

当代数学物理专题

Kai S Lam 原著

梁旭民 译

2020

本文档由梁旭民翻译制作, 原著书名为: Topics in Contemporary Mathematical Physics, 属 World Scientific 公司出版物, ISBN 978-981-4667-82-1。

仅限教学科研使用, 使用与传播应严格遵守相关法律规定。

《中华人民共和国著作权法》第四节第二十二条:

在下列情况下使用作品, 可以不经著作权人许可, 不向其支付报酬, 但应当指明作者姓名、作品名称, 并且不得侵犯著作权人依照本法享有的其他权利:

...

(六) 为学校课堂教学或者科学研究, 翻译或者少量复制已经发表的作品, 供教学或者科研人员使用, 但不得出版发行;

...

Copyright © 2015 by World Scientific Co. Pte. Ltd.

Copyright © 2020 Xumin Liang

[HTTPS://CHAOLI.CLUB/INDEX.PHP/MEMBER/10992](https://chaoli.club/index.php/member/10992)\$

NOT PUBLISHED.

Version 20190504, July 27, 2024

第一版前言

在过去的二十年中，物理和数学经历了激烈的共生时期，并有望在二十一世纪建立更加令人激动和生产力的关系。本文是物理学家坚定这种信念的结果（我相信这是越来越多物理学家的共识），这对准备学习物理的学生，特别是那些有理论倾向的物理学生，并具有必要的背景来欣赏和运用这一发展是有益的，应尽早他们的物理教育中切实可行地开始。在本书的前三分之二左右的各个部分中，主要处理代数问题，例如线性变换理论，群论和 Lie 代数理论，已被用作高年级程度本科数学物理课程的教学材料。我曾在 Pomona 的 California State Polytechnic University 讲过几次的三个小学期 (quarter) 课程。最后三分之一，主要是关于微分几何，可能更适合低年级研究生；但是，有野心的本科生绝对不应该被阻止。有兴趣了解如何将一些基本数学思想和技术应用于广泛的物理领域的数学专业学生也可能会觉得这本书很有用。由于涵盖面广，该书可以作为参考书，希望对学生和研究人员都有帮助。

材料的选择是由与高年级本科生和低年级研究生交流后所期望而决定的，这些主题是：1) 现代数学对物理学的应用中起着重要的作用，以及 2) 同等水平的常规课本中通常不被重视。因此，本文的主要内容集中在群表示理论，Lie 群和 Lie 代数，外代数以及最后的微分几何上，但以更传统（但同样重要）的主题为代价，例如微分方程，复函数理论，特殊函数和泛函分析。这种选择必然受到作者知识或知识的缺乏的限制，而且毫无疑问地受到篇幅的限制。尽管如此，还是希望读者能够在两者之间找到一个或多或少连贯的主体信息，它们相当完整，而且最重要的是，它们具有一定程度的主题统一性。许多非常棒的文本已经存在了，但无论是群论还是微分几何，都很少同时出现。在本书中，我们将当代数学物理学的这两个至关重要的部分放在一起，不仅是为了方便起见，还展示了它们之间的某些深层联系。

本书的组织可以描述为按功能（但不是逻辑上）模块化——每个章节都作为一个独立的模块，其内容可以从标题中清楚地辨识出来，并且在主题上（但不是逻辑上）与其它主题独立。但是，如果按照书中介绍的顺序从头到尾阅读本书（尽管这不是必须的），那么从松散主题的主张来讲，可以讲贯穿所有 Chapter 的内容看成是不间断的线索。这条线索将线性空间和线性算符，群表示和代数，建立在可微流形上代数结构，向量丛和主丛，还有最后的是从分析数据（曲率）构造的代数对象（示性类），这些数据统一了纤维丛的局部和全局性质。在许多点都走了弯路，为了仔细地显示这些概念在物理学中的相关性。

原则上，这本书是自成体系的，唯一的先决条件是二年级水平的微积分，微分方程，(3 维) 向量分析和一些线性代数。从整体上看，这些可能是足够作为四个小学期 (quarter) 或者三个大学期 (semester) 的材料。但是，自学的学生和讲师可以根据他们的个人喜好和需求，选择书中不同的一部分作为有意义的单元，尽管应该警告他们，在很大程度上，后面的 Chapter 在逻辑上取决于前面的 Chapter。为了最大程度地利用这本

书，我们引入了大量的交叉引用（引用前面和后面），此特征以及相当详细的索引将有望消除大多数歧义。每当书写计算时，它们往往会很详细地说明每一步的理由，同时遗漏的步骤相对较少。这种做法无疑增加了本书的厚度，但希望会大大减少读者的困惑感。许多练习都插入在全文中重要位置。原则上，一旦理解了书中的内容，它们就应该完全可以做出来。它们主要是用来放大，具体化和加强学到的东西，而从来不是模仿。

我决定采用某种数学表达方式，这与物理学文献中的惯常表达不同。总的来说，是频繁的定义——定理——证明层序，在数学和物理之间有一定程度的严格性。这样做主要有三个原因：首先是数学风格有一定的紧凑性，精确性，通用性和表达性，这对于这种厚度大小的书来说是必不可少的。第二个点是适度使用这种风格时，通常会极大地促进对深刻而一般性的概念的理解，尤其是那些在物理学中发现了非常多样化的应用的概念。大多数物理学家通常都是通过特定的，多重的和上下文的应用来学习所需的数学。尽管这种方法很明显具有使抽象概念具体化的优势，使得一开始不那么令人生畏，但单个数学概念可能会出现许多不同物理表象，往往会掩盖背后的本质统一性。我们只需要提到两个相关的例子，一个基本的（假设读者熟悉），另一个相对较高级的（但在本书中详尽地讨论过）：导数和协变导数（连接在一个纤维丛上）。最后一点，也许是最具争议的原因，是我相信连物理学家也应该学会以合适的流利度“讲”数学语言。这种信念反过来源于这样的观察，即物理学家和数学家之间的“激烈离婚 (acrimonious divorce)”（用 Freeman Dyson 的话）似乎已接近尾声，并且这两个群体将发现，相互交流越来越有意义，而且不仅仅是在交易应用层面上，更深层次的是它们可以相互学习彼此不同但互补的思维方式。但是，在这本书中，从来没有为了严谨而追求严谨。仅当定理证明有助于澄清抽象概念或说明特殊的计算技术时，才会提供定理证明。另一方面，当省略它们时（通常不道歉），可以认为它们要么太长，要么技术上太困难，或者只是太分心。

许多完整的章节专门讨论物理应用。这些章节往往与必要的数学知识相近，并且读者可能会注意到从数学到物理的样式突然转变，反之亦然。再次仔细考虑，以使读者为她/他从一门学科的标准文献转到另一门学科可能经历的“文化冲击”做好准备。在某些情况下，甚至在完全解释必要的数学之前就已经介绍了物理应用。这可能会破坏介绍的逻辑流程，但我怀疑物理学家读者的焦虑感（和血压！）可能会大大降低，因为相当深奥的数学在深邃的物理学领域得到应用而可以一直很放心。的确，如果我在本卷中成功说服了一些物理专业的学生（甚至是专业的物理学家）其中的数学风格和内容不仅仅只是花哨的服装和窗饰，它们不是混淆，而是澄清，统一甚至为了给许多看似不连贯的物理学思想提供深度和普适性，我的目标是本来可以做得更好。不幸的是，由于缺乏培训和知识，我无法在这种引人入胜的双向交通中将流动的另一个方向的故事关联起来：物理推理和技术（例如，量子场论）最近为解决纯数学中长期存在的问题提供了重要的见解和工具。

如果没有最新的独特合作经验，这本书的大部分内容将无法编写，这是作者的一大财富。在大约两年的时间里，陈省身 (S. S. Chern) 教授慷慨耐心地指导我翻译和扩展了他的介绍性文章“微分几何学课程 (Lectures on Differential Geometry)”（陈省身, 陈维桓和 Lam, 1999 年）。如此宝贵的学习经验不仅深深地增强了我的技术知识，而且也许更重要的是，我对数学与物理学之间神秘的，富有成果的但有时是曲折的关系的欣赏也为我提供了一定的帮助，这也为相对很少接受正规培训的物理学家在数学上提供了一定程度的信心。这本书的最后三分之一集中在微分几何上，强烈地铭刻了我从陈教授那里学到的东西，尤其是上述“课程 (Lecture)”中的材料。因此，我要对陈省身表示由衷的感谢。在代数方面，作者从 S. Okubo 的关于群论的课程中受益匪浅，他在二十年前就曾在 University of Rochester 担任研究助理，并参加了课程。这些课程为新手系统地提炼了将群论应用到物理学的基本知识，尽管有关该主题的文章激增，但仍然构成了最有价值的资料来源 (S. Okubo, 1980)。在看起来一个无休止的时期，这本书逐渐成型，Cal Poly Pomona 的物理系和数学系的众多同事提供了必不可少的支持，鼓励和启发。我对所有这些善良的人表示由衷的感谢，尤其要感谢物理系的 John Fang, Soumya Chakravarti 和 Antonio Auriliai, 以及数学系的 Bernard Banks, Martin Nakashima 和 Xieqing Xie。我的许多以前的学生作为听众，他们对我的讲义的确定形式，提供了坦率和建设性的反馈，这促使我编写出有用而又友好的书。我还要向他们表示感谢。如果没有持续的重点时间，本书的所有书写计划都将毫无意义。为此，我欠 California State University 的“Faculty Sabbatical Program”以及“Research, Scholarship and Creative Activity Summer Fellowship Program”。

我非常感激 World Scientific 的 Sen Hu 博士最初对我的项目感兴趣，做出了一切必要的安排来启动它，项目一开始就慷慨地满足了我的许多要求和计划变更，所有都以最方便的方式。到最后阶段，World Scientific 的 Daniel Cartin 和 Lu Ji-tan Lu 博士的热情协助，指导该项目完成的也十分感谢。我的前学生和好朋友 Andres Carde-nas 熟练地准备了所有 Figure，并耐心地充当我的计算机专家，帮助笨拙的我将手稿录成 L^AT_EX。没有他的帮助，该手稿可能仍会在一些接近完成的较暗地带徘徊。对于他，我欠他一篇感谢的特殊 note。最后

不能不提：我非常感谢我的妻子 Bonnie Buratti 博士以及我们的三个男孩 Nathan, Reuben 和 Aaron，因为他们一直陪伴着我，作为美好和支持的家庭的一部分。

Kai S. Lam,
California State Polytechnic University, Pomona

目录

	第一版前言	i
1	向量与线性变换	1
2	张量	9
3	对称与守恒：角动量	17
4	角动量作为旋转的生成元：Lie 群和 Lie 代数	23
5	代数结构	35
6	基本群论概念	39
7	基本 Lie 代数概念	49
8	内积、度规和对偶空间	55
9	$SO(4)$ 和氢原子	65
10	伴随与么正变换	71
11	Lorentz 群和 $SL(2, \mathbb{C})$	77

12	量子理论中的 Dirac 括号记号	95
13	量子力学中的简谐振子	101
14	Fourier 级数和 Fourier 变换, Dirac Delta 函数, Green 函数	107
15	连续光谱和不可归一化状态	115
16	反对称张量和行列式	121
17	本征值问题	133
18	群表示理论	149
19	二面体群 D_6 和苯 (Benzene) 分子	165
20	对称群的表示和一般线性群, Young 图	175
21	$U(n)$, $SL(n)$, $SU(n)$ 和 $O(3)$ 的不可约表示	191
22	$SU(2)$ 和 $SO(3)$ 的不可约表示	203
23	球谐函数	217
24	半单纯 Lie 代数结构	227
25	半单纯 Lie 代数表示	245
26	$SU(3)$ 和强相互作用	261
27	Clifford 代数	271
28	外积	277
29	Hodge-Star 算符	287
30	微分形式与外微分	293
31	$\mathbb{R}^3$ 中的移动标架和曲线坐标	307
32	微分形式的积分和 Stokes 定理	317
33	同调和 De Rham 上同调	331

34	Lie 群的几何	339
35	向量丛的联络和曲率	355
36	Yang-Mills 方程	369
37	主丛上的联络	375
38	磁单极子和分子动力学	401
39	Riemann 几何	415
40	复流形	439
41	示性类	451
42	陈-Simons 形式	475
43	Atiyah-Singer 指标定理	493
44	辛结构和 Hamilton 力学	515
45	通过路径积分量子化	523

1. 向量与线性变换

向量空间上的线性变换理论构成了数学物理大部分领域的基石。我们将在本书中反复使用该理论的基本概念和事实。通过提供一个具体而熟悉的背景来引入其中一些概念，我们通过使用一个基本的例子开始我们的成长之路。Chapter 5 将进行一个更抽象和正式的讨论。在本章中，我们还将建立一个向量（张量）的符号体系，并且将尽可能地在整个文本中遵守该体系。

