紧 1 维流形，即要么是一个圆（当嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 时就是一个纽结），要么是有限个圆的无交并（当嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 是就是一个链环）. 反之，任给 $\mathbb{R}^3$ 中纽结 K 或者链环 L，可以找到 $\mathbb{R}^3$ 中的定向曲面 S，其边界恰好是 K 或 L. 这样的曲面被称作 **Seifert 曲面**.



[12]在本书中，我们不考虑非紧曲面及其分类.

此外，还有很多不可定向的紧曲面 (带边或不带边), 例如

¶ 曲面的连通和

连通和是曲面间的一种重要“运算”. 通过使用连通和运算，我们可以构造更多更复杂的曲面. 事实上，我们将要证明：所有复杂的紧曲面在拓扑上都是简单曲面的连通和.

我们回忆一下连通和的定义：

> 设 M_1, M_2 都是 n 维连通流形[13]. 从 M_1, M_2 中各去掉一个小球 B_1, B_2，然后通过某个同胚映射 $f: \partial B_1 \to \partial B_2$ 粘合两个小球的边界球面，使它们“粘接在一起”，所得的商拓扑空间称为 M_1 与 M_2 的连通和，即
>
> $$M_1 \# M_2 = (M_1 - B_1) \cup_f (M_2 - B_2).$$

这个定义颇有些“语焉不详”之处：所取小球的位置是否会影响连通和？小球的取法与粘接方式 f 是否会影响连通和？

- 不难看出，在假定流形连通（从而道路连通）的情况下，小球所在的位置不会影响所得的连通和，因为我们可以找到一条连接“球心”的简单折线道路，然后构建它的一个“管状”邻域，并在该邻域里将小球从一个点附近“滑到”另一个点附近.
- 但是，小球的取法与粘接方式 f 确实有可能会影响所得的连通和：
  - 首先，我们需要取“充分好且充分小”的小球[14]，即“局部平坦嵌入球” (locally flat embedded ball).
    - 对于曲面而言，由 Jordan-Schoenflies 定理，不会有坏圆盘，且两个拓扑圆盘之间是一个拓扑圆环，所以挖掉任意充分小的圆盘都可以.
    - 对于高维流形，还需要用到拓扑学中一个看似简单但实际上很非平凡的结果，即所谓的**圆环定理**（Annulus theorem），该定理的 $n \geq 5$ 维情形是 1969 年 Kirby 证明的，而最难的 4 维情形直到 1982 年才由 Quinn 解决.
  - 其次，对于一般的 n 维流形而言，连通和确实依赖于粘接方式，一个经典的例子就是复射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 和它自身做连通和，可以给出两种不同的连通和：$\mathbb{CP}^2 \# \mathbb{CP}^2$ 和 $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$（它们不仅不同胚，甚至不同伦等价）.

---

[13] 不难发现，如果 M_1 或 M_2 不连通，则连通和所得到的结果强烈依赖于做连通和的位置，且此时连通和本质上只跟做连通和的位置所在的连通分支有关.

[14] 这意味着我们希望把小球 B 取在某个欧氏邻域里，且使得 ∂B 有一个同胚于 $\partial B \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ 的邻域. 特别地，我们不能取像 Alexander 角球那样的“坏球”.

不过好在情况也没有特别复杂：可以证明，本质上只有两种可能的粘接 ∂B 的方法，即“保持定向进行粘接”和“翻转定向粘接”．

于是，一般 n 维连通流形之间连通和的良定性跟流形的定向性（后文我们会讨论曲面的定向）有关，且已经超出了本书的范围，我们仅仅列举一下相关结论：

(1) 若 M_1 或 M_2 是不可定向的 n 维连通流形，则 $M_1\#M_2$ 是良定的.（原因：对于不可定向流形，可以找到一条简单折线闭道路，使得小球沿着闭路一圈后，其边界定向被翻转了）

(2) 若 M_1 或 M_2 都是可定向流形，则在规定粘接方式后，总可以定义“定向连通和”．
   - (a). 若 M_1, M_2 是可定向的，且其中至少有一个有“翻转定向的自同胚”，则 $M_1\#M_2$ 是良定的，即不依赖于粘接的方式（因为可以通过该“翻转定向的自同胚”给出两种不同粘接方式所得流形之间的同胚）．
   - (b). 若 M_1, M_2 是可定向的，且二者均不存在“翻转定向的自同胚”，则可能有至多两个不同的连通和 $M_1\#M_2$.

而对我们而言，一个好消息是：任何定向曲面都存在“翻转定向的自同胚”．于是根据上面的结论，我们得到

命题 4.4.1.（曲面“连通和”是良定的）

无论所涉及到的曲面是否可定向，两个连通曲面之间的“连通和”总是良定的！ ♠

此外，根据定义，球面是连通和运算的“零元”，即对于任意曲面 M，

$$S^2\#M \simeq M.$$

此外，连通和运算显然还是“交换”和“结合”的，即对于任意曲面 M_1, M_2, M_3，我们有

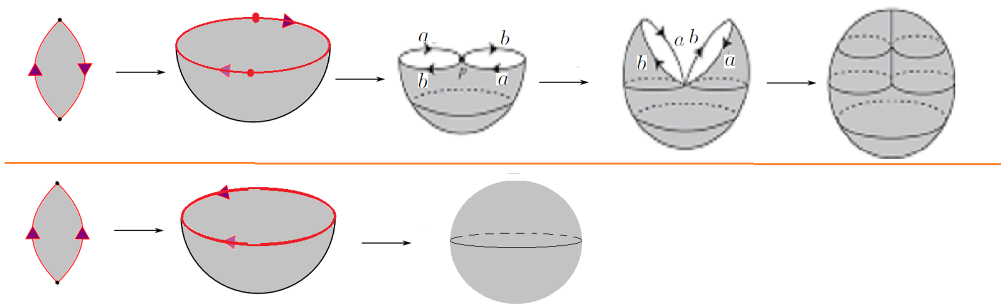
$$M_1\#M_2 \simeq M_2\#M_1$$

以及

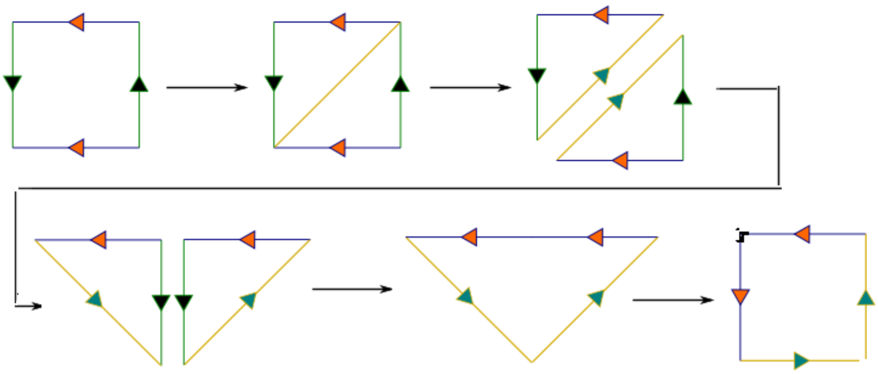
$$(M_1\#M_2)\#M_3 = M_1\#(M_2\#M_3).$$

¶ 曲面的多边形表示

在第 1.4 节，我们介绍过一种非常有用的方式以构造和理解曲面，即商空间的方法. 事实上，对于任意紧曲面，我们总可以从某个平面多边形开始，通过某些特定的方式“粘合”边界，得到该紧曲面. 例如，我们在第 1.4 节已经看到了如何通过以不同方式粘合矩形的边界得到圆柱，Möbius 带，环面和 Klein 瓶，以及如何粘合一个八边形的边界得到一个 2-洞环面. 我们甚至可以从“两角形”开始得到 $\mathbb{RP}^2$ 或 S^2：

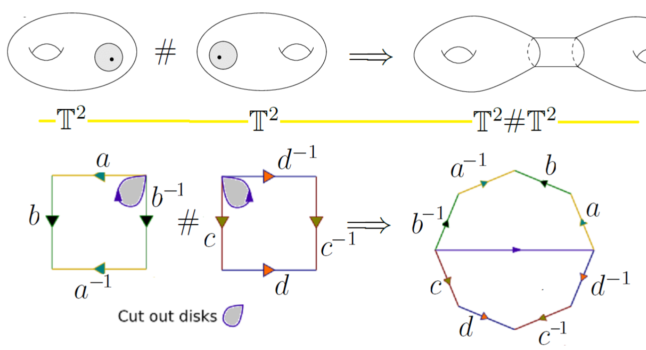


当然，曲面的多边形表示不是唯一的. 例如以下都是 Klein 瓶的多边形表示：



¶ 连通和的多边形表示

如果我们有曲面的多边形表示，那么可以轻易的得到它们连通和的多边形表示. 下图展示了如何从 $\mathbb{T}^2$ 的多边形表示中得到 2-洞环面 $\Sigma_2 = \mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$ 的多边形表示：



同样的构造方法在一般情况也有效. 于是我们得到

命题 4.4.2.（连通和的多边形表示）

设 X, Y 是紧曲面，则 $X\#Y$ 的多边形表示可以通过将 X 的多边形表示和 Y 的多边形表示中各“打开一个顶点，再将它们连接成一个多边形”而得到.

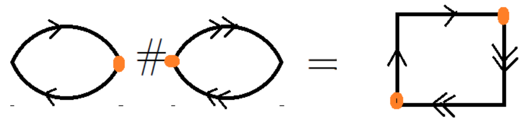
利用这个方法，我们证明：

推论 4.4.3

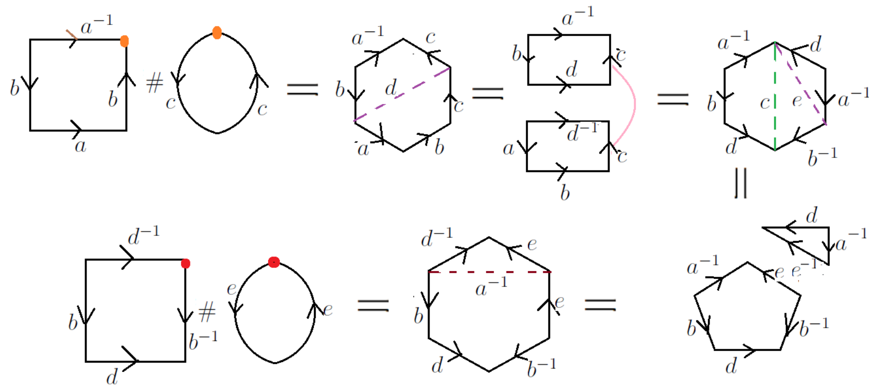
(1) $\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2 \simeq$ Klein 瓶.

(2) $\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2 \simeq \mathbb{T}^2\#\mathbb{RP}^2$.

证明 (1)



(2)



□

注 4.4.4. 特别地，“连通和”没有消去律，因为

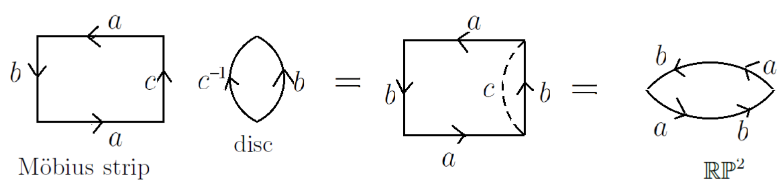
$$\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2 \simeq \text{Klein 瓶} \not\simeq \mathbb{T}^2.$$

另一方面，由归纳我们得到

$$\underbrace{\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\cdots\#\mathbb{RP}^2}_{2n+1} \simeq \underbrace{\mathbb{T}^2\#\cdots\#\mathbb{T}^2}_{n}\#\mathbb{RP}^2.$$

¶ 沿着边界圆粘合带边曲面

我们也可以用多边形表示来研究带边曲面，例如，我们从 Möbius 带和圆盘开始. 因为它们的边界都是 S^1, 我们可以将它们沿着 S^1 粘合. (注意：我们不是在做连通和，而仅仅是粘合边界. 所以我们小心地将 Möbius 带的边界圆分成两段，分别标记为 b 和 c, 并且将对应的圆盘的边界两段也同样标记为 b 和 c, 以表明如何粘合它们.)



因此我们得到：

推论 4.4.5

$\mathbb{RP}^2$ 可以通过将 Möbius 带和圆盘沿着边界粘合得到.

也就是说，$\mathbb{RP}^2$ 中挖去一个小圆盘得到的“交叉帽”空间跟 Möbius 带同胚. 类似地，可以证明：沿着边界粘合两条 Möbius 带，会得到 Klein 瓶！于是我们有

推论 4.4.6.（嵌入 Möbius 带）

Möbius 带可以被嵌入 $\mathbb{RP}^2$ 以及 Klein 瓶.

4.4.2 曲面的组合拓扑

¶ 单形与单纯复形

我们已经看到了多边形表示在研究曲面中十分有用. 一个自然的问题是：是否任意 (紧) 曲面都有一个多边形表示？答案是肯定的. 为了说明这一点，我们先介绍组合拓扑中的两个概念：单形和单纯复形.

定义 4.4.7.（单形）

(1) 考虑点集 $\{x_0, x_1, \cdots, x_m\} \subset \mathbb{R}^n$. 如果向量集

$$\{x_1 - x_0, \cdots, x_m - x_0\}$$

线性无关，则我们称 $\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$ 为**在一般位置的**（in general position）.

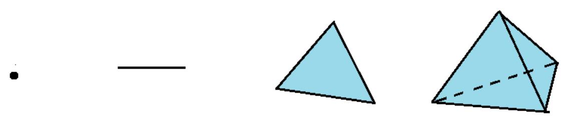
(2) 若点集 $\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$ 是在一般位置的，则我们称它的凸包为一个 **m-维单形** 或 **m-单形**（m-simplex），并且被记之为 $\sigma = \langle x_0, x_1, \cdots x_m \rangle$，即

$$\sigma = \langle x_0, x_1, \cdots, x_m \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^{m} a_i x_i | 0 \leqslant a_i \leqslant 1, \sum_{i=0}^{m} a_i = 1 \right\}.$$

(3) 对于任意 m-单形 $\sigma = \langle x_0, x_1, \cdots x_m \rangle$ 和任意指标集

$$\{\tau(0), \cdots, \tau(k)\} \subset \{0, 1, \cdots, m\},$$

我们称 k-单形 $\langle x_{\tau(0)}, \cdots, x_{\tau(k)} \rangle$ 为 σ 的一个 k-维**面**（face）. ♣



0-simplex 1-simplex 2-simplex 3-simplex

定义 4.4.8.（单纯复形）

设 K 是一个由 $\mathbb{R}^n$ 中一些单形组成的集合，记 $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$.[a] 如果

(1) $\sigma \in K \Longrightarrow \sigma$ 的任意一个面都在 K 中.

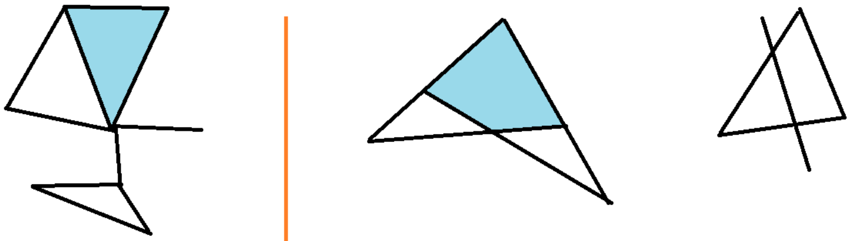
(2) $\sigma_1, \sigma_2 \in K \Longrightarrow$ 要么 $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$, 要么 $\sigma_1 \cap \sigma_2$ 是 σ_1 和 σ_2 的一个公共面.

(3) 对于任意 $x \in |K|$, 存在开集 $U \ni x$ 使得 U 仅与有限多个 $\sigma \in K$ 相交.

则我们称 K 为一个**单纯复形**（simplicial complex），且称 $|K|$ 为其**承载空间**（underlying space）.

[a] 注意 K 不是 $\mathbb{R}^n$ 的子集（因为作为集合，K 的元素不是点而是单形），但 $|K|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集. ♣

下面是单纯复形和非单纯复形的例子：



An example　　　　**Two non-examples**

如果单纯复形 K 中所包含的单形的维数最高是 m 维的，则我们称 K 为 m 维单纯复形. 例如，1 维单纯复形就是 (可被嵌入到欧氏空间的) 图 (graph)，它的边为 1-单形而顶点为 0-单形.

定义 4.4.9.（细分）

(1) 设 K, K' 都是单纯复形. 如果

(a). $|K| = |K'|$.

(b). 对于任意 $\sigma' \in K'$, 存在 $\sigma \in K$, 使得 $\sigma' \subset \sigma$.

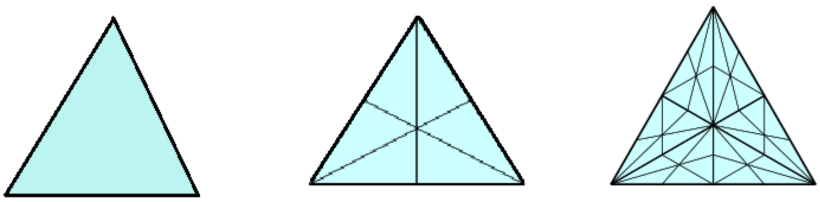
则我们称单纯复形 K' 是 K 的一个**细分**（subdivision）.

(2) 设 K, L 为两个单纯复形. 若存在细分 K', L' 以及双射 $f : |K'| \to |L'|$ 使得

$$\langle x_0, x_1, \cdots, x_m \rangle \in K' \Longleftrightarrow \langle f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_m) \rangle \in L',$$

则我们称 K, L 是**等价的**（equivalent）. ♣

对于单纯复形，有一种很有用的细分方法，叫做重心重分（barycenter subdivision）：对于 K 中的每个单形，添加其重心，并将每个 m-单形分为 $(m+1)!$ 个较小的 m-单形. 以下是对一个 2-单形连续进行两次重心重分的过程：



对于任意单形 σ，我们记 K_σ 为由 σ 及其所有的面组成的复形. 注意根据定义，我们有：如果 K' 是 K 的细分，则对于任意 $\sigma \in K$，

$$K'_\sigma := \{\sigma' \in K' \mid \sigma' \subset \sigma\}$$

是 K_σ 的一个细分.

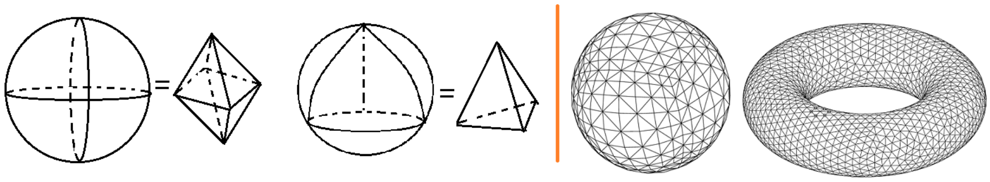
¶ 紧曲面的三角剖分

有了单纯复形的概念，我们就可以定义

定义 4.4.10.（三角剖分）

设 M 为一个曲面. 如果存在单纯复形 K 以及同胚映射 $\varphi: |K| \to M$，则我们称 K 为 M 的一个**三角剖分**（triangulation）.

以下是一些简单和不简单的三角剖分：



设单纯复形 K 是紧连通曲面 M 的一个三角剖分. 根据定义以及连通性，我们容易得到

(a) K 是由一些三角形（2-单形）和它的所有顶点（0-单形）、边（1-单形）所组成【即：不存在不是 2-单形的面的 0-单形和 1-单形】.

(b) K 中任意两个三角形的交集只能是一条公共边或一个公共顶点.

(c) 任意两个顶点可由一串首尾相接的边连接.

事实上，曲面的三角剖分还有如下特性（证明留作习题）：

命题 4.4.11.（曲面三角剖分的特性）

设 K 是紧无边曲面 M 的三角剖分，那么

(1) K 中的任意 1-单形（边）都恰好是两个 2-单形（三角形）的边，

(2) 对于 K 中任意 0-单形（顶点）v，包含 v 的 2-单形（三角形）可以"循环"排成一圈 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k, \sigma_{k+1} = \sigma_1$，使得对于任意 $1 \le i \le k$，σ_i 与 σ_{i+1} 的交集是它们的一条公共边.

反之，任意满足 (a),(b),(c),(1),(2)【或 $(1'),(2')$】的有限单纯复形 K，其承载空间 $|K|$ 都是一个紧连通拓扑曲面.