考虑 $\mathbb{R}^2$ 平面中一个向量 x ，并写成它的分量 x^1 和 x^2 的表达式：

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 = x^i e_i . \quad (1.1)$$

(1.1) 式中向量 e_1 和 e_2 被称为一组**线性向量空间 $\mathbb{R}^2$ 的基 (basis of linear vector space $\mathbb{R}^2$)**，并且向量 x 的分量由基向量的选择而决定。在 Figure 1.1 中，我们选择 (e_1, e_2) 为一组**标准正交基 (orthonormal basis)**。这种表述简单表示 e_1 和 e_2 各自为单位长度并且相互正交（垂直）。我们将在后面看到，在一般的向量空间中，只有在向量空间中定义了标量积之后长度和正交性的概念才会有意义（Chapter 8）。

注意在 (1.1) 中我们对于分量使用上指标，对于基向量使用下指标，而重复指标（一个上指标和一个下指标）被理解为求和（从 1 到正在考虑的向量空间**维度 (dimension)**，在本例中为 2）。这被称为 **Einstein 求和约定 (Einstein summation convention)**。标准正交基 (e_1, e_2) 在物理上称为一个**参考标架 (reference frame)**。另请注意，我们没有使用箭头（或粗体字）来表示向量，以避免过度表示。

现在考虑同一个向量 x 在相对于原参考标架旋转的标准正交系 (e'_1, e'_2) 下具有分量 x'^i ：

$$x = x'^i e'_i . \quad (1.2)$$

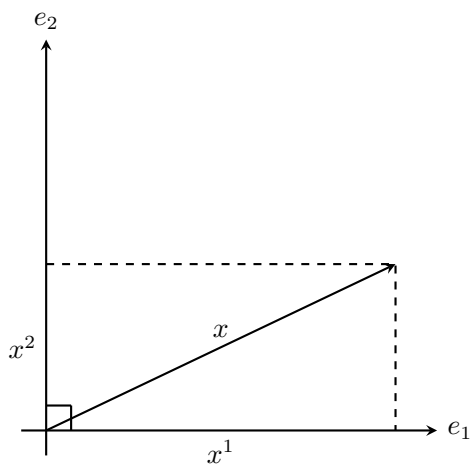


Figure 1.1

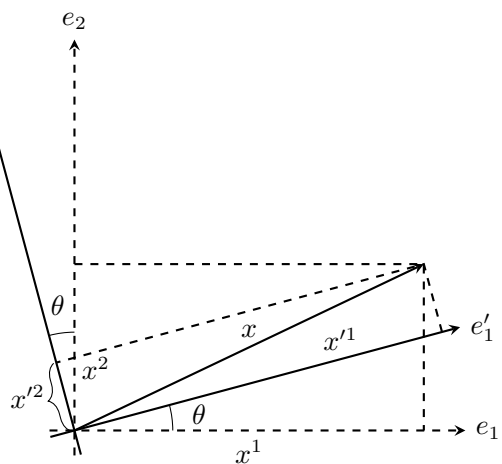


Figure 1.2

可以简单地说明

$$(x')^1 = (\cos \theta)x^1 + (\sin \theta)x^2, \quad (x')^2 = (-\sin \theta)x^1 + (\cos \theta)x^2. \quad (1.3)$$

练习 1.1 通过考虑 Figure 1.2 的几何来验证 (1.3)。

方程 (1.3) 也可以通过直接处理基向量来得到，而不是通过处理向量分量。很明显有：

$$e_1 = (\cos \theta)e'_1 - (\sin \theta)e'_2, \quad e_2 = (\sin \theta)e'_1 + (\cos \theta)e'_2. \quad (1.4)$$

因此将 (1.1) 和 (1.2) 合起来得到

$$x = x^i e_i = x'^i e'_i$$

意味着

$$x^1 \cos \theta e'_1 - x^1 \sin \theta e'_2 + x^2 \sin \theta e'_1 + x^2 \cos \theta e'_2 = x'^1 e'_1 + x'^2 e'_2. \quad (1.5)$$

比较 (1.5) 式两边 e'_1 和 e'_2 的系数立刻得到 (1.3) 式。

让我们用矩阵表示写出 (1.3) 和 (1.4)。方程 (1.3) 可以被写成单矩阵方程

$$(x'^1, x'^2) = (x^1, x^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

同时方程 (1.4) 可以被写成

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

(1.6) 和 (1.7) 中的 2×2 矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} a_i^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

其中, 下指标是行指标, 上指标是列指标。(这种表示矩阵元素的约定将用于全书)。然后使用 Einstein 求和约定, 我们可以把方程 (1.6) 和 (1.7) 紧凑地写成

$$x'^i = a_j^i x^j, \quad (1.9)$$

$$e_i = a_i^j e'_j. \quad (1.10)$$

再次注意重复指标 (一个上指标一个下指标) 求和。

方程 (1.9) 和 (1.10) 是等价的, 从某种意义上来说, 任意一个都是另一个的结果。为了阐明指标记号的有用性, 我们再次用方程 (1.9) 和 (1.10) 导出如下:

$$x = x^j e_j = x^j a_j^i e'_i = x'^i e'_i. \quad (1.11)$$

最后等号意味着 (1.9)。

我们已经运用物理学家称为被动观点 (passive viewpoint) 来呈现上述所有内容, 其中当参考标架被改变时, 相同向量有不同的分量。显然 (1.9) 也能描述一个向量被映射到一个不同向量的情况, 即在同一参考标架或基向量集合下的描述新旧向量。在物理应用中, 被动观点 (passive viewpoint) 更自然, 虽然我们将有机会同时经常使用它们 (主动观点 (active viewpoint) 和被动观点 (passive viewpoint))。

在主动观点下, (1.9) 描述了一个向量 x 到另一个向量 x' 的所谓**线性变换 (linear transformation)**。我们可以将这种线性变换表述成

$$A: V \rightarrow V, \quad x' = A(x), \quad (1.12)$$

其中, x 和 x' 是在相同向量空间 V 中的向量 (写作 $x \in V, x' \in V$), 同时 A 被表示成矩阵 (a_i^j) 。比较明显地, 线性变换 A 满足下面的性质:

$$A(ax + by) = aA(x) + bA(y) \quad (1.13)$$

其中, a, b 是标量且 $x, y \in V$ 。

练习 1.2 由 (1.8) 给出的矩阵 (a_i^j) 验证 (1.13)。

事实上, (1.13) 式定义了**线性 (linearity)**的概念, 并且我们可以更一般地引入两个不同向量空间之间的一个**线性映射 (linear map)**的概念。

定义 1.1 在相同的域 $\mathbb{F}$ (标量) 上给定两个向量空间 V 和 W , 如果一个映射 $f: V \rightarrow W$ 是保持向量加法和标量乘法的一个**同态 (homomorphism)**, 则被称为一个**线性映射 (linear map)**, 即: 如果对于任意的 $x, y \in V$ 和 $a, b \in \mathbb{F}$, 映射 f 满足

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y) \quad (1.14)$$

如何获得一个抽象线性变换 $A: V \rightarrow V$ 的一个具体**矩阵表示 (matrix representation)**呢? 答案是一个特定的矩阵表示来自于 V 的基 e_i 的一个特定选择。(现在我们将更一般

地考虑一个 n 维向量空间 V 。对于任意 $x \in V$ 由 $x = x^i e_i$ 给出, 线性条件 (1.13) 意味着

$$A(x) = x^i A(e_i) . \quad (1.15)$$

因此, A 对于任意 $x \in V$ 的作用都可以由 $A(e_i)$, $i = 1, \dots, n$ 完全具体确定。由于 $A(e_i)$ 是 V 中的一个向量, 它可以表述成 e_i 的**线性组合 (linear combination)**, 即

$$A(e_i) = a_i^j e_j , \quad (1.16)$$

其中, a_i^j 是数域 $\mathbb{F}$ 上的标量, 类似于 (1.8), 量 a_i^j , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$ 能被写成一个 $n \times n$ 矩阵

$$(a_i^j) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix} . \quad (1.17)$$

现在假设, 在 A 的作用下, $x \in V$ 变换到 $x' \in V$ 。则有

$$x' = A(x) = A(x^i e_i) = x^i A(e_i) = x^i a_i^j e_j = x^j a_j^i e_i , \quad (1.18)$$

其中在最后的等号中我们已经进行了指标交换 ($i \leftrightarrow j$), 因为 i 和 j 都是哑指标 (dummy indices) 并且求和。方程 (1.18) 则意味着

$$x'^i = a_j^i x^j , \quad (1.19)$$

这与 (1.9) 形式相同。因此我们显式展示了一个线性变换的矩阵表示是如何取决于一组基的集合的选择。

我们现在来注意**旋转矩阵 (rotation matrix)**的一些重要性质

$$a = (a_i^j) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} .$$

其中一个可以非常简单检验的便是

$$a^{-1} = a^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} , \quad (1.20)$$

其中 a^{-1} 表示 a 的**逆 (inverse)**, 同时 a^T 表示 a 的**转置 (transpose)**。回忆一下, 如果一个矩阵 a 是**可逆的 (invertible)**, 则存在一个矩阵 a^{-1} , 称为 a 的逆矩阵, 使得

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1 . \quad (1.21)$$

在上述方程中, 1 表示**单位矩阵 (identity matrix)**。在 (1.8) 中的矩阵 a 也满足

$$\det(a) = 1 . \quad (1.22)$$

事实上, 性质 (1.20) 和性质 (1.22) 对于所有的旋转矩阵都成立, 不仅仅是在 $\mathbb{R}^2$ 中表示旋转的那些, 还有在 $\mathbb{R}^n$ (n 维 Euclid 空间, $n \geq 3$) 中表示旋转的那些。我们可以从几何上如下理解这点: 旋转一个向量当然不改变它的长度。在 **Euclid 度规 (Euclidean metric)** (见 Chapter 8) 中一个向量 $x = x^i e_i$ 的长度模方由 $\sum_i x^i x^i$ 给出。(我们将求和符号显式写出因为这里没用到 Einstein 求和约定)。假设在旋转 A 的操作下, x 被旋转到 $x' = A(x)$, 其中

$$x'^i = a_j^i x^j . \quad (1.23)$$

因此, 在旋转操作下向量长度**不变性 (invariance)**表达为

$$\sum_j x^j x^j = \sum_i x'^i x'^i = \sum_i a_j^i x^j a_k^i x^k = \sum_k a_j^i (a^T)_i^k x^j x^k = \sum_k (aa^T)_j^k x^j x^k . \quad (1.24)$$

对比第一种表述和最后一种表述的项, 我们可以看到

$$(aa^T)_j^k = \delta_j^k , \quad (1.25)$$

其中 δ_j^k 是 **Kronecker delta**:

$$\delta_j^k = \begin{cases} 1 & , \quad j = k , \\ 0 & , \quad j \neq k . \end{cases} \quad (1.26)$$

R $a = (a_i^j)$ 表示元素为 a_i^j ($i =$ 行指标和 $j =$ 列指标) 的一个矩阵。同时 A 代表由 a 表示的线性变换。

方程 (1.25) 等价于矩阵方程

$$aa^T = 1 , \quad (1.27)$$

或者

$$a^T = a^{-1} . \quad (1.28)$$

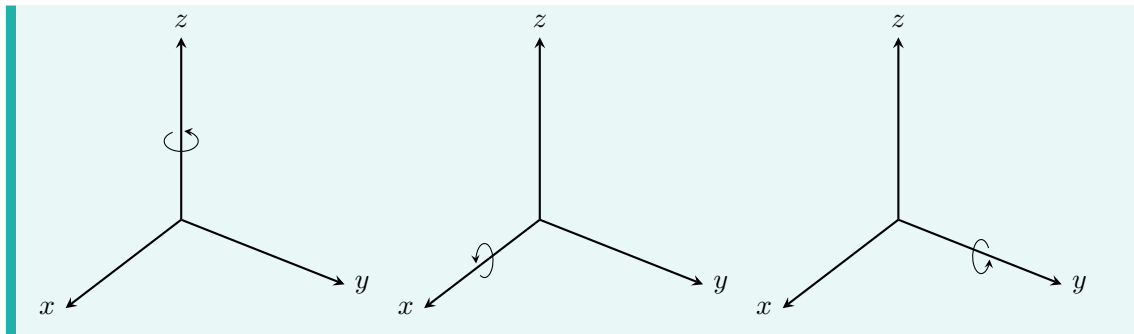
因此我们有

$$a^T a = aa^T = 1 . \quad (1.29)$$

满足 (1.29) 式被称为**正交矩阵 (orthogonal matrices)**。所有满足 (1.29) 的 $n \times n$ 矩阵构成一个**群 (group)**, 它在物理上有重要意义, 称为 n 维**正交群 (orthogonal group)**, 记为 $O(n)$ 。群的正式定义将会在 Chapter 4 给出 (定义 4.1)。