如果 K 是紧带边曲面 S 的三角剖分，类似的结论也成立：

命题 4.4.12.（带边曲面三角剖分的特性）

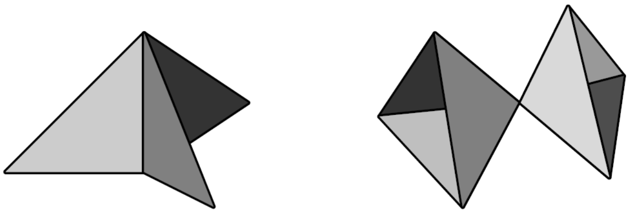
设 K 是紧带边曲面 M 的三角剖分，那么

$(1')$ K 中的任意 1-单形（边）都至多是两个 2-单形（三角形）的边，

$(2')$ 对于 K 中任意 0-单形（顶点）v，若 v 对应于 M 的内点，则同 (2)；若 v 对应于 M 的边界点，则包含 v 的 2-单形（三角形）可以排成一列 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$，使得对于任意 $1 \le i \le k-1$，σ_i 与 σ_{i+1} 的交集是它们的一条公共边.

反之，任意满足 (a),(b),(c),$(1'),(2')$ 的有限单纯复形 K，其承载空间 $|K|$ 都是一个紧连通拓扑带边曲面.

注意上述条件 (1)、(2) 帮我们去掉了如下两类的"不构成曲面的坏单纯复形"：



我们还可以把条件 (1)，(2) 统一成一个条件. 为简单起见，我们只考虑无边的情形. 我们设 v 是单纯复形 K 中的任意 0-单形（顶点），并将 K 中所有包含 v 的 2-单形（三角形）中 v 的对边（1-单形及其顶点 0-单形）的集合叫做 v 的**链接**（link）. 则条件 (1),(2) 可被统一为

(d) K 中任意顶点 v 的“链接”构成一个简单闭多边形.[15]

该条件不难被推广到高维：K 中任意 k-单形 σ 的“链接”(即跟单形 σ 不交且跟 σ 同为某更高维单形的面的单形 τ 的集合）构成一个拓扑球面. 我们把满足这样条件的三角剖分叫做**组合三角剖分**（combinatorial triangulation）. 虽然大部分我们能够想到的三角剖分都是组合三角剖分，但是确实存在某些拓扑流形（例如对 Poincaré 所发现的三维同调球做两次纬垂操作所得五维拓扑球)，它的某些三角剖分不是组合三角剖分.

¶ 三角剖分存在唯一性

根据定义，流形是 (A2)，(T2) 且局部欧的. 但是这些定义中的条件无法告诉我们流形的整体结构. 三角剖分是组合拓扑（combinatorial topology）(即“用组合方法”研究流形或者更一般拓扑空间的整体拓扑结构）这个拓扑学分支的基石. 例如，我们下面会展示如何用三角剖分定义拓扑曲面的定向、Euler 示性数等拓扑量. 进一步的，还可以用三角剖分定义同调群等代数拓扑不变量.

对流形做三角剖分以研究其整体拓扑性质的想法起源于 H. Poincaré 在 1895 年发表的长文 Analysis Situs. 后来在 1899 年，H. Poincaré 在为 Analysis Situs 写的第一个附录中研究了如下问题：

问题 1： 是否任意光滑流形都有三角剖分？

在 1924 年，德国数学家 H. Kneser 将该问题拓广至拓扑流形：

问题 2： 是否任意拓扑流形都有三角剖分？

事实上，人们甚至期待更多.

问题 3： 是否任意光滑/拓扑流形都有组合三角剖分？

当然，人们也关心三角剖分的唯一性问题. 早在 1908 年，德国数学家 Steinitz 和奥地利数学家 Tietze 就提出了所谓的“组合拓扑的主猜想（Hauptvermugung)”,

主猜想： 任意可被三角剖分的空间，其不同的三角剖分是等价的.

这些问题对于 20 世纪拓扑学的研究起到了很重要的引领作用. 事实上，H. Poincaré 认为问题 1 的答案是肯定的，并给出了一个不太严谨的论证. 后来美国数学家 S. Cairns

[15] 对于带边且顶点 v 对应于边界点的情形，v 的“链接”构成一条简单折线.

(1935 年) 和英国数学家 J.H.C. Whitehead[16] (1940) 年对问题 1 给出了完整的回答: 任意光滑流形具有唯一跟光滑结构相容的组合三角剖分.

对于二维拓扑流形即曲面, 其三角剖分的存在性最早是 1925 年由 T. Rado [17]给出. Rado 定理的证明比较长, 后来 1969 年 Doyle 和 Morgan 给出了一个基于 Jordan-Schoenflies 定理的简短证明. 1943 年希腊数学家 C. Papakyriakopoulos 证明了任何二维单纯复形的主猜想. 总而言之, 我们有

定理 4.4.13. (曲面三角剖分的存在唯一性)

(1) 任意曲面都存在一个组合三角剖分.

(2) 同一个曲面的任意两个三角剖分是等价的. ♡

在后文中, 我们将会不加证明地承认该定理.

对于三维拓扑流形三角剖分的存在唯一性, 直至 1952 年才由美国数学家 E. Moise 完成. 他证明了任意 3 维拓扑流形有光滑结构 (后来人们也证明了 3 维拓扑流形光滑结构的唯一性), 从而其组合三角剖分是存在且唯一的. 然而, 对于一般的 n ($n \geq 4$) 维拓扑流形, 问题 2、问题 3 以及主猜想的答案都是否定的. 事实上, 1969 年 Kirby 和 Siebenmann 对于任意 $n \geq 5$, 构造了不可被组合三角剖分的 n 维拓扑流形的例子, 之后直到 2016 年才由 C. Manolescu 完成了最后一击, 证明了对于任意 $n \geq 5$, 存在 n 维的拓扑流形不可被三角剖分. 四维是拓扑学中一个非常特殊的维数. 1982 年 M. Freedman 在这个维度首先取得了突破, 构造不可被组合三角剖分的 4 维拓扑流形的例子, 之后 1985 年 A. Casson 证明了 Freedman 所构造的 4 维流形不可被三角剖分. 此外, 主猜想首先在 1961 年被 Milnor 证否, 不过他给出的例子是单纯复形但不是拓扑流形. 之后 1969 年 Kirby 和 Siebenmann 才给出了具有不同三角剖分的 n 维拓扑流形 ($n \geq 5$) 的例子.

在拓扑学中, 对于 $n \geq 5$ 维流形和 $n = 2, 3, 4$ 维流形的研究, 无论是方法还是结论往往都有着较大的差异. 因此人们习惯于把 $n \geq 5$ 维的拓扑称为高维拓扑, 而把 $n = 2, 3, 4$ 维的拓扑称为低维拓扑. 当然, 我们在第 4.3 节所提到的扭结理论就是低维拓扑的一个重要分支.

¶ 多边形表示的存在性

我们已经看到了多边形表示是有用的. 为了应用 Rado 定理即组合三角剖分的存在性去证明多边形表示的存在性, 我们还需要

引理 4.4.14. (组合三角剖分的 "强连通性")

设 K 是紧连通曲面 M 的一个组合三角剖分. 则对于 K 中任意 2-单形 σ, σ', 存在 K 中 2-单形 $\sigma_0 = \sigma, \sigma_1, \cdots, \sigma_k, \sigma_{k+1} = \sigma'$ 使得对任意 $0 \leq i \leq k$, σ_j 与 σ_{j+1} 交于一条公共边. ♢

[16] 怀特海德 (John Henry Constantine Whitehead, 1904-1960), 英国数学家, 同伦论的创始人之一, 引入了比单纯复形更一般的 CW 复形的概念. 他的叔叔是著名数学家、哲学家 A.N.Whitehead.

[17] 拉多 (Tibor Rado, 1895-1965), 匈牙利数学家. 他的另一项非常有名的工作是解决 Plateau 问题 (跟 Douglas 同时而独立解决该问题).

证明 假设引理不成立，即存在 2-单形 σ 和 σ'，不能通过一组 2-单形如引理中所述那样"相连"．把所有能跟 σ "相连"的 2-单形（含 σ）列为 $\sigma_1, \cdots, \sigma_m$，而不能跟 σ "相连"的列为 $\sigma'_1, \cdots, \sigma'_m$，则任意 σ_k 与 σ'_l 都不能"相连"．令 $K_1 = \cup\sigma_j$，$K_2 = \cup\sigma'_j$. 由连通性，$K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. 由选取方式，$K_1 \cap K_2$ 中不包含 1-单形，于是该交集仅包含 0-单形即顶点. 任取交集中的顶点 v，则由命题4.4.11，所有包含 v 的 2-单形是"相连"的，矛盾. □

下面我们证明

定理 4.4.15.（多边形表示的存在性）

任意紧曲面 M 都存在一个多边形表示. ♡

证明 不失一般性，我们假设曲面 M 是连通的 (否则它是有限多个紧连通曲面的无交并，分别处理即可). 根据 Rado 定理，任何紧曲面 M 都存在一个组合三角剖分 K. 紧性和局部有限性蕴含了 K 是有限集. 我们记 K 中所有的 2-单形为

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k.$$

将这些 2-单形的边 (1-单形) 都标记字母（当然，我们用同一个字母标记相邻 2-单形的公共边）. 取 σ_1. 如果 $k > 1$，那么由引理4.4.14，存在 σ_{i_2} 使得

$$\sigma_1 \cap \sigma_{i_2} = \text{一条公共边}.$$

令 $P_2 = \sigma_1 \cup \sigma_{i_2}$（擦掉粘合的公共边上所标记的字母）. 那么 P_2 是一个各边都有标记字母的四边形. 如果 $k > 2$，再次由由引理4.4.14，存在 σ_{i_3} 使得

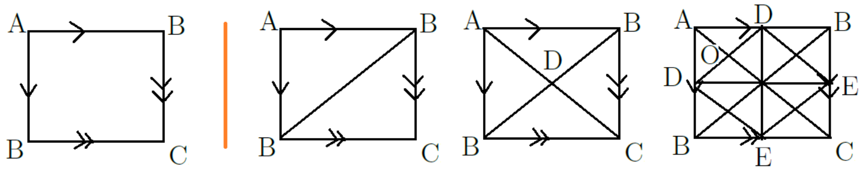
$$\sigma_{i_3} \cap P_2 = \text{至少一条公共边}.$$

有可能 σ_{i_3} 与 P_2 的交集超过一条边，但我们仅把 σ_{i_3} 的一条边粘合到 P_2 从而得到各边都有标记字母的五边形 P_3. 重复这个过程，我们最终可以得到一个各边都被标记了字母的 $(k+2)$-边形，且每个字母最多标记这个多边形的两条边. 它就是我们所需要的 M 的多边形表示. □

¶ 在多边形表示上做三角剖分

通常在曲面上直接画三角剖分会很复杂，但在其多边形表示上处理则会容易一些. 然而，在多边形表示上画三角剖分时要小心：必须避免出现"不同的三角形有相同的三个顶点"这种情形 (否则这两个三角形的交集就是三条边，跟单纯复形的定义矛盾！)

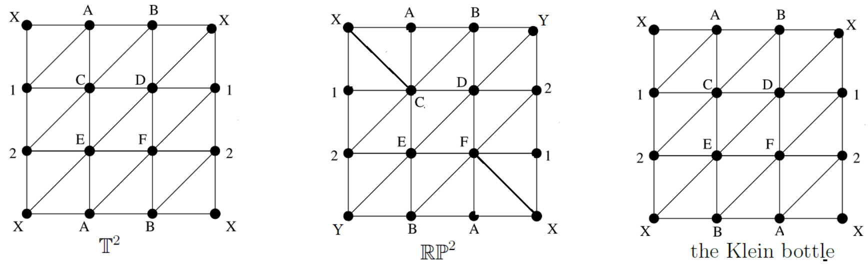
以下是用多边形表示做 S^2 的三角剖分时，错误的剖分方法：



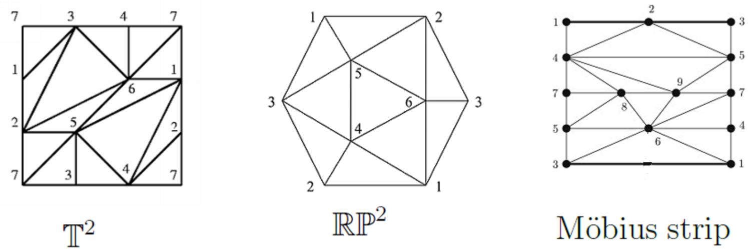
These are NOT triangulations!

例如，对于最后一个，即使我们已经将多边形分割为很多小的三角形，它们之间仍然是冲突的，因为存在两个三角形，具有相同的顶点 A, D 和 O.

以下是 $\mathbb{T}^2, \mathbb{RP}^2$ 和 Klein 瓶 (正确的) 三角剖分(区别在哪里？)):



这里是上述三个曲面的顶点更少的三角剖分方法：



¶ 定向

利用三角剖分，对于任意紧曲面 M，我们得到一个有限单纯复形 K 与其同胚. 事实上，曲面 M 的很多拓扑信息都被蕴含于 K 的组合信息当中. 我们首先定义

定义 4.4.16.（单形的定向）

给定任意单形 $\sigma = \langle x_0, x_1, \cdots, x_m\rangle$，

(1) 对于 $\{0, 1, \cdots, m\}$ 的任意置换 $\{\tau_0, \cdots, \tau_m\}$，我们称顶点的排序 $[x_{\tau(0)} \cdots x_{\tau(m)}]$ 为单形 σ 的一个**定向**（orientation）.

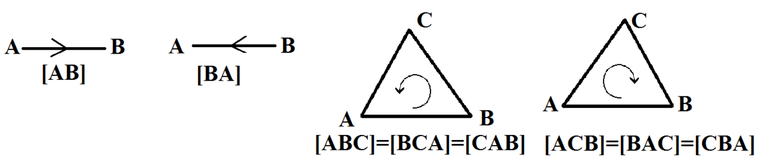
(2) 对于顶点的两个不同排序，如果它们对应的置换具有相同的奇偶性（即它们之间相差偶数个对换），则我们称这两个排序**定义了相同的定向**（define the same orientation）.

♣

根据定义，任何单形都有两个 (相反) 的定向：

$$[x_0x_1x_2\cdots x_m] \quad 和 \quad [x_1x_0x_2\cdots x_m] = -[x_0x_1x_2\cdots x_m].$$

以下是 1-单形和 2-单形上的不同定向：



现在我们通过 2-单形和 1-单形的定向定义曲面的定向. 我们首先定义

定义 4.4.17.（单纯复形的定向）

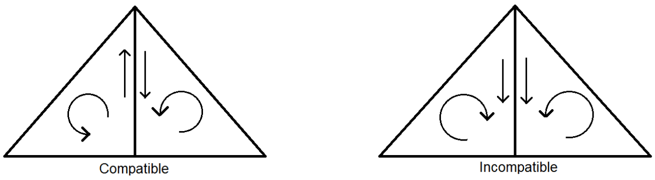
假设 K 是一个二维单纯复形.

(1) 设 $\langle A, B, C\rangle$ 是一个 2-单形，且具有定向 $[ABC]$. 则定义它在边 $\langle A, B\rangle, \langle B, C\rangle$ 和 $\langle A, C\rangle$ 上**的诱导定向**（induced orientation）分别为 $[AB], [BC], [CA]$.

(2) 设 2-单形 σ_1 和 σ_2 是“相邻的”，即它们的交集是一条公共边. 如果它们在

公共边上诱导的定向是相反的，则我们称 σ_1 的定向和 σ_2 的定向是**相容的**（compatible）.

(3) 如果可以给 K 的每个 2-单形赋予定向，使得所有相邻单形的定向是相容的，则我们称 K 是**可定向的**（orientable）.



注意单纯复形未必可定向. 不过，如果 K 是 2-单形即三角形的细分所对应的复形，则 K 一定是可定向的，且它跟三角形一样恰有两个定向：

引理 4.4.18

设有限单纯复形 K 是三角形复形 $K_{\langle A,B,C\rangle}$ 的一个细分. 则对于 $\langle A,B,C\rangle$ 的任一定向，可以赋予 K 一个定向使得该定向不改变 $\langle A,B,C\rangle$ 的边上的定向.

证明 如果单形 $\langle A,B,C\rangle$ 是"逆时针"定向，则赋予于 K 中所有的小三角形"逆时针"定向. 如果 $\langle A,B,C\rangle$ 是"顺时针"定向，则赋予于 K 中所有的小三角形"顺时针"定向. 易见该定向不改变三角形 ABC 三条边上的定向（但是有可能会把每条边都分割成很多小段）.

反之，设 K 的某个定向不是由上述两种方式给出来的，即 K 中有两个小三角形，一个是"顺时针"定向，另一个是"逆时针"定向. 在这两个三角形各取一个内点，使得连接它们的线段不经过任何 0-单形，则该线段途径的小三角形中，一定有两个相邻的小三角形，其中一个是"顺时针"定向而另一个是"逆时针"定向，从而它们在交集上诱导相同的定向，即定向不相容，矛盾. □

我们将用三角剖分的可定向性定义曲面的可定向性. 为此我们还需要一点准备工作：我们知道，曲面的三角剖分并不唯一，但是曲面的不同三角剖分是等价的. 因此，我们自然想到要证明

命题 4.4.19.（细分的可定向性）

设 K 是紧连通曲面 M 的一个三角剖分，而 K' 是 K 的一个细分，则 K' 是可定向的当且仅当 K 是可定向的.

证明 设 K 是可定向的，并赋予 K 一个定向. 对于 K 中的每个 2-单形 σ，按照引理4.4.18的方式赋予它的细分

$$K'_\sigma := \{\sigma' \in K' \mid \sigma' \subset \sigma\}$$

定向. 由 K 中定向相容性可知 K' 中这样赋予的定向是相容的.

反之，若 K' 是可定向的，则对于 K 中的每个 2-单形 σ，K'_σ 上的定向给出了 σ 的一个定向，且由 K' 的定向相容性知由此所得到的 K 的定向是相容的. □

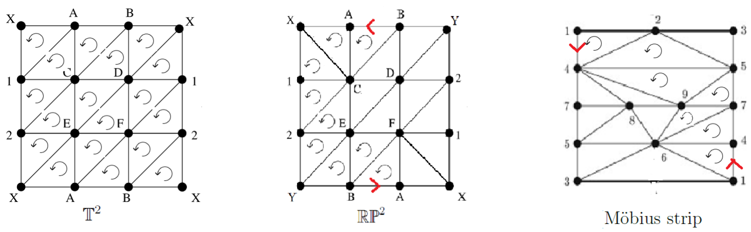
因为曲面的任意两个三角剖分都是等价的，即有公共的细分，所以如下的定义不依赖于三角剖分的选取，从而是合理的：

定义 4.4.20.（可定向曲面）

如果曲面 M 的一个三角剖分 K 是可定向的，我们称 M 是**可定向的**（orientable）. ♣

注意到可定向性是拓扑性质：如果 M 是可定向的（即存在 M 的一个三角剖分 K 且 K 是可定向的）且如果 $N \simeq M$，那么同胚映射 $f: M \to N$ 将会自动给出 N 上的一个三角剖分 $\widetilde{K}$，而且我们可以通过“移植 K 上的定向”的方式赋予 $\widetilde{K}$ 一个定向.

下图展示了 $\mathbb{T}^2$ 是可定向的，而实射影空间 $\mathbb{RP}^2$ 和 Möbius 带则不可定向：



对于可定向性，我们有以下命题，其证明我们留作练习：

命题 4.4.21.（紧连通曲面的可定向性）

令 M, M_1, M_2 维紧连通曲面. 那么

(1) 如果 M 是可定向的，那么在 M 上恰好有两种相反的定向.

(2) 如果 M_1, M_2 是可定向的，那么 $M_1 \# M_2$ 也可定向.

(3) 如果存在一个 Möbius 带到 M 的嵌入，那么 M 是不可定向的. ♠

特别地，由推论4.4.6知，$\mathbb{RP}^2$，Klein 瓶，以及更一般地 $\mathbb{RP}^2 \# S$（其中 S 是任意紧曲面）都是不可定向的. 而从下文的曲面分类定理来看，每个不可定向连通紧曲面里面都可以找到嵌入其中的 Möbius 带. 于是，对于紧曲面而言，“存在嵌入 M 的 Möbius 带”与 M 不可定向是等价的. 事实上，有很多书直接把“存在嵌入 M 的 Möbius 带”作为曲面 M 不可定向的定义. 【几何上，这就是说我们可以从曲面的一侧出发，沿着该曲面上的某个圆走一圈，不跨过边界即可达到曲面的另一侧】

¶ Euler 示性数

在组合拓扑里，通过运用组合剖分地方式，我们不仅可以定义可定向性这样“定性”的拓扑性质，还可以定义 Euler 示性数、同调群等“定量”的拓扑不变量. 例如，

定义 4.4.22.（单纯复形的 Euler 示性数）

设 K 是有限单纯复形 K，记 K 中 m-维单形的个数为 $|K^{(m)}|$. 我们称

$$\chi(K) = \sum(-1)^m |K^{(m)}|,$$

为 K 的 **Euler 示性数**（Euler characteristic）为 ♣

例如，若 K 是有限图，则其 Euler 示性数为

$$\chi(K)=|V|-|E|,$$

其中 $|V|$ 和 $|E|$ 分别为该图的顶点数和边数，而我们在第 3.6 节已经看到了此时 K 的基本群是由 $\chi(K)$ 决定的. 若 K 是紧曲面的三角剖分，则它的 Euler 示性数为

$$\chi(K)=|V|-|E|+|F|,$$

其中 $|V|,|E|,|F|$ 分别是 K 中的顶点数，边数和 2 维面数.