练习 1.3 显式写出在 3 维 Euclid 空间中旋转如下的 3×3 正交矩阵表示:

1. 绕 z 轴旋转 45° ,
2. 绕 x 轴旋转 45° ,
3. 绕 y 轴旋转 45° 。



练习 1.4 证明二维空间旋转群 $SO(2)$ 是一个**交换群 (commutative group)**, 即就是说: $SO(2)$ 中的任意两个 2×2 矩阵相互可交换。

交换群也被称作 **Abel 群 (Abelian groups)**。

练习 1.5 通过一个显式的例子说明 $O(3)$ 不是一个 Abel 群。

运用事实 (我们将在后面的 Chapter 16 中证明), 如果 a 和 b 是相同大小的方阵

$$\det(ab) = \det(a) \det(b), \quad (1.30)$$

并且有

$$\det(a^T) = \det(a), \quad (1.31)$$

可以从 (1.29) 得到。如果 a 是一个正交矩阵, 则有

$$\det(a) = \pm 1. \quad (1.32)$$

我们上面已经说明了: 如果 a 是旋转矩阵, 则 a 是正交的。但是旋转不会改变一个空间的**定向 (orientation)** (我们将在 Chapter 29 更清晰地解释这一概念), 并且因此旋转矩阵必须满足

$$\det(a) = +1. \quad (1.33)$$

[行列式和定向的关系将会在后面 Chapter 29 中具体对待]。因此, 我们看到正交矩阵构成一个比旋转矩阵群更大的群。满足 (1.29) 和 (1.33) 的 $n \times n$ 矩阵构成的群是 $O(n)$ 群的一个非常重要的**子群 (subgroup)**, 称为 n 维**特殊正交群 (special orthogonal group)**, 记为 $SO(n)$ 。那么, $O(n)$ 群中行列式为 -1 的矩阵对于 n 维空间中向量的影响是什么? 答案要么是**纯反转 (pure inversions)**, 其中一个向量的某些分量或者所有分量变号, 或者纯反转和旋转的产物。

总之, 正交矩阵是满足 (1.29) 式的矩阵。如果它的行列式是 $+1$, 那么它表示一个旋转; 如果它的行列式为 -1 , 那么它表示纯反转, 或纯反转和旋转的组合。

练习 1.6 构造 $O(3)$ 群中的正交矩阵, 其行列式为 -1 并描述它的操作。

需要重点注意的是, 上面介绍的正交性概念不仅适用于表示线性变换矩阵, 而且适用于线性变换本身。对于线性概念也一样成立。因此我们可以谈及正交线性变换和可逆线性变换。

可能的最自然地思考方式是将向量 $x = x^i e_i$ 想成空间中的**位置向量 (position vector)**,

使得向量的坐标 (coordinates)(分量) 变换如同 (1.9) 中的参考 (坐标) 标架的改变或者等价的基底改变。但是还有许多其他类型的向量 (除了位置向量) 在参考标架变换下也按照这种方式变换。我们可以想想一些物理量, 例如, 线性动量 $\mathbf{p}$, 力 $\mathbf{F}$ 等。因此, 我们用物理方式 (数学家用不同的方式, 见定义 5.5) 来一般地定义向量。实际上, 向量是一个在参考标架改变下 (被动观点) 按确定方式分量变换的数学对象。进一步来说:

定义 1.2 一个 n 维线性向量空间 V 的一个元素 (表述依赖基向量 e_i , $i = 1, \dots, n$ 的选择)

$$v = v^i e_i \quad (1.34)$$

被称为**逆变向量 (contravariant vector)**, 如果它的分量 v^i 变换是根据

$$v'^i = a^i_j v^j \quad (1.35)$$

在基向量变换下

$$e_i = a^j_i e'_j . \quad (1.36)$$

“逆变”一词用于强调向量的分量和基向量变换不同的事实。[在分量变换方程中, 它的变换矩阵的行指标 (a^j_i) 求和, 而在基向量变换方程中它是列指标求和。]

上述定义是一个“物理”的定义其中目的在于体会相较于数学严格性的物理直观。它建立了“向量生活在一个基础坐标空间 (underlying coordinate space)”的图像, 比如一个由位置 $\mathbf{r}$ 决定的力场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 。这里最后一个对象是一个**向量场 (vector field)**的例子, 其中在空间中的每个点分布着向量。描述这种情况的一般数学设定被称为一个**向量丛 (vector bundle)**, 其中向量空间连接着基础**流形 (manifold)**(空间) 中的每个点。一个向量场则被当做一个**向量丛的截面 (section of a vector bundle)**。在一般情况下, 基础流形可以不具有 (向量空间的) **线性结构 (linear structure)**, 如在二维球面上的切向量场的情况。对这些专题的详细考虑将需要微分几何, 我们将从 Chapter 30 开始在后面介绍。

对于可逆的线性变换, (1.35) 式和 (1.36) 式表明

$$e'_i = (a^{-1})^j_i e_j , \quad (1.37)$$

并且

$$v^i = (a^{-1})^i_j v'^j , \quad (1.38)$$

其中, a^{-1} 是矩阵 a 的逆。

我们将逆变向量变换性质总结在 Table 1.1 中

Table 1.1

$v = v^i e_i = v'^i e'_i$	
$e_i = a^j_i e'_j$	$e'_i = (a^{-1})^j_i e_j$
$v'^i = a^i_j v^j$	$v^i = (a^{-1})^i_j v'^j$

让我们现在来观察在基向量变换 (1.36) 下:

$$e_i = s_i^j e'_j ,$$

一个线性变换 A 的矩阵表示的变换性质。所需的矩阵 a' 由 [(1.16)] 给出

$$A(e'_i) = a'^j_i e'_j . \quad (1.39)$$

运用 (1.37) 式, 我们得到

$$A(e'_i) = A((s^{-1})^l_i e_l) = (s^{-1})^l_i a_l^k e_k = (s^{-1})^l_i a_l^k s_k^j e'_j , \quad (1.40)$$

其中在第二个等号位置我们运用了 A 的线性变换性质, 在第三个等号位置是方程 (1.16), 在第四个等号位置是方程 (1.36)。对照 (1.39) 给出所想要的结果

$$\boxed{a'^j_i = (s^{-1})^l_i a_l^k s_k^j} . \quad (1.41)$$

在矩阵符号中 (1.41) 式可以被写成

$$\boxed{a' = s^{-1} a s} . \quad (1.42)$$

由 (1.42) 给出的变换 $a \rightarrow a'$ 被称为**相似变换 (similarity transformation)**。这些变换在物理学中非常重要。由 (1.42) 中的一个可逆矩阵 s 相关的两个矩阵被称为是**相似的 (similar)**。

2. 张量

根据 (1.41) 式, 矩阵 $(a)_i^j$ 的上指标变换和逆变向量 v^i (参考 Table 1.1) 的上指标变换相类似, 同时矩阵 $(a)_i^j$ 的下指标变换和基向量 e_i (同样参考 Table 1.1) 的下指标变换相类似, 一般地, 一个多指标对象

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$$

(具有 r 个上指标和 s 个下指标) 其在基向量的一个改变

$$e_i = s_i^j e'_j$$

下 [(1.36)] 根据下面的规则变换

$$(T')_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = s_{k_1}^{i_1} \dots s_{k_r}^{i_r} (s^{-1})_{j_1}^{l_1} \dots (s^{-1})_{j_s}^{l_s} T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r} \quad (2.1)$$

被称为一个 (r, s) -型张量 ((r, s) -type tensor)。其中, r 被称为张量的**逆变序数 (contravariant order)**, s 被称为张量的**协变序数 (covariant order)**。因此像 (1.41) 变换的一个矩阵 $(a)_i^j$ 是一个 $(1, 1)$ -型张量。满足 $r \neq 0$ 且 $s \neq 0$ 的 (r, s) -型张量称为**混合型张量 (tensors of mixed type)**。一个 $(0, 0)$ -型张量是一个标量。“协变”意味着变换方式和基向量变换方式

$$(e')_i = (s^{-1})_i^j e_j,$$

相同。而“逆变”意味着指标根据基向量变换的逆变换而变换。

作为一个例子, 让我们考虑经典力学中的刚体的**转动惯量 (moment of inertia)** 张量 I_i^j , 它满足

$$L^i = I_j^i \omega^j, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2.2)$$

其中, L^i, ω^i 分别是角动量分量和角速度分量。

对于一个给定的标架 (e_1, e_2, e_3) , 惯性张量的分量由下式给出

$$I_j^i = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \{ r^2 \delta_j^i - \delta_{jk} x^k x^i \} , \quad (2.3)$$

其中, $\mathbf{r}$ 是刚体中一个点的位置向量 (见 Figure 2.1)。

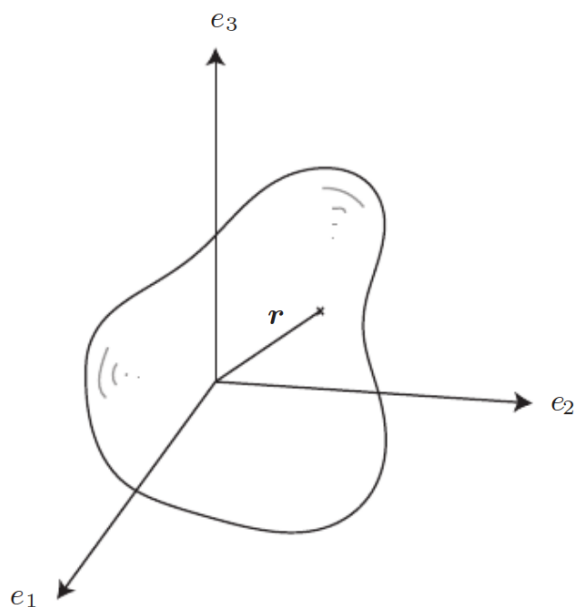


Figure 2.1

$$\mathbf{r} = x^i e_i , \quad (2.4)$$

$\rho(\mathbf{r})$ 是质量密度 (取决于位置), d^3r 是体积元

$$d^3r = dx^1 dx^2 dx^3 = dx dy dz , \quad (2.5)$$

积分区域为刚体所占据的体积。很明显地有 I_i^j 是一个**对称张量 (symmetric tensor)**, 即: $I_i^j = I_j^i$ 。

练习 2.1 根据 (2.1) 式, 说明 I_i^j 变换和一个 (1,1)-型张量变换方式一样。

我们将在后面 (Chapter 17) 说明一个实对称矩阵总是可对角化的, 即: 存在正交变换 s , 使得 $I' = s^{-1} I s$ 是一个对角矩阵。换句话说, 人们总是可以选择一组标准正交轴, 使得惯性张量是对角化的。这些轴被称为刚体的**主轴 (principal axes)**, 相应的对角线元素被称为**主转动惯量 (principal moments of inertia)**。

练习 2.2 验证惯性张量可以显式用矩阵形式表达如下：

$$I_i^j = \int dx dy dz \rho(x, y, z) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2 + z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

其中, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ 为 Cartesian 空间坐标。

练习 2.3 从静电学中我们知道两个偶极矩分别为 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 的相互作用偶极子的静电势由下式给出：

$$U = \frac{1}{r^3} \left\{ \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} - \frac{3(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{r})}{r^2} \right\} \equiv \frac{1}{r^3} P_i T_j^i Q^j, \quad (2.7)$$

其中, $\mathbf{r}$ 是从 $\mathbf{P}$ 到 $\mathbf{Q}$ 的位置向量, $\mathbf{P} = P^i e_i$, $\mathbf{Q} = Q^i e_i$, $P_i = \delta_{ij} P^j$ (见 Figure 2.2)。给出偶极耦合张量 (dipole-coupling tensor) T_i^j 写成 x^1, x^2, x^3 的表达式。