我们证明

命题 4.4.23.（细分不改变 Euler 示性数）

如果 K 是紧曲面 M 的三角剖分，而 K' 是 K 的细分，那么 $\chi(K')=\chi(K)$.

证明 若在细分 K 成 K' 时，在 K 中所有三角形的内部总共添加了 m 个点，在其所有“内部边”（即 K 的不对应于 M 的边界的那些 1-单形）上共添加了 n_1 个点，在其所有“边界边”（即 K 的对应于 M 的边界的那些 1-单形）上共添加了 n_2 个点，则新的单纯复形 K' 比原来的单纯复形 K 多了 $m+n_1+n_2$ 个 0-单形. 这些增加的点导致 K' 中所有三角形的内角和比 K 总共增加了 $m\cdot 2\pi+n_1\cdot 2\pi+n_2\pi$，从而 K' 比 K 多了 $2m+2n_1+n_2$ 个 2-单形.

K' 比 K 多了多少个 1-单形呢？为区别起见，我们称连接到“新内部点”的 1-单形为“新边”，K 中“内部边”被增加的点分割后得到的边叫做“新内部边”，K 中“边界边”被增加的点分割后得到的边叫做“新边界边”. 则新内部边比原内部边多 n_1 条，新边界边比原边界边多 n_2 条. 于是问题转化为：新边有多少条？新增的 $2m+2n_1+n_2$ 个三角形共多出来 $6m+6n_1+3n_2$ 条边（其中“新边”和“新内部边”都重复算了两遍），其中有 n_2 条是“新边界边”，有 n_1 条是“新内部边”，这些“新内部边”需要算两遍，即 $2n_1$ 条边，剩下的是新边，每条边也被算了两遍，所以新边的条数是 $(6m+6n_1+3n_2-2n_1-n_2)/2=3m+2n_1+n_2$ 条. 于是共增加了 $3m+3n_1+2n_2$ 条边，跟增加的“点数 + 面数”一致，从而命题得证.

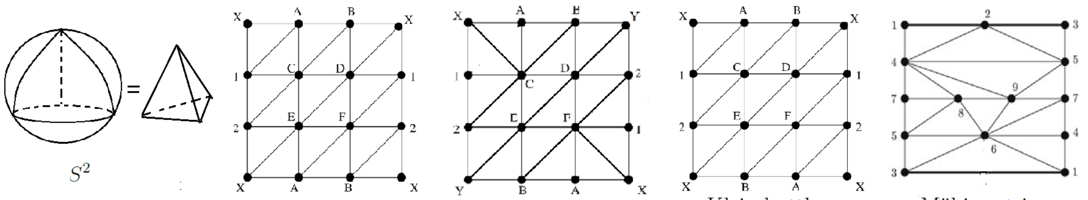
□

因为曲面的任意两个三角剖分都有一个公共子划分，所以我们可以定义

定义 4.4.24.（紧曲面的 Euler 示性数）

设 S 为一个紧曲面，而 K 是 S 的一个三角剖分，则我们称 $\chi(S):=\chi(K)$ 为 S 的 **Euler 示性数**（Euler characteristic）.

例 4.4.25. 根据以下图片，



S^2 $\mathbb{T}^2$ $\mathbb{RP}^2$ Klein bottle Möbius strip

我们立刻得到了：

$$\begin{aligned}
&\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2,\\
&\chi(\mathbb{T}^2) = 9 - 27 + 18 = 0,\\
&\chi(\mathbb{RP}^2) = 10 - 27 + 18 = 1,\\
&\chi(\text{Klein 瓶}) = 9 - 27 + 18 = 0,\\
&\chi(\text{Möbius 带}) = 9 - 24 + 15 = 0.
\end{aligned}$$

注记: $\mathbb{T}^2$, Klein 瓶和 Möbius 带两两不同胚. 因此仅有 Euler 示性数是不能决定一个曲面的拓扑.

从以上公式我们看到 χ 不是“可加的”[18], 即 $\chi(S_1\#S_2) \neq \chi(S_1) + \chi(S_2)$. 然而，我们有

定理 4.4.26.（连通和的 Euler 示性数）
$\chi(S_1\#S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$ ♡

证明 因为圆盘同胚于三角形即 2-单形，所以在做连通和的时候，可以将两个曲面做三角剖分，然后各取一个三角形，去掉三角形的内部，并粘接边界. 这样，原来两个曲面的三角剖分恰好变成新的连通和的三角剖分. 比较一下，可知新的单纯复形比原来的两个单纯复形少了三个顶点，两条边和两个面. 故

$$\chi(S_1\#S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 3 + 3 - 2 = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2,$$

从而定理得证. □

4.4.3 紧曲面的分类

¶ 从多边形表示到符号表示

多边形表示对于研究曲面而言非常有用，但有时用起来并不很方便，因为要画一个(边数非常多的) 多边形并且标记每条边是非常耗费时间的. 不过，仔细想一下我们会发现，我们完全可以把多边形区域换成一些别的形状比如圆盘：只要把圆盘的边界即圆周分成 n 段圆弧，并按照顺序跟 n 边形一样标记字母，这样得到的效果跟用 n 边形表示是完全一样的. 把这个想法再往前发展一步，我们发现：多边形表示的核心是边之间的排列顺序以及“哪条边与哪条边以什么方向粘贴”的粘贴关系，所以我们完全可以不用画图，而只要简单地用符号表示这些边的排列顺序与粘贴关系即可.

下面我们就引入这样一个符号系统，用字母去表示多边形：给定一个紧曲面的多边形表示，我们用符号将其记为

$$\langle S \mid A \rangle,$$

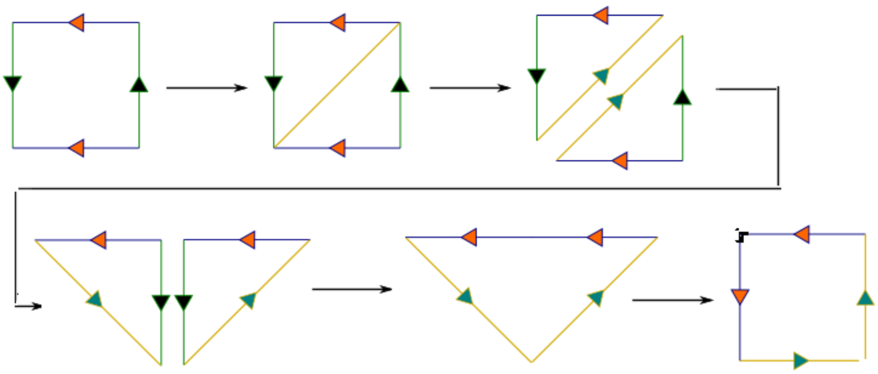
其中

[18] 然而，它确实是“可乘的”，即对于紧曲面或者更一般的紧流形，我们有 $\chi(M\times N) = \chi(M)\chi(N)$. 这个公式将在后续课程中学到.

(a) S 是一个字母集，用以标记多边形的边，

(b) A 由一个或多个字组成，使得 S 中每个字母（包括它的逆：我们按照逆时针方向记录多边形的边，用字母的逆表示在粘贴该边时要“反向”即沿顺时针方向粘）在 A 中至多出现两次. 此外，如果 A 由超过一个字组成，那么对于每个字，都至少有一个字母出现在另外一个字里面（因此可以将他们粘起来得到一个连通曲面）.

例如，对于 Klein 瓶，我们已经看到了



通过使用以上新的符号系统，我们就不用画出这些图，而只要写出如下的符号串：(这里我们仅需用符号记录上面的第一、三、四、五共四张图就足够了)

$$\langle a,b\mid aba^{-1}b\rangle\to\langle a,b,c\mid abc,c^{-1}a^{-1}b\rangle\to\langle a,b,c\mid acb^{-1},bca\rangle\to\langle a,c\mid aacc\rangle$$

这样就大幅简化了我们的工作.

根据命题4.4.2，如果 M_1,M_2 分别有多边形表示 $\langle S_1|A_1\rangle$ 和 $\langle S_2|A_2\rangle$，其中 S_1 和 S_2 中的字母是不重复的，那么 $M_1\#M_2$ 就有多边形表示 $\langle S_1S_2|A_1A_2\rangle$. 于是我们可以把“曲面的连通和”这个过程用符号表示成

$$\langle S_1|A_1\rangle\#\langle S_2|A_2\rangle=\langle S_1,S_2|A_1A_2\rangle.$$

例如，我们有

$$\langle a\mid aa\rangle\#\langle c\mid cc\rangle=\langle a,c\mid aacc\rangle,$$

而这是 $K\simeq\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2$ 的一个“符号证明”.

注 4.4.27.

(1) 正如以上例子所看到的，对于给定曲面的多边形表示，其符号表示不是唯一的.

(2) 虽然我们是从三角剖分开始得到了多边形表示，但多边形表示不必与任何三角剖分有关. 它仅仅是一种通过“粘合多边形边界”来得到曲面的方法.

¶ 初等变换

于是一个自然的问题是：如何判断两个不同的符号表示是代表相同的曲面还是不同的曲面？或者反过来，如何将给定曲面的符号表示转化为一个新的 (与原先的符号表示等价，但是更简单) 符号表示？下面我们对符号表示引入一些**初等变换** (elementary transformations)，这些变换前后的符号表示代表的是同一个曲面的不同多边形表示. 后面我们将

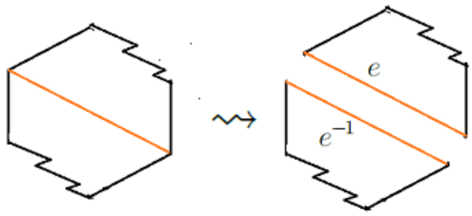
利用这些初等变换把给定的符号表示变换称某些特定“标准型”，从而可以认出该符号表示所代表的曲面.