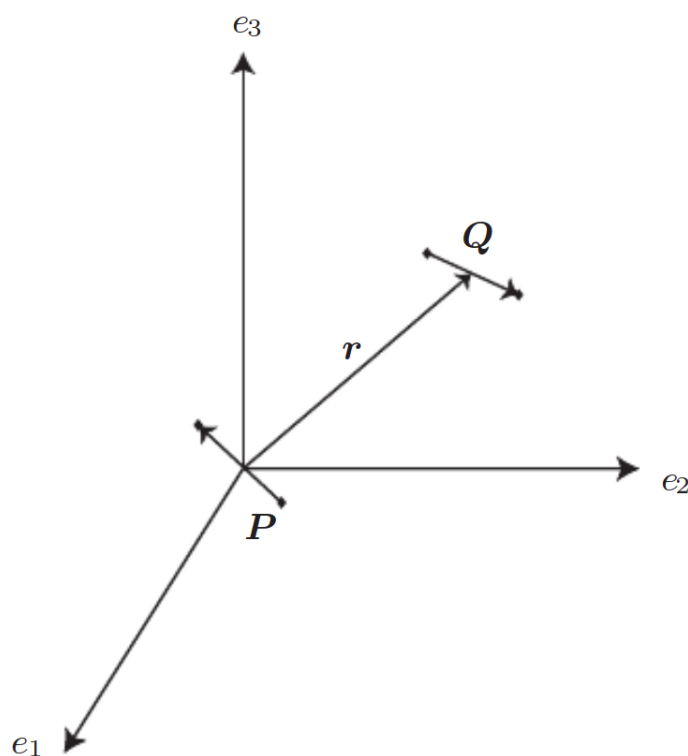


Figure 2.2

练习 2.4 说明在正交变换下：

- (1) δ^{ij} 像 (2,0)-型张量一样变换。
- (2) δ_{ij} 像 (0,2)-型张量一样变换。
- (3) δ_i^j 像 (1,1)-型张量一样变换。

练习 2.5 定义 Levi-Civita 张量 (Levi-Civita tensor) (也称为完全反对称张量 (completely antisymmetric tensor)):

$$\varepsilon^i_{jk} = \begin{cases} 0 & , \quad i, j, k, \text{ 不完全不同} \\ +1 & , \quad (ijk) \text{ 是 } (123) \text{ 的偶数排列} \\ -1 & , \quad (ijk) \text{ 是 } (123) \text{ 的奇数排列} . \end{cases} \quad (2.8)$$

因此

$$\begin{aligned} \varepsilon^1_{23} &= \varepsilon^2_{31} = \varepsilon^3_{12} = 1 , \\ \varepsilon^1_{32} &= \varepsilon^3_{21} = \varepsilon^2_{13} = -1 , \\ \varepsilon^1_{12} &= \varepsilon^1_{11} = \varepsilon^2_{12} = \cdots = 0 . \end{aligned}$$

说明 ε^i_{jk} 在一个旋转下像一个 (1,2)-型张量一样变换。

两个向量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间的向量 (叉乘) 积 (vector (cross) product) (仅对于 3 维 Euclid 空间完美定义) 由下式给出

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^i = \varepsilon^i_{jk} A^j B^k . \quad (2.9)$$

练习 2.6 对于 $\mathbb{R}^3$ 中沿着 x, y, z 坐标轴对应的单位向量, 我们有

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0) , \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0) , \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) .$$

运用 (2.9) 式来说明

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_i , \quad (2.10)$$

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 , \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 , \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 , \quad (2.11)$$

因此, (2.9) 式给出的公式与 3 维 Euclid 空间中的向量积的基本定义一致。

练习 2.7 说明

$$\varepsilon^k_{ij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} , \quad (2.12)$$

其中

$$\varepsilon_{klm} = \delta_{kn} \varepsilon^n_{lm} = \varepsilon^k_{lm} . \quad (2.13)$$

练习 2.8 运用 (2.9) 和 (2.12) 证明 “三叉积公式” ("triple cross-product" identity)

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) , \quad (2.14)$$

其中, 标量积 (scalar product) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ 定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i B_i , \quad (2.15)$$

$$B_i = \delta_{ij} B^j = B^i . \quad (2.16)$$

练习 2.9 运用 (2.15) 说明

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta .$$

练习 2.10 运用 (2.9) [或者等价的 (2.10) 和 (2.11)] 来验证叉乘的“右手定则”(“right hand rule”) 并且有: 如果 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$, 则有 $C = AB \sin \theta$ (见 Figure 2.3)。

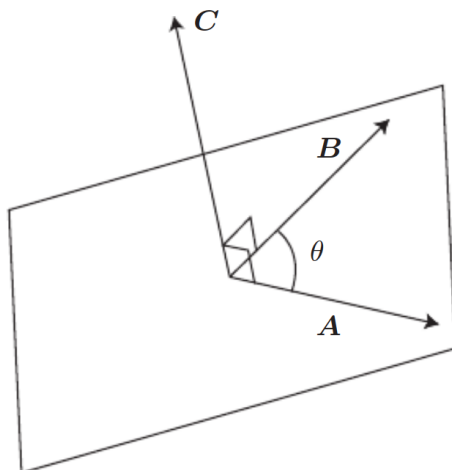


Figure 2.3

练习 2.11 运用 (2.15) 和 (2.9) 来说明: 对于任意 3 维 Euclid 空间的向量 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, 都有

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) , \quad (2.17)$$

并且上面每一个等号都等于由向量 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 张成的定向体积 (oriented volume) (见 Figure 2.4)。

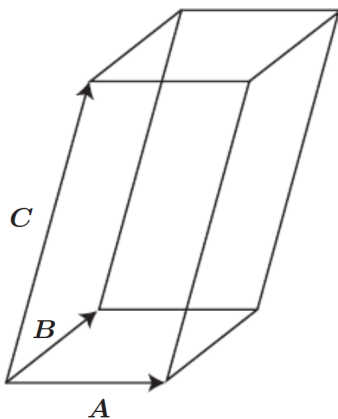


Figure 2.4

作为张量的另一个重要例子, 让我们考虑 Maxwell 电动力学 (Maxwell's electrodynamics) 中的电磁场张量 (electromagnetic field tensor) $F_{\mu\nu}$, 它是一个 $(0, 2)$ -型张量定

义为

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.18)$$

其中, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ 是 4 维 Minkowski 空间 (Minkowski space) 中的指标,

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad (2.19)$$

$\eta_{\mu\nu}$ 是所谓的 Lorentz 度规张量 (Lorentz metric tensor), 由一个 (0, 2)-型张量给出

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

并且 $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi, \mathbf{A})$ 是电动力学中的 4 维向量势 (4-vector potential) (或常称为 4 矢势), 满足

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (2.22)$$

其中, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{E}$ 分别是磁向量场和电向量场。根据 (2.18) 式, $F_{\mu\nu}$ 显然是反对称张量。比如 F_{01} 由下式给出

$$F_{01} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1}. \quad (2.23)$$

现在有

$$A_1 = \eta_{11} A^1 = A^1, \quad (2.24)$$

$$A_0 = \eta_{00} A^0 = -A^0. \quad (2.25)$$

因此

$$F_{01} = \frac{\partial A^1}{\partial t} + \frac{\partial A^0}{\partial x^1} = \frac{\partial A^1}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^1} = -E^1. \quad (2.26)$$

类似地有

$$F_{02} = -E^2, \quad F_{03} = -E^3. \quad (2.27)$$

练习 2.12 方程 (2.21) 和 (2.9) 式都意味着

$$B^i = \varepsilon^{ij}_k \frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \varepsilon^{ij}_k \partial_j A^k, \quad (2.28)$$

其中

$$\varepsilon^{ij}_k = \delta^{jl} \varepsilon^i_{lk} = \varepsilon^i_{jk}. \quad (2.29)$$

运用 (2.28) 和 (2.18) 来说明

$$F_{12} = B^3, \quad F_{13} = -B^2, \quad F_{23} = B^1. \quad (2.30)$$

最终我们有 $\mu =$ 行指标, 用 $\nu =$ 列指标, 得到了矩阵形式

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

在上面介绍的例子中, 偶极耦合张量 T_i^j 和电磁张量 $F_{\mu\nu}$ 是**张量场 (tensor fields)**, 因为这些张量 “活在” 底空间并且取决于空间中的位置。

3. 对称与守恒：角动量

守恒定律是物理学中最基本最有用的定律。例如，经典力学和经典场论中的动量守恒和角动量守恒以及能量守恒，以及量子力学中各种类型量子数的守恒。最基本最重要和最具深远影响的原理是每个守恒量都来自物理系统的一个确定的对称性。在本章，我们将展示这个原理适用于经典力学中的角动量的情况。我们将看到前面章节中发展出的向量和张量形式将最适合于此目的。

首先从构造称为**经典作用量 (classical action)** 开始，通常记为 S 。质量为 m 的点粒子在电势 $V(x^i)$, ($i = 1, 2, 3$) 的影响下运动，则该系统的经典作用量为

$$S[x^i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{1}{2} m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} - V(x^i) \right\}, \quad (3.1)$$

其中， t_1, t_2 是两个确定的时刻，我们已经使用了 Einstein 求和约定，而指标通过 Kronecker delta 升降：

$$x_i = \delta_{ij} x^j = x^i. \quad (3.2)$$

(3.1) 等号左边的方括号是一个用来标记经典作用量 S 是关于经典轨迹 $x^i(t)$ **泛函 (functional)** 的标准记号。在 $\{ \}$ 里面的量被称为 **Lagrangian L** ：

$$L = \frac{1}{2} m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} - V(x^i), \quad (3.3)$$

其被视为是质量 m 的动能和势能之间的差异。

保持端点固定，当 $x^i(t)$ 微小改变时会发生什么？(见 Figure 3.1) 换句话说，我们考虑小的**变分 (variations)** $\delta x^i(t)$ ：

$$x^i(t) \rightarrow x^i(t) + \delta x^i(t) \quad (3.4)$$

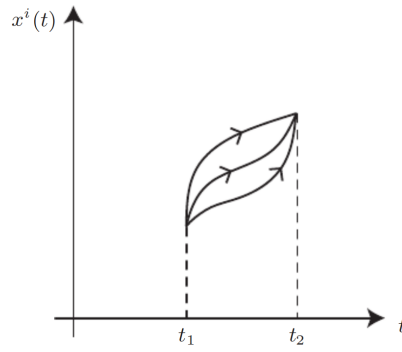


Figure 3.1

这样有

$$\delta x^i(t_1) = \delta x^i(t_2) = 0. \quad (3.5)$$

容易计算 $S[x^i]$ 对小的变分 δx^i 的响应。我们取 δx^i 的一阶项

$$\begin{aligned} S[x^i + \delta x^i] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} (x^i + \delta x^i) \frac{d}{dt} (x_i + \delta x_i) - V(x^i + \delta x^i) \right\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{1}{2} m \left(\frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} + 2 \frac{dx^i}{dt} \frac{d(\delta x_i)}{dt} + \frac{d}{dt} (\delta x^i) \frac{d}{dt} (\delta x_i) \right) - \left(V(x^i) + \delta x^i \frac{\partial V}{\partial x^i} \right) \right\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{1}{2} m \left(\frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} + 2 \frac{dx^i}{dt} \frac{d(\delta x_i)}{dt} \right) - \left(V(x^i) + \delta x^i \frac{\partial V}{\partial x^i} \right) \right\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{1}{2} m \left(\frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} + 2 \frac{d}{dt} \left(\delta x_i \frac{dx^i}{dt} \right) - 2 \delta x_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) - V(x^i) - \delta x^i \partial_i V \right\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{1}{2} m \left(\frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} \right) - V(x^i) + \frac{1}{2} m \left(2 \frac{d}{dt} \left(\delta x_i \frac{dx^i}{dt} \right) - 2 \delta x_i \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) - \delta x^i \partial_i V \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中

$$\partial_i V \equiv \frac{\partial V}{\partial x^i}. \quad (3.7)$$

因此

$$\begin{aligned} \delta S = S[x^i + \delta x^i] - S[x^i] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta x_i \left(-m \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) - \delta x^j \partial_j V \right\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \delta x_i \left(-m \frac{d^2 x^i}{dt^2} - \delta^{ij} \partial_j V \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

通过

$$S[x^i + \delta x^i] = S[x^i] + \int dt \delta x^i \frac{\delta S}{\delta x^i} + \cdots, \quad (3.9)$$

定义所谓**泛函导数 (functional derivative)** $\frac{\delta S}{\delta x^i}$, 从 (3.8), 我们有

$$\frac{\delta S}{\delta x^i} = - \left(m \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \delta^{ij} \partial_j V \right). \quad (3.10)$$

令 $\frac{\delta S}{\delta x^i} = 0$, 即: **极值化经典作用量 (extremizing the classical action)** S , 我们得到了经

典力学的**运动方程 (equation of motion)** (Newton 第二运动定律):

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.11)$$

注意到 (3.6) 等号右边的项正比于全微分 $\frac{d}{dt} \left(\delta x_i \frac{dx^i}{dt} \right)$, 被称为**表面项 (surface term)**, 由于假设 (3.5), 对于积分没有贡献。