(I) **剪切**:

$$\langle S|A_1A_2\rangle \rightsquigarrow \langle S,e|A_1e,e^{-1}A_2\rangle,$$

其中 e 是一个不在 S 中的新字母.

从几何上看，“剪切”变换就是用符号的方式记录下图所代表的过程，即：沿着连接两个顶点的对角线剪开多边形，得到两个新的多边形. 如图所示，所剪出的新边只要按照相反的方向粘贴就得到原来的多边形，所以我们用新字母 e 以及 e^{-1} 来标记所剪出的新边):



(II) **粘合**:

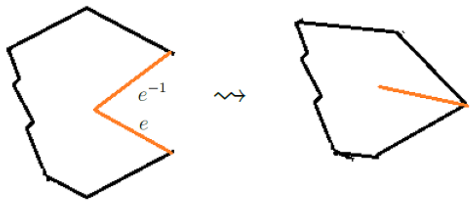
$$\langle S,e|A_1e,e^{-1}A_2\rangle \rightsquigarrow \langle S|A_1A_2\rangle.$$

显然这就是剪切变换的逆变换.

(III) **折叠**:

$$\langle S,e|A_1ee^{-1}A_2\rangle \rightsquigarrow \langle S|A_1A_2\rangle.$$

该变换所记录的是下图所代表的过程:



(IV) **展开**:

$$\langle S|A_1A_2\rangle \rightsquigarrow \langle S,e|A_1ee^{-1}A_2\rangle.$$

这是折叠的逆变换. （在后文中，如果字或字的某部分太短以致后续的操作会出现问题时，那我们将默认对其进行展开操作.）

(V) **轮换**:

$$\langle S|a_1a_2\cdots a_m\rangle \rightsquigarrow \langle S|a_ma_1a_2\cdots a_{m-1}\rangle.$$

该变换代表着从另外一个顶点开始记录边的标记.

(VI) **反射**:

$$\langle S|a_1a_2\cdots a_m\rangle \rightsquigarrow \langle S|a_m^{-1}a_{m-1}^{-1}\cdots a_1^{-1}\rangle.$$

该变换代表着通过“镜像对称”将多边形做反射. 这样就同时改变了所有标记的方

向，但是不会改变粘合的方式.

(VII) **替代**:

我们有三种不同的替代变换，分别为

$$\begin{aligned}
&\langle S, b_1, \cdots, b_k | A_1 b_1 \cdots b_k A_2 \rangle \ \rightsquigarrow \langle S, b | A_1 b A_2 \rangle, \\
&\langle S, e_1, e_2 | A_1 e_1 e_2 A_2 e_1 e_2 A_3 \rangle \quad \rightsquigarrow \langle S, e | A_1 e A_2 e A_3 \rangle, \\
&\langle S, e_1, e_2 | A_1 e_1 e_2 A_2 e_2^{-1} e_1^{-1} A_3 \rangle \rightsquigarrow \langle S, e | A_1 e A_2 e^{-1} A_3 \rangle.
\end{aligned}$$

它们所代表的含义如下:

- 第一个变换表示“将多条相连的边界线段重新标记为一条线段”. [注意: 所涉及到的字母在字中别处都不出现，表示这些边不会粘到任何其他边上.]
- 第二个和第三个变换表示“如果两条相连的边在不同的地方出现两次，且以给定的顺序正向或反向粘贴，那么我们就把它们重新标记为一条边”.

注意对于形如

$$\langle S, e_1, e_2 | A_1 e_1 e_2 A_2 e_2 e_1 A_3 \rangle \quad \text{或者} \quad \langle S, e_1, e_2 | A_1 e_1 e_2 A_2 e_1^{-1} e_2^{-1} A_3 \rangle$$

的符号表达式里，我们不能将 $e_1 e_2$ 重新标记为一条边.

(VIII) **连通和**:

$$\langle S_1, S_2 | A_1 A_2 \rangle \rightsquigarrow \langle S_1 | A_1 \rangle \# \langle S_2 | A_2 \rangle,$$

其中 A_i 仅包含 S_i 的字母.

这表示形如 $\langle S_1, S_2 | A_1 A_2 \rangle$（其中字 A_i 仅由 S_i 的字母构成）的符号表示所代表的曲面可以由连通和得到.

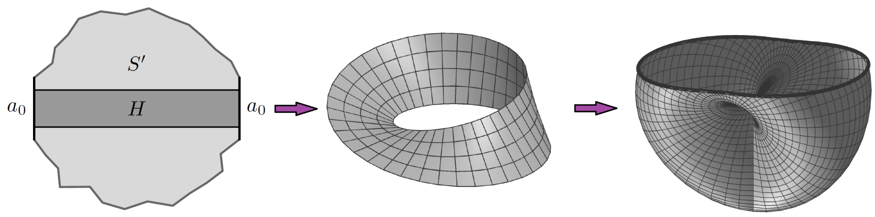
¶ 符号表示的化简

现在假设我们有一个紧连通曲面，它具有符号表示 $\langle S | A \rangle$. 为了能够“认出”该曲面，我们将通过初等变换将其转化为一个更简单的形式. 注意我们总是可以通过粘合以及反射将 A 中所有的字连成一个字.

$\boxed{\textbf{步骤 1}}$. 设字母 $a \in S$ 以 a 的形式（即没有 a^{-1}）在字 A 中出现了两次，即该符号表示形如 $\langle S, a | A_1 a A_2 a A_3 \rangle$，则我们采用以下变换:

$$\begin{aligned}
\langle S, a | A_1 a A_2 a A_3 \rangle &\overset{(5)}{\rightsquigarrow} \langle S, a | A_3 A_1 a A_2 a \rangle \\
&\overset{(1)}{\rightsquigarrow} \langle S, a, b | A_3 A_1 a b, b^{-1} A_2 a \rangle \\
&\overset{(5),(6)}{\rightsquigarrow} \langle S, a, b | b A_3 A_1 a, a^{-1} A_2^{-1} b \rangle \\
&\overset{(2)}{\rightsquigarrow} \langle S, b | b A_3 A_1 A_2^{-1} b \rangle \\
&\overset{(5)}{\rightsquigarrow} \langle S, b | b b A_3 A_1 A_2^{-1} \rangle \\
&\overset{(8)}{\rightsquigarrow} \langle b | bb \rangle \# \langle S | A_3 A_1 A_2^{-1} \rangle.
\end{aligned}$$

我们得到了 $\mathbb{RP}^2$！该过程在几何上可以用下图来解释:



因为所得字的长度缩短了，所以将这个过程重复有限次，我们得到：

结论 1. 如果 A 包含 $\cdots a\cdots a\cdots$, 那么我们有

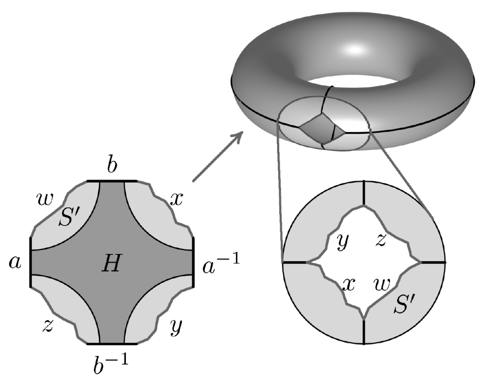
$$M\simeq \mathbb{RP}^2\#\cdots\#\mathbb{RP}^2\#M_1,$$

其中 M_1 是由符号表示 $\langle S_1|A_1\rangle$ 所代表的曲面，其中在 A_1 中没有字母以相同的形式出现两次，换言之，A_1 中的字母都以 $\cdots a\cdots$ 或 $\cdots a\cdots a^{-1}\cdots$ 的形式出现.

步骤 2. 假设 $M_1=\langle S|A\rangle$, 其中 A 包含了 $\cdots a\cdots b\cdots a^{-1}\cdots b^{-1}\cdots$, 那么我们可以

$$\begin{aligned}
\langle S,a,b|A_1aA_2bA_3a^{-1}A_4b^{-1}A_5\rangle &\rightsquigarrow \langle S,a,b|A_5A_1aA_2bA_3a^{-1}A_4b^{-1}\rangle\\
&\rightsquigarrow \langle S,a,b,c|A_5A_1aA_2c,c^{-1}bA_3a^{-1}A_4b^{-1}\rangle\\
&\rightsquigarrow \langle S,a,b,c|A_2cA_5A_1a,a^{-1}A_4b^{-1}c^{-1}bA_3\rangle\\
&\rightsquigarrow \langle S,b,c|A_2cA_5A_1A_4b^{-1}c^{-1}bA_3\rangle\\
&\rightsquigarrow \langle S,b,c|c^{-1}bA_3A_2cA_5A_1A_4b^{-1}\rangle\\
&\rightsquigarrow \langle S,b,c,d|c^{-1}bA_3A_2cd,d^{-1}A_5A_1A_4b^{-1}\rangle\\
&\rightsquigarrow \langle S,b,c,d|A_3A_2cdc^{-1}b,b^{-1}d^{-1}A_5A_1A_4\rangle\\
&\rightsquigarrow \langle S,c,d|A_3A_2cdc^{-1}d^{-1}A_5A_1A_4\rangle\\
&\rightsquigarrow \langle S,c,d|cdc^{-1}d^{-1}A_5A_1A_4A_3A_2\rangle\\
&\rightsquigarrow \langle c,d|cdc^{-1}d^{-1}\rangle\#\langle S|A_5A_1A_4A_3A_2\rangle.
\end{aligned}$$

我们得到了环面 T^2！该过程在几何上可以用下图来解释：



这里有一个重要观察：

所得的字 $A_5A_1A_4A_3A_2$ 的长度缩短了且依然不会包含 $\cdots a\cdots a\cdots$.

于是我们可以重复这个过程有限次（而不必担心会回到步骤 1 的情形），得到

结论 2. 我们有

$$M\simeq \mathbb{RP}^2\#\cdots\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\cdots\#\mathbb{T}^2\#M_2,$$

其中 M_2 能被表示为 $\langle S_2|A_2\rangle$, 且在 A_2 中既没有 $\cdots a\cdots a\cdots$ 也没有 $\cdots a\cdots b\cdots a^{-1}\cdots b^{-1}\cdots$.