现在让我们假设运动方程 (3.11) 合理并且考虑在位置向量 $\mathbf{x} = x^i e_i$ 的一个无穷小旋转下 S 的变分。我们同时假设存在一个**中心势场 (central potential)** 的情况, 有

$$V(x^i) = V \left(\sqrt{x^i x_i} \right), \quad (3.12)$$

即: V 仅是一个关于位置向量长度的函数。因为

$$v^2 = \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} \quad (3.13)$$

和 $V(x^i)$ 都在 $x^i e_i$ 的一个旋转下保持不变, $\delta S = 0$ 在旋转下也一样保持。让我们现在在一个旋转下显式计算 δS 。

首先回忆 (1.9) 和 (1.29), 在一个旋转下有

$$x'^i = a_j^i x^j, \quad (3.14)$$

同时 a 满足

$$a a^T = a^T a = 1, \quad (3.15)$$

其中, a^T 是旋转矩阵 a 的转置。考虑一个无穷小的旋转

$$a = 1 + \epsilon. \quad (3.16)$$

方程 (3.15) 意味着

$$(1 + \epsilon)(1 + \epsilon^T) = 1. \quad (3.17)$$

因此, 取一阶无穷小矩阵 ϵ , 我们有

$$\epsilon^T = -\epsilon. \quad (3.18)$$

对于一个无穷小旋转

$$x'^i = (\delta_j^i + \epsilon_j^i) x^j = x^i + \epsilon_j^i x^j = x^i + \delta x^i. \quad (3.19)$$

等价地,

$$\delta x^i = \epsilon_j^i x^j, \quad (3.20)$$

其中

$$\epsilon_j^i = -\epsilon_i^j. \quad (3.21)$$

我们现在回到 (3.6):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta x_i \left(-m \frac{d^2 x^i}{dt^2} - \delta^{ij} \partial_j V \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\delta x_i \frac{dx^i}{dt} \right) m . \quad (3.22)$$

运动方程 (3.11) 意味着上面方程的等号右边第一项消失了。因此, 正如上面讨论的, 在一个旋转下 $\delta S = 0$, 我们则有

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx^i}{dt} \delta x_i \right) = 0 , \quad (3.23)$$

或者

$$m \frac{dx^i}{dt} \delta x_i \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 , \quad (3.24)$$

换句话说意味着

$$m \frac{dx^i}{dt} \delta x_i = \text{常数 (关于时间)} . \quad (3.25)$$

运用 (3.20), 有

$$m \frac{dx^i}{dt} \delta x_i = m \delta_{ij} \epsilon_k^j x^k \frac{dx^i}{dt} = m \epsilon_k^j t_j^k , \quad (3.26)$$

其中

$$t_j^k \equiv \delta_{ij} x^k \frac{dx^i}{dt} . \quad (3.27)$$

方程 (3.21) 意味着矩阵 (ϵ_j^i) 可以显式展示为反对称矩阵

$$(\epsilon_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_1^2 & \epsilon_1^3 \\ -\epsilon_1^2 & 0 & \epsilon_2^3 \\ -\epsilon_1^3 & -\epsilon_2^3 & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.28)$$

因此 (3.26) 中对于 j 和 k 的遍历求和可以被显式写成

$$m \epsilon_k^j t_j^k = m \epsilon_1^2 (t_2^1 - t_1^2) + m \epsilon_1^3 (t_3^1 - t_1^3) + m \epsilon_2^3 (t_3^2 - t_2^3) .$$

现在定义

$$l_i^j \equiv -m (t_i^j - t_j^i) . \quad (3.29)$$

由于 ϵ_i^j 是任意的 [只要它们满足 (3.21)], 独立的 l_i^j 必须 (关于时间) 守恒。为了将这个事实变成更熟悉形式, 我们将升高所有指标。因此, 我们有守恒量

$$l^{ij} = m (t^{ij} - t^{ji}) .$$

根据 (3.27)

$$t^{ij} = \delta^{ik} t_k^j = \delta^{ik} \delta_{lk} x^j \frac{dx^l}{dt} = \delta_l^i x^j \frac{dx^l}{dt} = x^j \frac{dx^i}{dt} . \quad (3.30)$$

守恒量

$$l^{ij} \equiv m \left(x^i \frac{dx^j}{dt} - x^j \frac{dx^i}{dt} \right) \quad (3.31)$$

实际上是角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 的分量。这可以从向量积 (2.9) 看出。因此

$$L^1 = l^{23}, \quad L^2 = l^{31}, \quad L^3 = l^{12}. \quad (3.32)$$

注意, l^{ij} 是一个反对称 (2,0)-型张量, 当底流形为 3 维时, 它具有三个独立的分量。可以将 l^{ij} 看成是一个 3 维向量的三个分量的事实是张量 l^{ij} 生活所在流形的维数的一个情况。

这是一个重点。我们稍后看到, 向量积在空间维度不是 3 维的情况中不是一个有意义的数学构造。向量积推广到任意维度的空间被称为**外积 (exterior product)**, 将在 Chapter 28 系统地介绍。

练习 3.1 说明根据作用量原理, 当合外力为 0 时, 动量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 是守恒的。相关的作用量 S 由 (3.1) 给出, 其中 $V(x^i) = 0$ 。你需要证明的是在坐标的一个一般平移变换下, 即:

$$x^i \rightarrow x^i + \epsilon^i,$$

由 $\delta S = 0$ 得到动量 $\mathbf{p}$ 是守恒的。其中, ϵ^i 是一个无穷小的量。

动量守恒和角动量守恒定律是著名的 **Noether 定理 (Noether's Theorem)** 的特例, 粗略地来讲 Noether 定理表述为: 每种对称性都引导到作用量泛函的不变性, 对应于一个守恒的物理量 (见 Y. Choquet-Bruhat and C. DeWitt-Morette 1989)。

4. 角动量作为旋转的生成元：Lie 群和 Lie 代数

我们在上一章中看到，经典力学中，动量守恒是平移不变性的结果，角动量守恒是旋转不变性的结果。这同样适用于量子力学。这一事实说明了在物理定律构造和物理问题解决时考虑对称性的根本重要性。

在量子力学中，线性动量的可观测量 (observable) 由平移生成元 (generator of translations) 代替，角动量的可观测量由旋转生成元 (generator of rotations) 代替。考虑无穷小平移

$$x^i \longrightarrow x^i + \delta x^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

其中

$$\delta x^i = \epsilon^i. \quad (4.2)$$

我们可以重新改写

$$\delta x^k = i\epsilon^j p_j x^k, \quad (4.3)$$

其中 p_j 是线性动量算符 (linear momentum operator)

$$p_j = -i \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (4.4)$$

或

$$\mathbf{p} = -i\nabla,$$

其中, ∇ 是向量微积分中的梯度。(更准确地说, $p_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^j}$; 但是我们令 Planck 常数 $\hbar = 1$)。参数 $i = \sqrt{-1}$ 在 (4.3) 和 (4.4) 中出现源自于在量子理论中 p_j 必须是一个 **Hermite 算符** (**Hermitian operator**)(表示物理可观测量)。算符的 **Hermiticity** 性质将在 Chapter 10 讨论。

一个标量波函数在平移下是如何变换的呢？将 (r, s) -型张量变换的一般变换规则 (2.1) 应用于标量 $[(0, 0)$ -型张量] 很明显是

$$\psi'(x'^i) = \psi(x^i) . \quad (4.5)$$

这也可以从 Figure 4.1 中看出：“山坡上”的一个固定点 P 的高度相对于坐标系的平移是不变的。

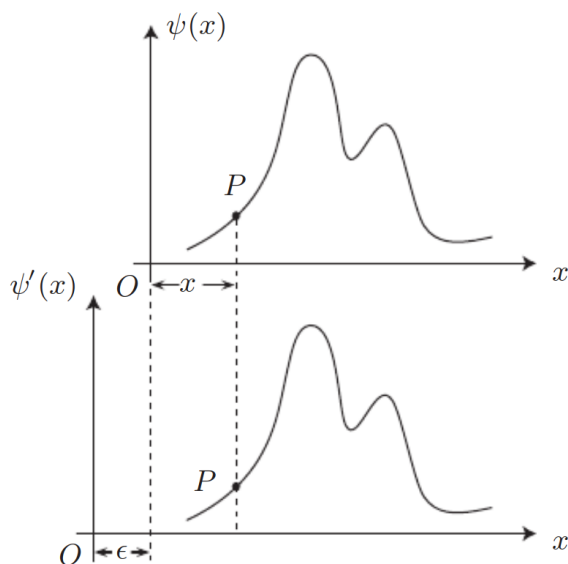


Figure 4.1

使用

$$x'^i = x^i + \epsilon^i , \quad (4.6)$$

(4.5) 意味着

$$\psi'(x^i) \equiv U(\epsilon^i)\psi(x^i) = \psi(x^i - \epsilon^i) = \psi(x^i) - \epsilon^i \partial_i \psi + O(\epsilon^2) , \quad (4.7)$$

或者

$$U(\epsilon^i)\psi(x^i) = \psi(x^i) - i\epsilon^i p_i \psi + O(\epsilon^2) . \quad (4.8)$$

这个方程暗示着下面的结论 (尽管我们没有证明, 但是事实上是对的): 对于一个**有限平移 (finite translation)** $x^i \rightarrow x^i + a^i$:

$$\psi'(x^i) = U(a^i)\psi(x^i) , \quad (4.9)$$

其中

$$\boxed{U(a^i) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} a^j p_j\right)} , \quad (4.10)$$

并且

$$p_j = -i\hbar \partial_j . \quad (4.11)$$

选择符号 U 是为了提醒我们它表示一个**么正算符 (unitary operator)**(变换) 的事实, 当我

们处理复向量空间 (complex vector space) 时 (量子力学要求的情况), 它与一个正交变换扮演相同的角色。方程 (4.10) 是动量 p_j 被称为平移生成元 (generator) 背后原因。

在量子力学中, p_j 是一个 Hermite 算符而不是一个数字, 这一事实具有非常深刻的物理影响。在数学上很容易建立 x_j 和 p_j 不对易。事实上

$$\boxed{[x^j, p_k] = i\hbar\delta_k^j} . \quad (4.12)$$

这种对易关系 (commutation relation) 是 Heisenberg 不确定原理 (Heisenberg's uncertainty principle) 的数学基础。

练习 4.1 使用 (4.11) 验证 (4.12)。

我们也有平凡的

$$[x^i, x^j] = 0 , \quad (4.13)$$

$$[p_i, p_j] = 0 . \quad (4.14)$$

让我们现在考虑由 (3.20) 和 (3.21) 描述的无穷小旋转:

$$\delta x^i = \epsilon_j^i x^j , \quad (4.15)$$

$$\epsilon_j^i = -\epsilon_i^j . \quad (4.16)$$

再次使用 (4.5) 和下面的 (4.7), 回忆 (3.14) 到 (3.16), 我们有

$$\begin{aligned} \psi'(x^i) &= U(\epsilon_j^i)\psi(x^i) = \psi(a^{-1}x) = \psi(a^T x) = \psi((1 + \epsilon^T)x) = \psi((1 - \epsilon)x) \\ &= \psi(x - \epsilon x) = \psi(x^i) - (\epsilon x)^i \partial_i \psi + O(\epsilon^2) = \psi(x^i) - \epsilon_j^i x^j \partial_i \psi + O(\epsilon^2) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

如果我们记得 ϵ_j^i 是一个反对称矩阵 [(3.28)] 并且只有三个独立分量, 那么第二项可以很容易写成角动量分量的表达式。因此

$$\begin{aligned} \epsilon_j^i x^j \partial_i \psi &= i\epsilon_j^i x^j p_i \psi \\ &= i\epsilon_1^2 (x^1 p_2 - x^2 p_1) \psi + i\epsilon_3^1 (x^3 p_1 - x^1 p_3) \psi + i\epsilon_2^3 (x^2 p_3 - x^3 p_2) \psi . \end{aligned} \quad (4.18)$$

等号右边括号中的量被视为角动量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 的分量 [见 (2.9)]:

$$L^3 = x^1 p_2 - x^2 p_1 , \quad L^2 = x^3 p_1 - x^1 p_3 , \quad L^1 = x^2 p_3 - x^3 p_2 . \quad (4.19)$$

三个小参数 ($\epsilon_2^3, \epsilon_3^1, \epsilon_1^2$) 可以看做是旋转轴 $\delta\theta \mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ 是一个单位向量, $\delta\theta$ 是真正意义上的旋转角度) 的分量 (见 Figure 4.2)。

类似于 (4.9) 和 (4.10) 式, 一个波函数在 3 维 Euclid 空间中的有限旋转下变换为

$$\psi'(x^i) = U(\mathbf{n}, \theta)\psi(x^i) , \quad (4.20)$$

$$\boxed{U(\mathbf{n}, \theta) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}\right)} , \quad (4.21)$$

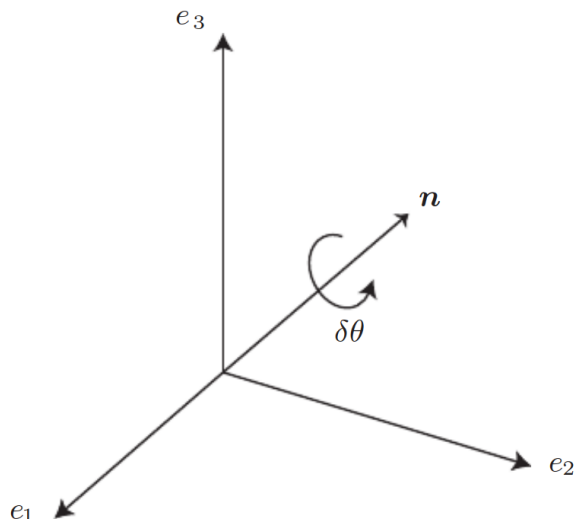


Figure 4.2

其中, θ 是一个有限旋转角度。因此, 角动量 L 是旋转生成元。

练习 4.2 找出绕 z 轴无穷小旋转一个角度 $\delta\theta$ 情况下 $\epsilon_1^2, \epsilon_3^1, \epsilon_2^3$ 的显式表达式; 并因此对于这个旋转, 将 $\psi'(x^i)$ 写成 $\psi(x^i)$ 的表达式。

在经典力学的情况下, 角动量算符的分量

$$\begin{cases} L^3 = l_1^2 = -i\hbar (x^1\partial_2 - x^2\partial_1) , \\ L^2 = l_3^1 = -i\hbar (x^3\partial_1 - x^1\partial_3) , \\ L^1 = l_2^3 = -i\hbar (x^2\partial_3 - x^3\partial_2) , \end{cases} \quad (4.22)$$

实际上是一个 $(1, 1)$ -型反对称张量算符的三个独立分量。一般情况下, 在一个 n 维底空间 (流形) 上定义的 2 阶反对称张量独立分量个数 [其中一个 (r, s) 型张量的阶数被定义为 $r + s$] 等于 $\frac{n(n-1)}{2}$ 。这可以从 Figure 4.3 非常容易地看出: 其展示了对角元素为零, 上对角元素与下

$$\begin{pmatrix} 0 & l_1^2 & \cdots & \cdots & l_1^n \\ -l_1^2 & 0 & \cdots & \cdots & l_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & l_{n-1}^n \\ -l_1^n & -l_2^n & \cdots & -l_{n-1}^n & 0 \end{pmatrix}$$

Figure 4.3

对角元素是符号对应相反的一个反对称矩阵。在这样一个矩阵中独立元素个数刚好等于上对角或者下对角部分的元素个数。显然元素个数是

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

因此对于 $n = 3$, 则有 $\frac{n(n-1)}{2} = 3$ 。

正如 Chapter 1 中讨论的, 所有 3 维空间中的纯旋转操作构成了 $SO(3)$ 群。这是更一般的 $SO(n)$ 的特殊情况, 它是被称为 **Lie 群 (Lie group)** 的非常重要的例子。一个 Lie 群, 粗略地说, 是一个复合数学对象, 既是一个群又是一个可微流形 (differentiable manifold) (见 Chapter 34)。 $SO(3)$ 是一个 3 维紧致流形 (compact manifold), 几何上可以表征为半径为 π 的一个实心球体, 球形表面上对径点 (antipodal points) 当做同一点处理 (见 Figure 4.4)。让我们现在来解释这一说法。

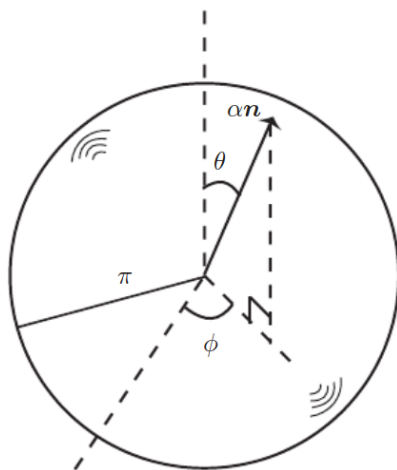


Figure 4.4

每个 $g \in SO(3)$ 可以用 3 个参数确定: $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ (分别是极角和方位角, 它们给出了旋转轴 n 的定向), 还有 $0 \leq \alpha \leq \pi$ (旋转角)。因此, 上述球体内部的每个点表示一个独特的旋转 $g \in SO(3)$ 。恒元 (没有旋转) 由球体的中心表示。因为绕 n 旋转 π 和绕 $-n$ 旋转 π 是完全一样的, 所以球面上的对径 (关于直径相对) 点应该被当做同一点处理。另外, 绕 n 旋转 α 的旋转和绕 $-n$ 旋转 $2\pi - \alpha$ 的旋转相同。

练习 4.3 说服自己前两段话是合理的。

关于 $O(3)$ 和 $SO(3)$ 的进一步讨论见 Chapter 21 和 Chapter 22。在进一步之前, 先给出群的一般定义, 再引入群表示 (group representation) 的概念, 将会很有用。

定义 4.1 一个集合 G , 在其上定义了乘法规则并满足如下性质被称为一个群 (group):

- (1) 如果 $g_1 \in G$ 且 $g_2 \in G$, 则有 $g_1 g_2 \in G$ (关于乘法封闭);
- (2) 对于任意 $g_1, g_2, g_3 \in G$, 有 $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2)g_3$ (结合律);
- (3) 存在一个元素 $e \in G$, 称为恒元 (identity), 使得: 对于任意 $g \in G$, 有

$$eg = ge = g;$$

- (4) 对于任意 $g \in G$, 存在一个元素 $g^{-1} \in G$, 称为 g 的逆 (inverse), 使得:

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$

注意到正如前文提到的 (在 Chapter 1 中), 群乘法通常是不对易的。到目前为止, 我们只处理了像 $O(3)$ 和 $SO(3)$ 这样的 Lie 群, 它的元素由连续变量参数化。其实还有离散群 (discrete groups), 元素是可数的。量子统计中一个重要的基本的离散群是对称群 (symmetry group)

(或者置换群 (permutation group)) $S(n)$, 这个群是 n 个对象的所有排列。我们将稍后在 Chapter 16 中讨论这个群。在 Lie 群中, 物理学中重要的一些例子是所谓的**经典群 (classical group)**, 如: $O(n), SO(n), U(n)$ 和 $SU(n)$, 后两者分别是 n 维么正群和特殊么正群。 $U(n)$ 可以看成 $n \times n$ 么正矩阵构成的群, $SU(n)$ 可以看成行列式为 +1 的 $n \times n$ 么正矩阵构成的群。“么正”意味着 $gg^\dagger = g^\dagger g = e$, 其中 $g^\dagger$ 是矩阵 g 的转置复共轭矩阵 (或者 **Hermite 共轭 (hermitian conjugate)**)。因此, 么正矩阵一般有复数项 (见 Chapter 10)。

定义 4.2 从群 G 到另一个群 G' 的一个**群同态 (group homomorphism)** 是一个映射 (不必是一对一的) $f: G \rightarrow G'$, 其保持群的乘法, 即: 如果 $g_1, g_2 \in G$ 并且 $g_1 g_2 = g_3$, 则有 $f(g_1)f(g_2) = f(g_3)$ 。

在物理学中, 我们经常考虑群元素对于标量、向量、张量等的作用。在我们讨论平移和旋转对于波函数作用时, 我们已经看到了关于这一点的例子, 其可以被当做是标量场 (ψ 没有指标)。这里相关的概念是群表示。

定义 4.3 一个群 G 的一个**群表示 (group representation)** 是一个群同态 $f: G \rightarrow \mathcal{T}(V)$, 其中 $\mathcal{T}(V)$ 是一个向量空间 V 上的线性变换构成的群。一个表示被称为**忠实的 (faithful)**, 如果同态也是一个**同构 (isomorphism)** [一对一 (单射) 且到上的 (满射)]。

我们之前的例子 (4.10) 和 (4.21) 分别对应于 Abel (加法) 平移群和非 Abel 旋转群 $SO(3)$, 都是真实表示的重要例子。

数学物理中一个最重要的问题就是找到一个确定群的所有的所谓的不等价不可约表示 (inequivalent irreducible representations)。我们稍后 (Chapter 18) 将详细阐述这些概念。此时足够来说这个问题的解决已经引导从原子, 分子和核光谱到基本粒子分类的各种物理领域取得了巨大进步。

我们现在回到一个 Lie 群的元素 $g \in G$ 和它们的生成元之间的关系上。根据 (4.10) 和 (4.21), 群元素是由生成元进行指数运算得到的。在没有详细说明的情况下, 我们指出一个 Lie 群 G 的生成元是一个确定向量空间 $\mathcal{G}$ 的向量, 称为 **Lie 群 G 的 Lie 代数 (Lie algebra of the Lie group G)**。 $\mathcal{G}$ 的维度和 G 的维度相同, 当后者可以当做一个可微流形时。事实上, Lie 代数 $\mathcal{G}$ 被定义成 G 上左-(或右-) 不变向量场的空间, 并同构于 G 在恒元处的切空间。对于所有这些概念更详细地学习将推迟到 Chapter 34。为了直观地讨论一个可微流形的切空间的概念, 我们推荐读者阅读 Chapter 30。

一般情况下, 对于一个紧致 Lie 群 G , 我们可以定义一个**指数映射 (exponential map)**, $\exp: \mathcal{G} \rightarrow G$, 使得对于任意 $g \in G$, 存在一个 $A \in \mathcal{G}$ 满足:

$$g = \exp(A). \quad (4.23)$$

对于矩阵 Lie 群, 比如 $O(n)$, G 和 $\mathcal{G}$ 中的元素是相同大小的矩阵并且有

$$\exp(A) = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots. \quad (4.24)$$

(4.24) 中的求和总是收敛的。对于 $SO(3)$, (4.16) 意味着 $SO(3)$ (一个确定 Lie 群的 Lie 代数经常写成群名称的花体字母形式) 是所有 3×3 反对称矩阵的集合。 $\mathcal{G}$ 的乘法规则由 **Lie 括号**

(Lie bracket) (或对易关系) 给出: 对于任意的 $A, B \in \mathcal{G}$, 有

$$[A, B] = AB - BA . \quad (4.25)$$

不难证明所谓的 **Jacobi 恒等式 (Jacobi identity)**:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 . \quad (4.26)$$

练习 4.4 用 (4.25) 证明 (4.26)。

练习 4.5 说明如果 A 和 B 都是反对称矩阵, $[A, B]$ 也是一个反对称矩阵。因此, 在 Lie 括号乘法规则下, $SO(n)$ 确实是封闭的。

Lie 括号乘法规则显然满足分配率: 对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有

$$[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C] ; \quad (4.27)$$

还有反对称规则:

$$[A, B] = -[B, A] . \quad (4.28)$$

实际上, 任何 n 维实向量空间具有一个满足分配率、反对称规则和 Jacobi 恒等式的乘法规则被称为一个 n 维 Lie 代数。作为一个例子, 注意到 3 维 Euclid 空间装备了向量 (叉) 乘积 [由 (2.9) 定义] 是一个 3 维 Lie 代数。

练习 4.6 验证上述表述。

因为 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的元素是对应于 Lie 群 G 恒元附近的无穷小生成元, G 恒元附近的结构由 $\mathcal{G}$ 的结构确定。Lie 代数的结构完全由所谓的**结构常数 (structure constants)** 决定, 定义如下。

定义 4.4 令 $(e_1, \dots, e_n)$ 是 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的一组基, **结构常数 (structure constants)** $c_{ij}^k \in \mathbb{R}$ 被定义为