断言： 如果 M 是一个无边紧曲面，那么我们已经完成了，即

$$M \simeq \mathbb{RP}^2\#\cdots\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\cdots\#\mathbb{T}^2.$$

原因：若 M 是无边紧曲面，则每个被标记的字母都恰好出现两次. 如果在剩下的字 A_2 中不存在字母 a 使得 A_2 形如 $\cdots a\cdots a\cdots$, 并且 A_2 至少还留有两个字母，那么所有留下的字母都以一个 a 一个 a^{-1} 的形式出现的. 此时必然存在字母 a, b 使得 A_2 形如 $\cdots a\cdots b\cdots a^{-1}\cdots b^{-1}\cdots$ 的字. 为了看到这点，我们只要在所有剩下的字母中，取 a 是"离它的逆最近"的字母即可. 此时唯一的例外情况是类似于 $aa^{-1}bb^{-1}$ 的字, 但它代表的曲面就是 S^2，在做连通和的时候是"零元".

如果 M 是带边紧曲面，那么我们还需要继续下面的步骤.

$\boxed{\textbf{步骤 3}}$. 假设 M 是带边曲面. 那么 $M_2 = \langle S|A\rangle$ 有以下形式 $A = \cdots a\cdots a^{-1}\cdots$, 但是没有 $\cdots a\cdots b\cdots a^{-1}\cdots b^{-1}\cdots$. 取 a 为"离它的逆最近"的字母. 那么 $A = A_1ab_1\cdots b_ka^{-1}A_2$, 其中 $b_1,\cdots,b_k$ 将不会出现在 A_1 和 A_2 中. 因此我们得到

$$\begin{aligned}\langle S,a,b_1,\cdots,b_k|A_1ab_1\cdots b_ka^{-1}A_2\rangle &\rightsquigarrow \langle S,a,b|A_1aba^{-1}A_2\rangle\\ &\rightsquigarrow \langle S,a,b|aba^{-1}A_2A_1\rangle\\ &\rightsquigarrow \langle a,b|aba^{-1}\rangle\#\langle S|A_2A_1\rangle,\end{aligned}$$

其中 $\langle a,b|aba^{-1}\rangle$ 所表征的是圆盘. 我们再次注意到：A_2A_1 长度缩短了，且不包含步骤 1 和步骤 2 中的两种类型. 因此我们可以重复步骤 3 有限次直到所得字中不包含互逆的元素. 至此，每个字母恰好出现一次. 注意到 $\langle b_1,\cdots,b_n|b_1\cdots b_n\rangle$ 所表征的依然是圆盘. 于是我们得到

$\boxed{\textbf{结论 3}}$. 我们有

$$M \simeq \mathbb{RP}^2\#\cdots\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\cdots\#\mathbb{T}^2\#D\#D\#\cdots\#D,$$

其中 D 是平面圆盘.

将这些结论放到一起，我们得到

命题 4.4.28

任意紧曲面都同胚于如下形式的曲面

$$S^2\#\mathbb{RP}^2\#\cdots\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{T}^2\#\cdots\#\mathbb{T}^2\#D\#\cdots\#D.$$

注 4.4.29.

(1) 如果存在至少一个 $\mathbb{RP}^2$ 或 $\mathbb{T}^2$ 或 D，则我们可以移除 S^2.

(2) 如果存在至少一个 $\mathbb{RP}^2$, 那么我们可以将每个 $\mathbb{T}^2$ 替代为 $\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2$，因为我们有 $\mathbb{RP}^2\#\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2$.

(3) 对于任意曲面 M, $M\#D$ 在几何上表示的是"M 上挖去一个圆盘"，即 M 上带有一个穿孔. 于是 $M\#D\#\cdots\#D$ 代表的是 M 上带有多个穿孔.

¶ 紧曲面的分类

现在我们可以证明

定理 4.4.30.（紧连通曲面分类定理）

设 M 为一个紧连通曲面. 那么

(1) 如果 M 没有边界，那么 M 同胚且仅同胚于下列曲面之一：

$$S^2, \quad \Sigma_k = \underbrace{\mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2}_{k}, \quad \widetilde{\Sigma}_l = \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2}_{l}.$$

(2) 如果 M 有边界，且 ∂M 有 m 个连通分支，那么 M 同胚且仅同胚于下列曲面之一：

$$\text{带有 } m \text{ 个小孔的} S^2, \quad \text{带有 } m \text{ 个小孔的} \Sigma_k, \quad \text{带有 } m \text{ 个小孔的} \widetilde{\Sigma}_l.$$

♡

证明 我们已经证明了任何紧曲面都同胚于上面所列出曲面中的一个. 剩下的就是证明这些曲面在拓扑上是两两不同的. 这可以通过计算基本群来实现.

(1) 我们有（参见第 3.6 节及其习题）

$$\begin{aligned}
&\pi_1(S^2) \cong \{e\}, \\
&\pi_1(\Sigma_k) \cong \langle a_1, b_1, \cdots, a_k, b_k | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1} = 1 \rangle, \\
&\pi_1(\widetilde{\Sigma}_l) \cong \langle a_1, \cdots, a_l | a_1^2 a_2^2 \cdots a_l^2 = 1 \rangle.
\end{aligned}$$

[我们可以比较基本群的表现与“最自然的那个多边形表示”的所对应的符号表示.] 我们只需要证明这些群两两不同. 为了说明 $\pi_1(\Sigma_k)$ 和 $\pi_1(\widetilde{\Sigma}_l)$ 是不同的, 我们可以计算它们的交换化 (参见第 3.6 节习题):

$$\begin{aligned}
&[\pi_1(\Sigma_k)]^{ab} \cong \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{2k}, \\
&[\pi_1(\widetilde{\Sigma}_l)]^{ab} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{l-1}.
\end{aligned}$$

因为这些空间的基本群的交换化两两不同，所以这些空间有不同的基本群，从而它们是彼此不同胚的.

(2) 将这些空间分别记为 $S^2_m, \Sigma_{k,m}, \widetilde{\Sigma}_{l,m}$. 我们还是可以用 van Kampen 定理计算它们的基本群, 得到 $(k, l, m \geq 1)$

$$\begin{aligned}
&\pi_1(S^2_m) \cong \langle c_1, \cdots, c_{m-1} \rangle, \\
&\pi_1(\Sigma_{k,m}) \cong \langle a_1, b_1, \cdots, a_k, b_k, c_1, \cdots, c_m | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_k b_k a_k^{-1} b_k^{-1} = c_1 \cdots c_m \rangle, \\
&\pi_1(\widetilde{\Sigma}_{l,m}) \cong \langle a_1, \cdots, a_l, c_1, \cdots, c_m | a_1^2 \cdots a_l^2 = c_1 \cdots c_m \rangle.
\end{aligned}$$

注意边界连通分支的个数, m, 是一个拓扑不变量.

我们想证明这些群是不同的. 通过计算它们的交换化，我们得到:

$$\begin{aligned}
&[\pi_1(\Sigma_{k,m})]^{ab} \cong \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{2k+m-1} = \mathbb{Z}^{2k+m-1}, \\
&[\pi_1(\widetilde{\Sigma}_{l,m})]^{ab} \cong \mathbb{Z}^{l+m-1}.
\end{aligned}$$

因此交换化可以被用来区分大多数情况，唯一的例外是:

$$[\pi_1(\Sigma_{k,m})]^{ab} \simeq [\pi_1(\widetilde{\Sigma}_{2k,m})]^{ab}.$$

然而，这也不算一个问题，因为我们知道 $\Sigma_{k,m}$ 是可定向的，$\widetilde{\Sigma}_{l,m}$ 是不可定向的，而可定向性是一个拓扑性质!

□

¶ 由 Euler 示性数给出的紧曲面分类定理

我们还可以考虑这些曲面的 Euler 示性数. 我们知道

$$\chi(S^2) = 2, \qquad \chi(\mathbb{T}^2) = 0, \qquad \chi(\mathbb{RP}^2) = 1, \qquad \chi(D) = 1$$

以及

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

于是，我们可以计算我们列表中的曲面的 Euler 示性数:

$$\begin{aligned} \chi(S^2) &= 2, & \chi(S^2_m) &= 2 - m, \\ \chi(\Sigma_k) &= 2 - 2k, & \chi(\Sigma_{k,m}) &= 2 - 2k - m, \\ \chi(\widetilde{\Sigma}_l) &= 2 - l, & \chi(\widetilde{\Sigma}_{l,m}) &= 2 - l - m. \end{aligned}$$

注意这给出了定理4.4.30的一个更简单的证明.

特别地，我们得到了

命题 4.4.31.（2 维版本的 Poincaré 猜想）
对于任意紧曲面 M，我们有 $\chi(M) \leqslant 2$，并且 “=” 成立当且仅当 $M \simeq S^2$. ♠

使用 Euler 示性数，我们可以将分类定理重新表述为:

定理 4.4.32.（紧曲面分类定理，第二形式）
任意紧连通曲面由以下三个数据唯一决定:

(1) 边界连通分支的个数，

(2) 是否可定向，

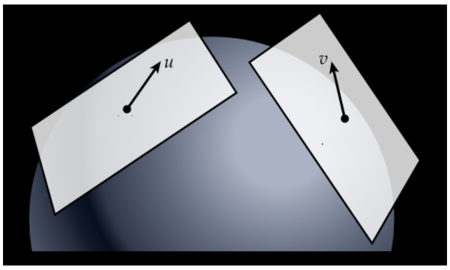
(3) 它的 Euler 示性数. ♡

特别地，对于无边的可定向紧连通曲面，Euler 示性数是其唯一的拓扑不变量.

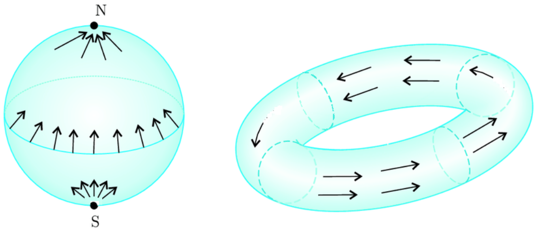
4.4.4 阅读材料：曲面的 Poincare-Hopf 定理

¶ 曲面上的向量场 Vector fields on surfaces

下面我们假设 S 是一个 “光滑地” 嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中的连通可定向紧无边曲面. 于是在每个点 $x \in S$ 处，存在经过 x 的一个平面与曲面 S 相切，它被称作 x 处的**切平面**. 每个以 x 为起点，位于切平面的向量被称作 x 处 S 的**切向量**.



现在假设 V 是 S 上的一个连续向量场，即它在每点 $x \in S$ 处指定了一个切向量 V_x，且 V_x 关于 x 是连续的. 例如，下图分别给出了球面和环面上的一个向量场：



注意，在第一个例子中，有两个不同的点，N 和 S，在这两个点上，所分配的向量为零向量，而在第二个例子没有这样的点.