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k . \quad (4.29)$$

练习 4.7 对于装备了一般叉乘的 $\mathbb{R}^3$ 找到所有结构常数, 具体来说: 找到所有 c_{ij}^k , 定义为

$$e_i \times e_j = c_{ij}^k e_k . \quad (4.30)$$

练习 4.8 使用如下形式的 Jacobi 恒等式

$$[e_i, [e_j, e_k]] + [e_j, [e_k, e_i]] + [e_k, [e_i, e_j]] = 0 \quad (4.31)$$

和 (4.29) 来说明: 对于任意的 i, j, h, k , 结构常数 c_{ij}^k 满足如下恒等式

$$c_{im}^h c_{jk}^m + c_{km}^h c_{ij}^m + c_{jm}^h c_{ki}^m = 0 . \quad (4.32)$$

我们现在将计算 $SO(n)$ 群的结构常数, 并由此来确定 Lie 代数 $\mathcal{SO}(n)$ 。对于 $g \in SO(n)$, 令 $U(g)$ 是 g 的一个 N 维表示。[$U(g)$ 可以因此考虑成一个 $N \times N$ 的矩阵, 其中 N 一般不等于 n]。回想一下, 恒元 $e \in SO(n)$ 附近的一个元素 g 是由小参数组成的一个反对称矩阵 ϵ_i^j [具有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个独立元素] 确定的。(见 Figure 4.3 之前的讨论)。类似于 (4.21), 我们写

$$U(g) = 1 - \frac{1}{2} J_i^j \epsilon_j^i + O(\epsilon^2), \quad (4.33)$$

其中, J_i^j 是 $N \times N$ 矩阵, ϵ_j^i 是数, 并且有

$$J_i^j = -J_j^i. \quad (4.34)$$

引入系数 $\frac{1}{2}$ 是为了照顾 ϵ_i^j 和 J_i^j 自然的反对称性质。 J_i^j 则是 Lie 代数 $\mathcal{SO}(n)$ 的元素, 并且实际上构成 $\mathcal{SO}(n)$ 的一组基。为了计算结构常数 c_{ij}^k , 我们需要决定 J_i^j 的对易关系。我们将在适当的时候展示这个相当长但有启发性的计算细节。首先我们给出结论并阐明其应用到 $SO(3)$ 的情况。 $\mathcal{SO}(n)$ 的 Lie 代数结构完全由下面的对易关系给出:

$$\boxed{[J_i^j, J_k^l] = \delta_k^j J_i^l - \delta_i^l J_k^j + \delta_i^k J_l^j - \delta_l^j J_i^k, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n.} \quad (4.35)$$

对于 $SO(3)$ 来说, J_i^j 只有 3 个独立分量, 即: J_1^2, J_3^1 和 J_2^3 。根据 (4.35), 有

$$[J_2^3, J_3^1] = J_2^1, \quad (4.36)$$

$$[J_3^1, J_1^2] = J_3^2, \quad (4.37)$$

$$[J_1^2, J_2^3] = J_1^3. \quad (4.38)$$

上述三个方程给出了 $\mathcal{SO}(3)$ 的“乘法表”。角动量算符 L^1, L^2, L^3 [(4.22)] 和 J_i^j 通过下面的关系联系起来:

$$\hbar J_1^2 = iL^3, \quad \hbar J_3^1 = iL^2, \quad \hbar J_2^3 = iL^1. \quad (4.39)$$

因此, 量子理论中的角动量算符遵守相似的对易关系:

$$[L^1, L^2] = i\hbar L^3, \quad [L^2, L^3] = i\hbar L^1, \quad [L^3, L^1] = i\hbar L^2 \quad (4.40)$$

让我们现在来建立 (4.35)。令 $a, b \in SO(n)$ 为靠近恒元 e 的元素。设

$$a = 1 + \epsilon + O(\epsilon^2), \quad (4.41)$$

和

$$b = 1 + \epsilon' + O(\epsilon'^2), \quad (4.42)$$

其中, ϵ 和 ϵ' 都是小参数的 $n \times n$ 反对称矩阵。注意到上面方程中 1 代表 $n \times n$ 单位矩阵。由于 $U(g)$ 是一个群同态 (见定义 4.2), 我们有

$$U(b^{-1}ab) = U(b^{-1})U(a)U(b). \quad (4.43)$$

另一方面, 通过 (4.41), 有

$$b^{-1}ab = b^{-1}(1 + \epsilon + O(\epsilon^2))b \approx 1 + b^{-1}\epsilon b + O(\epsilon^2) = 1 + \bar{\epsilon} + O(\epsilon^2), \quad (4.44)$$

其中, 我们已经定义

$$\bar{\epsilon} \equiv b^{-1}\epsilon b = b^T \epsilon b, \quad (4.45)$$

由于 b 是正交矩阵, 从而保证上面最后一个等号成立。因此, 通过 (4.33), 有

$$\begin{aligned} U(b^{-1}ab) &= 1 - \frac{1}{2}J_i^j \epsilon_j^i + O(\epsilon^2) = U^{-1}(b) \left(1 - \frac{1}{2}J_i^j \epsilon_j^i + O(\epsilon^2) \right) U(b) \\ &= 1 - \frac{1}{2}U^{-1}(b)J_i^j \epsilon_j^i U(b) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.46)$$

再次注意到, 在上面方程中, 如果 $U(g)$ 是 $SO(n)$ 的一个 N 维表示, 则 1 代表 $N \times N$ 的单位矩阵, 所有的 J_i^j 都是 $N \times N$ 的矩阵。所有 ϵ_j^i 是数。通过 (4.45)

$$\bar{\epsilon}_\beta^\alpha = (b^T \epsilon b)_\beta^\alpha = (b^T)_\beta^i \epsilon_i^j b_j^\alpha. \quad (4.47)$$

方程 (4.46) 则意味着

$$J_\alpha^\beta \epsilon_i^j (b^T)_\beta^i b_j^\alpha = \epsilon_j^i U^{-1}(b)J_i^j U(b). \quad (4.48)$$

交换上面方程等号左边的指标 i 和 j ($i \leftrightarrow j$) (我们可以这样做是因为这些指标都是求和掉的哑标), (4.48) 变成

$$\epsilon_j^i \left\{ b_i^\alpha (b^T)_\beta^j J_\alpha^\beta - U^{-1}(b)J_i^j U(b) \right\} = 0. \quad (4.49)$$

上面方程括号中的量

$$F_i^j \equiv b_i^\alpha (b^T)_\beta^j J_\alpha^\beta - U^{-1}(b)J_i^j U(b), \quad (4.50)$$

是一个反对称张量:

$$F_i^j = -F_j^i. \quad (4.51)$$

实际上, 通过交换 i 和 j ($i \leftrightarrow j$), 有

$$\begin{aligned} F_j^i &= b_j^\alpha (b^T)_\beta^i J_\alpha^\beta - U^{-1}(b)J_j^i U(b) \\ &= b_j^\beta (b^T)_\alpha^i J_\beta^\alpha - U^{-1}(b)J_j^i U(b) \quad (\alpha \leftrightarrow \beta) \\ &= -b_i^\alpha (b^T)_\beta^j J_\alpha^\beta + U^{-1}(b)J_i^j U(b) \quad (\text{由于 } J_\beta^\alpha = -J_\alpha^\beta) \\ &= -F_i^j. \end{aligned} \quad (4.52)$$

方程 (4.49) 也可以被写成

$$\epsilon_j^i F_i^j = 0, \quad (4.53)$$

或者, 由于 ϵ_j^i 是反对称的 ($\epsilon_j^i = -\epsilon_i^j$), 有

$$\sum_{j < i} \epsilon_j^i (F_i^j - F_j^i) = 0 \quad (4.54)$$

因此, 由于所有 ϵ_j^i ($j < i$) 是独立的, 有

$$F_i^j = F_j^i . \quad (4.55)$$

方程 (4.55) 和 (4.51) 必然意味着

$$F_i^j = 0 . \quad (4.56)$$

因此, 从 (4.50), 有

$$U^{-1}(b) J_i^j U(b) = b_i^\alpha (b^T)_\beta^j J_\alpha^\beta . \quad (4.57)$$

现在选择

$$b = 1 + \epsilon' + O(\epsilon'^2) ,$$

满足

$$(\epsilon')^T = -\epsilon' . \quad (4.58)$$

则有

$$U(b) = 1 - \frac{1}{2} J_\alpha^\beta \epsilon_\beta'^\alpha + O(\epsilon'^2) , \quad (4.59)$$

和

$$U^{-1}(b) = 1 + \frac{1}{2} J_\alpha^\beta \epsilon_\beta'^\alpha + O(\epsilon'^2) . \quad (4.60)$$

同样有

$$b_i^\alpha = \delta_i^\alpha + \epsilon_i^\alpha + O(\epsilon'^2) , \quad (4.61)$$

$$(b^T)_\beta^j = \delta_\beta^j - \epsilon_\beta'^j + O(\epsilon'^2) . \quad (4.62)$$

将上面四个方程代入 (4.57), 我们有

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2} J_\alpha^\beta \epsilon_\beta'^\alpha + O(\epsilon'^2) \right) J_i^j \left(1 - \frac{1}{2} J_\alpha^\beta \epsilon_\beta'^\alpha + O(\epsilon'^2) \right) \\ &= (\delta_i^\alpha + \epsilon_i'^\alpha + O(\epsilon'^2)) (\delta_\beta^j - \epsilon_\beta'^j + O(\epsilon'^2)) J_\alpha^\beta , \end{aligned} \quad (4.63)$$

或

$$J_i^j + \frac{1}{2} \epsilon_\beta'^\alpha [J_\alpha^\beta, J_i^j] + O(\epsilon'^2) = J_i^j + \epsilon_i'^\alpha \delta_\beta^j J_\alpha^\beta - \delta_i^\alpha \epsilon_\beta'^j J_\alpha^\beta + O(\epsilon'^2) , \quad (4.64)$$

或

$$\frac{1}{2} \epsilon_\beta'^\alpha [J_\alpha^\beta, J_i^j] = \epsilon_i'^\alpha J_\alpha^j - \epsilon_\beta'^j J_i^\beta . \quad (4.65)$$

我们进一步操作等号右边如下:

$$\begin{aligned} \epsilon_i'^\alpha J_\alpha^j - \epsilon_\beta'^j J_i^\beta &= \epsilon_\beta'^\alpha \delta_i^\beta J_\alpha^j - \epsilon_\beta'^\alpha \delta_\alpha^j J_i^\beta \\ &= \frac{1}{2} \left(\epsilon_\beta'^\alpha \delta_i^\beta J_\alpha^j - \epsilon_\beta'^\alpha \delta_\alpha^j J_i^\beta \right) + \frac{1}{2} \left(\epsilon_\alpha'^\beta \delta_i^\alpha J_\beta^j - \epsilon_\alpha'^\beta \delta_\beta^j J_i^\alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \epsilon_\beta'^\alpha \left\{ \delta_i^\beta J_\alpha^j - \delta_\alpha^j J_i^\beta - \delta_i^\alpha J_\beta^j + \delta_\beta^j J_i^\alpha \right\} \end{aligned} \quad (4.66)$$

其中, 在第二个等号右边, 我们对比第一项和第二项, 对第三项和第四项进行了指标交换 ($\alpha \leftrightarrow$

β)。方程 (4.65) 和 (4.66) 则意味着

$$[J_\alpha^\beta, J_i^j] = \delta_i^\beta J_\alpha^j - \delta_\alpha^j J_i^\beta - \delta_i^\alpha J_\beta^j + \delta_\beta^j J_i^\alpha = \delta_i^\beta J_\alpha^j - \delta_\alpha^j J_i^\beta + \delta_i^\alpha J_\beta^j - \delta_\beta^j J_i^\alpha \quad (4.67)$$

与 (4.35) 是完全相同的方程。这个方程确定了 $SO(n)$ 的 Lie 代数。

5. 代数结构

到目前为止，我们已经介绍并使用了线性向量空间，群和代数的**代数范畴 (algebraic categories)** 中的一些重要例子。这些是最重要的物理应用，也将是本书中考虑的主要内容。一般地，每个代数范畴都需要一个特殊的**代数结构 (algebraic structure)**，这一代数结构是通过范畴中任意对象的元素上的关联规则 (操作) 的一个特定集合来表征的。比如，定义 4.1 对于群的范畴形式化了结构。本章我们将对于线性向量空间和代数的范畴做相同的事。为了在不同代数范畴中建立一定层次，我们也将引入两种其它代数结构：环和模。在接下来的两章中，我们将回来更详细地看群和 Lie 代数，为进一步的应用奠定基础。

群结构是最简单的，只涉及一种内部操作——群乘法。在 Abel 群的情况中，这种乘法有时能被写成加法。因此 ab 可以被写成 $a + b$ ， ab^{-1} 可以被写成 $a - b$ ，并且恒元 e 可以写成 0 (零)。

练习 5.1 检查当对于 Abel 群乘法写成加法时，定义 4.1 中给出的群的所有性质是否合理。

为了形式区分乘法和加法的运算，我们必须在代数结构中引入下一级复杂性——环结构。

定义 5.1 一个**环 (ring)** 是一个集合 R ，在其上定义了两种**内部操作 (internal operation)**， $(x, y) \mapsto xy$ 和 $(x, y) \mapsto x + y$ ，分别称为乘法和加法，使得

a) R 在加法下是一个 Abel 群。

b) 乘法满足结合律，并且关于加法满足分配率，即：对于任意 $x, y, z \in R$ ，有

(1)

$$(xy)z = x(yz), \quad (\text{结合律})$$

(2)

$$\begin{cases} x(y + z) = xy + xz, \\ (y + z)x = yx + zx. \end{cases} \quad (\text{分配律})$$

和群乘法一样，环的乘法并不需要是可交换。如果一个环 R 在乘法下是可交换的，那么称 R 是一个 **Abel(可交换) 环 (Abelian(commutative) ring)**。

定义 5.2 一个环 R 具有元素 $e \in R$ ，称为 R 的**恒元 (identity)**，使得：对于任意 $x \in R$ 都有 $ex = xe = x$ 成立，则称 R 为**具有恒元的环 (ring with identity)**。

定义 5.3 一个具有恒元的环 F 被称为一个**域 (field)**，如果对于任意除零外的元素 $x \in F$ 都有一个逆，即：对于任意非零的 $x \in F$ ，对应唯一的 $x^{-1} \in F$ ，称为 x 的逆，使得 $xx^{-1} = x^{-1}x = e$ 。

域中最重要的例子是实数域 $\mathbb{R}$ 和复数域 $\mathbb{C}$ 。

练习 5.2 所有整数的集合 $\mathbb{Z}$ 是一个

(a) 环?