定义 4.4.33.（临界点）

令 V 为曲面 S 上一个连续向量场，$x \in S$.

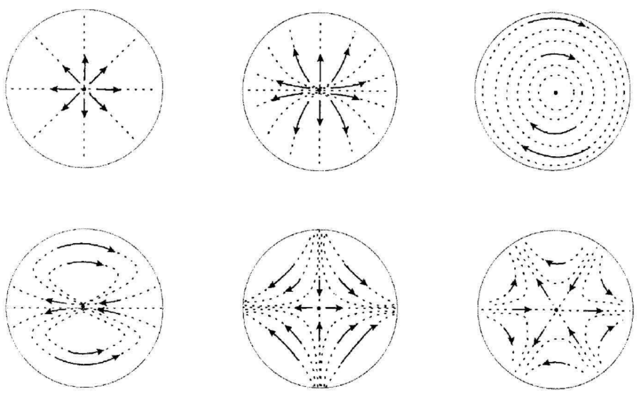
(1) 若在 x 处的切向量 $V_x = 0$，则我们称 x 是 V 的一个**临界点** (critical point).

(2) 若 x 是 V 的一个临界点，且存在 x 的一个邻域使得 V 在该邻域里没有其他临界点，则我们称 x 是 V 的一个**孤立临界点**（isolated critical point）. ♣

注意如果 S 是紧曲面，并且 V 是 S 上的一个只有孤立临界点的连续向量场，那么它只有有限个临界点.

¶ 临界点的指标

现在设 V 是曲面 S 上的一个向量场，p 为 V 的一个孤立临界点. 于是在 p 的一个小邻域中，曲面同胚于一个平面圆盘，并且 p 是向量场 V 在该邻域中唯一的临界点. 在这种情况下，我们可以将这个小邻域“摊平”成以 p 为中心的圆盘，并且将 V 视为该圆盘上的一个平面向量场，它仅在中心 p 处为零向量. 下面是一些“摊平后的向量场”的例子: (图中所画的线是相应向量场的“流线”)



对于每个孤立临界点，我们可以按照以下的方式给它指定一个整数：在驻点 p 周围取一个小圆周 S^1，使得 p 是圆内唯一的临界点. 那么向量场 V 在圆周上的每个点 x 处指定了一个非零向量 V_x. 从而我们得到一个映射

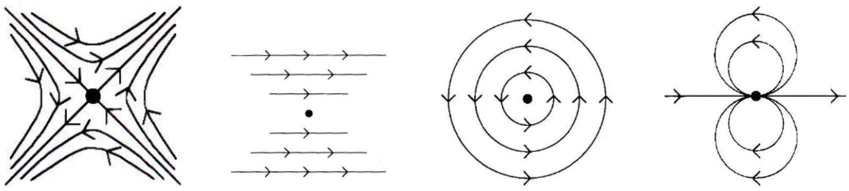
$$\gamma = V|_{S^1} : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}.$$

在习题 3.5 中，对于这样的映射 γ，我们定义了其环绕数 $W(\gamma, 0)$，即曲线 γ 围绕 0 逆时针转过的总圈数. 根据该习题，环绕数 $W(\gamma, 0)$ 等于映射 $\gamma' = \gamma/|\gamma| : S^1 \to S^1$ 的映射度，从而是一个同伦不变量. 于是 $W(\gamma, 0)$ 只依赖于 V 和 p 而跟小圆周的选取无关.

定义 4.4.34.（指标）

设 p 是曲面 S 上向量场 V 的一个孤立临界点. 我们称如上给出的环绕数 $W(\gamma, 0)$ 为 V 在 p 处的**指标**（index），并把它记为 $\mathrm{ind}_p(V)$. ♣

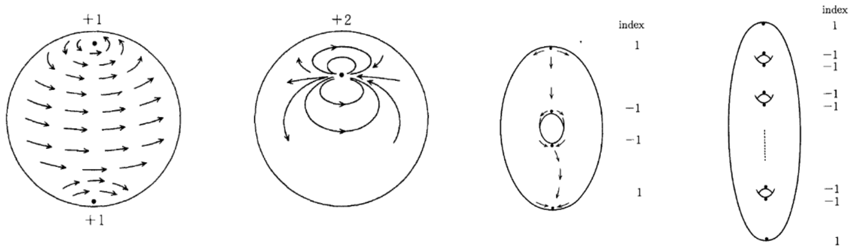
下面是一些简单向量场的指标的例子：



(a) Index -1　(b) Index 0　(c) Index 1　(d) Index 2

¶ Poincare-Hopf 定理

设 V 是曲面 S 上的一个只有孤立临界点的向量场. 我们可以计算它所有临界点的指标，例如



注意前两个例子给出了 S^2 上的两个不同向量场，一个有两个临界点，另一个只有一个临界点，但在每种情况下其临界点的指标之和都等于 2. 第三个例子给出了 $\mathbb{T}^2$ 上的一个向量场，它有四个驻点，其指标之和为 0. 而最后一个例子则给出了 Σ_g 上的一个向量场，它有 $2g+2$ 个临界点，其指标之和 $2-2g$：在所有这些例子中，向量场的**全指标**（total index）即指标之和都等于该曲面 Euler 示性数 $\chi(\Sigma_g)$.

虽然从定义上来看，向量场的指标是一个纯分析的量，但事实上，曲面上向量场的全指标跟向量场的选择无关，只依赖于曲面的拓扑性质即曲面的 Euler 特征数，从而是一个拓扑量：

定理 4.4.35.（曲面的 Poincare-Hopf 定理

令 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的一个连通可定向紧无边曲面[a]，V 为 S 上的一个只有孤立临界点的连续向量场. 则

$$\sum_p \mathrm{ind}_p V = \chi(S).$$

[a]事实上定理对高维的光滑流形（甚至光滑带边流形，此时要求边界处的向量是“朝外”的）均成立. 该定理最早是由 H. Poincare 对于曲面的情形予以证明，后来被 Hopf 推广到高维流形的情形.

证明 [证明概要.] 根据定理4.4.30, 我们不妨设 S 就是 Σ_g. 上面已经在 Σ_g 上构造了向量场 $\widetilde{V}$，使得 $\sum_p \mathrm{ind}_p \widetilde{V} = \chi(\Sigma_g)$. 以下只需证明对于 S 上的任意只有孤立临界点的向量场 V，总有 $\sum_p \mathrm{ind}_p V = \sum_p \mathrm{ind}_p \widetilde{V}$.

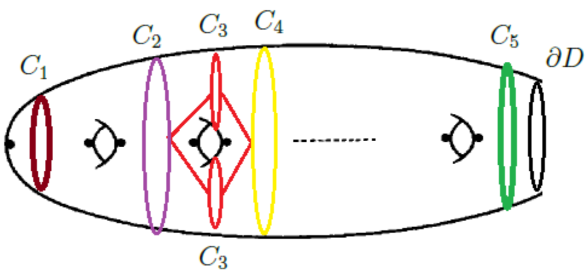
首先我们“将所有临界点移动”到一个小圆盘内：给定任意小“圆盘" $D \subset \Sigma_g$, 存在从 Σ_g 到 Σ_g 的 (微分) 同胚 ϕ，将 V 的所有驻点映射到 D 中(证明它). 利用映射 ϕ，我们可以构造一个向量场 V'，使得它的临界点都在 D 里面，并且与 V 的临界点一一对应 (对应的临界点指标也相同). 我们可以对 $\widetilde{V}$ 做相同的操作得到向量场 $\widetilde{V}'$. 为简单起见，我们让曲面 Σ_g “躺平”，并让 D 是以最右端的点为中心的小圆盘. 注意到由我们的构造，

$$\sum_p \mathrm{ind}_p V' = \sum_p \mathrm{ind}_p V \quad 且 \quad \sum_p \mathrm{ind}_p \widetilde{V}' = \sum_p \mathrm{ind}_p \widetilde{V}.$$

现在我们在 Σ_g 上有两个向量场，即 V' 和 $\widetilde{V}'$, 使得 V' 和 $\widetilde{V}'$ 在 $\Sigma_g \setminus D$ 上都非零. 于是对于任意点 $x \in \Sigma_g \setminus D$, 我们有在同一个平面内的两个非零向量，$V'(x)$ 和 $\widetilde{V}'(x)$. 令 $\theta(x)$ 为从 $V'(x)$ 到 $\widetilde{V}'(x)$ 的夹角. 于是我们得到了一个连续映射

$$\theta : \Sigma_g \setminus D \to S^1.$$

现在我们考虑 $\Sigma_g \setminus D$ 上 “从左到右” 的一族圆圈. 下图说明了 θ 限制到这些圆周上的映射度是相同的! (在某些地方我们的圆圈事实上是两个圆圈，我们要计算的映射度是 θ 分别限制到这两个圆上的 θ 的映射度之和.) (写下细节.)



注意当 C_1 非常靠近 “最左边的点” 时，$\theta|_{C_1}$ 不是满射. 因此由习题 3.5, $\deg(\theta|_{C_1}) = 0$. 于是根据以上论证, $\deg(\theta|_{\partial D}) = 0$，从而由习题 3.5 可知

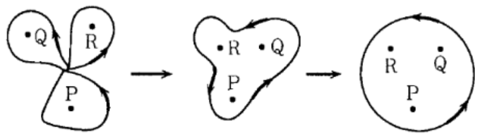
$$\theta|_{\partial D} : \partial D = S^1 \to S^1$$

同伦于常值映射. 如果我们记 $\widehat{V'} = V'/|V'|$, 那么我们得到 $\widehat{V'}|_{\partial D} \sim \widehat{\widetilde{V}'}|_{\partial D}$，从而

$$\deg(\widehat{V'}|_{\partial D}) = \deg(\widehat{\widetilde{V}'}|_{\partial D}).$$

最后，由映射度的同伦不变性和下图，我们得到：如果在圆盘 D 中存在多个临界点，

那么 D 中临界点的全指标等于在边界 ∂D 上的向量场的 "环绕数" (更确切地说，它等于 $\partial D = S^1$ 上的映射 "将 S^1 的一点映为该点处单位化的向量 $\widehat{V} = V/|V|$" 的映射度).



由此结论成立. $\square$

因为 $\chi(S^2) = 2 \neq 0$, 我们得到了著名的

推论 4.4.36. (毛球定理)

球面 S^2 上的任何连续向量场必有零点. ♡