(b) 域?

为什么?

练习 5.3 验证 $\mathbb{R}$ 上的光滑实函数的集合是一个具有恒元的环。

练习 5.4 确认 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 都是域。

代数结构下一级复杂性在于区分内部操作和外部操作。

定义 5.4 一个环 R 上的一个**模 (module)** M 是在加法下的一个 *Abel* 群 M ，并定义了**外部操作 (external operation)**，称为**标量乘法 (scalar multiplication)** $R \times M \rightarrow M$ ， $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ ，使得：对于任意 $\alpha, \beta \in R$ 和 $x, y \in M$ ，有

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y ,$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x ,$$

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) ,$$

如果 R 是一个具有恒元 e 的环，则对于任意 $x \in M$ 都有 $ex = x$ 。

一个线性向量空间是对于与模相关环有特殊要求的一个模。

定义 5.5 一个域 $\mathbb{F}$ 上的**线性向量空间 (linear vector space)** V 是一个环 $\mathbb{F}$ 上的一个模，其中 $\mathbb{F}$ 也是一个域。

$\mathbb{F}$ 上的一个向量空间 V 的元素被称为**向量 (vector)**， $\mathbb{F}$ 的元素被称为**标量 (scalar)**。如果 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ，则称 V 为一个**实向量空间 (real vector space)**。如果 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ，则称 V 为一个**复向量空间 (complex vector space)**。 $\mathbb{R}$ (对 $x \in \mathbb{R}$ 定义了标量乘法) 上的 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 是最熟悉的实向量空间的例子，其中向量加法和标量乘法 (基本向量算术) 有非常直观的几何解释。这些概念可以很容易地推广到 $\mathbb{R}^n$ (n 维实坐标空间) 和 $\mathbb{C}^n$ (n 维复坐标空间)，其中 n 是任意正整数。在 $\mathbb{C}$ 上的 $\mathbb{C}^n$ 的向量空间结构确定如下： $\mathbb{C}^n$ ， $n = 1, 2, \dots$ ，被定义为复数的所有 n 元组的集合。对于任意 $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ， $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ 和 $\alpha \in \mathbb{C}$ ，我们

定义

$$z + w \equiv (z_1 + w_1, \dots, z_n + w_n) \quad (\text{向量加法}),$$

$$\alpha z \equiv (\alpha z_1, \dots, \alpha z_n) \quad (\text{标量乘法}).$$

注意到零向量由下式给出：

$$0 \equiv \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \uparrow 0}.$$

相同的定义可以应用到 $\mathbb{R}^n$ ，其中 $\mathbb{C}$ 在上述定义中由 $\mathbb{R}$ 替代。

练习 5.5 考虑经典阻尼振子的运动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

其中， x 是振子偏离平衡位置的距离， ω_0 是振子的固有频率， γ 是阻尼系数。说明该方程的解集构成了一个 2 维复向量空间。

最后，我们来讨论一个代数的结构，这也是一种特殊的模，其中对模和与模相关的环（不仅仅是环，还有对于向量空间）都有特殊的限制。

定义 5.6 一个代数 A 是一个具有恒元的环 R 上的一个模，使得

- (1) A 本身是一个环，
- (2) 对于任意 $\alpha \in R$ 和 $x, y \in A$ ，标量乘积 $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ 满足

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

注意，上面的方程涉及两种乘法—— A 的元素之间的内部乘法（来自于 A 的环结构）和 R （与模 A 相关的环）中元素与 A 中元素的外部（标量）乘法。在上一章研究的 Lie 代数中，内部乘法由 Lie 括号（对易运算）[参考 (4.25)] 给出。因此对于矩阵群，Lie 代数（内部）乘法与普通矩阵乘法不同 [参考练习 4.5]。

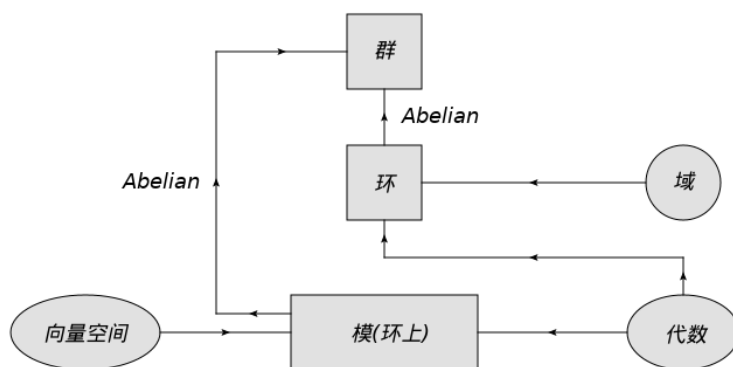


Figure 5.1

Figure 5.1 总结了本章中介绍的代数范畴之间的关系。矩形框表示具有给定结构的最一般的范畴，而椭圆框表示有限制的特殊情况。当垂直向下移动时，结构的复杂性增加。从一个范畴 A 到一个范畴 B 的箭头意思是 A 中的对象是一个包含 B 中对象结构的集合，但同时携带额外的结构。因此，环（在加法下）不仅是一个 Abel 群，还具有乘法结构等。

6. 基本群论概念

回忆定义 4.1，其给出了一个群的形式定义。

定义 6.1 一个群 G 的一个子集 H ($H \subset G$) 本身是具有和 G 相同乘法规则的一个群被称为 G 的子群 (*subgroup*)。

因此， $SO(n)$ 是 $O(n)$ 的一个子群，并且与 $SO(n+1)$ 的一个子群同构。特别地， $SO(2)$ 同构于 $O(3)$ 的一个 Abel 子群。注意，一个群 G 的一个子群 H 必须与 G 共用一个恒元。

任何群的元素都可以划分为不相交的共轭 (等价) 类 (*conjugacy (equivalence) classes*)。

定义 6.2 两个群元素 $g_1, g_2 \in G$ 被称为是相互共轭 (*conjugate*)，如果存在一个 $p \in G$ 使得 $g_2 = pg_1p^{-1}$ 。一个群中相互共轭的元素被称为组成一个共轭类 (*conjugacy class*)。

共轭关系是一个等价关系，因此一个群的共轭类必然是不相交的。回想一下，一个集合 S 中的一个等价关系 (*equivalence relation*) R 被定义为 $S \times S$ 的一个子集 R ，使得

- i) 对于任意的 $x \in S$ 都有 $(x, x) \in R$ (封闭性)；
- ii) 对于任意的 $x, y \in S$ ，都有 $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ (对称性)；
- iii) 对于任意的 $x, y, z \in S$ ，都有 $(x, y) \in R$ 和 $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ (传递性)。

我们通常将 $(x, y) \in R$ 记为 $x \sim y$ 。一个等价关系必然将一个集合划分为不相交的子集。

练习 6.1 直接从定义 6.2 验证上述论断。

从上面的定义可以直接得到两个事实：

- 1) 一个群的恒元总是构成一个单元素共轭类；
- 2) 对于一个 Abel 群，每个元素单独构成一个共轭类。

练习 6.2 验证上述两个事实。

练习 6.3 用 (1.41) 来验证所有 (关于任意轴) 相同角度的旋转在 $SO(3)$ 中属于相同共轭类。

定义 6.3 令 $H \subset G$ 是 G 的一个子群。通过下面的判定条件引入 G 中的一种等价关系：如果两个元素 $g_1, g_2 \in G$ 满足 $g_1^{-1}g_2 \in H$ ，则称 g_1, g_2 是 $\text{mod } H$ 等价 (be equivalent mod H)，记为 $g_1 \sim g_2 \pmod{H}$ 。由这种等价关系得到的 G 的不相交等价类被称为 H 的**左陪集 (left cosets)**。每个这样的等价类 (左陪集) 记为 gH ，其中 g 是 G 中的一些元素。类似地，我们可以定义 H 的**右陪集 (right cosets)**，通过等价关系：如果 $g_1g_2^{-1} \in H$ ，则有 $g_1 \sim g_2 \pmod{H}$ 。每个右陪集记为 Hg ，其中 g 是 G 中的一些元素。

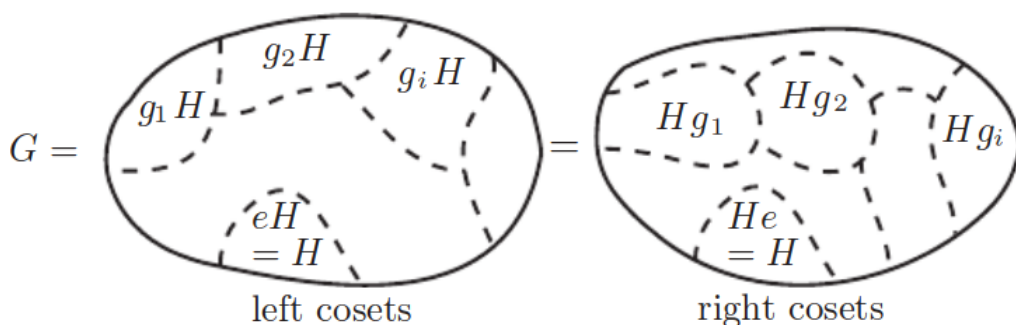


Figure 6.1

一些事情需要明确。给定一个子群 $H \subset G$ ，群 G 总能被划分成不相交的 H 的左陪集或者不相交的 H 的右陪集。然而一般来讲这两种划分区域并不是完全一样的 (见 Figure 6.1)。**‘左’** 和 **‘右’** 的名字正如记号 gH 和 Hg 表示的那样 (g 写在 H 的左边或右边) 来自于以下考虑：记号 gH (g 为 G 中的一个固定的元素) 对于一个特定的左陪集意味着这个陪集中所有的元素可以完全被表示成集合 $\{gh \mid h \in H\}$ ；类似地， $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ 。因此，假设 $h_1, h_2 \in H$ (G 的子群 H 的元素)，则有

$$(gh_1)^{-1}gh_2 = h_1^{-1}g^{-1}gh_2 = h_1^{-1}h_2 \in H$$

这也说明了 gh_1 和 gh_2 在同一个左陪集 gH 中。类似地，

$$h_1g(h_2g)^{-1} = h_1gg^{-1}h_2^{-1} = h_1h_2^{-1} \in H$$

说明了 h_1g 和 h_2g 在同一个右陪集 Hg 中。同样清楚的是，子群 $H \subset G$ 的两个左 (右) 陪集要么完全重合，要么没有共同的元素 (不相交)。实际上，令 g_1H 和 g_2H 是 H 的两个左陪集。对于一些 $h_1, h_2 \in H$ ，假设 $g_1h_1 = g_2h_2$ ，则有 $g_2^{-1}g_1 = h_2h_1^{-1} \in H$ 。因此 $g_2^{-1}g_1H = H$ ，这意味着 $g_1H = g_2H$ (两个左陪集 g_1H 和 g_2H 一致)。相同的考虑适用于右陪集的情况。

我们将一个群 G 的 (通过左右陪集) 划分示意性地表示为 Figure 6.1。

很明显，子群 H 是其本身的一个左、右陪集。(事实上，它可以写成 $H = eH = He$)。然而，除了 H 之外，左右陪集都不是 G 的子群 (简单来说因为它们都不包含恒元)。我们还注意到 H 的每一个 (左和右) 陪集的元素个数都与 H 的元素个数完全相同。

一种非常特殊且重要的情况出现了：当一个子群 $H \subset G$ 满足，对于任意 $g \in G$ ，有

$$gH = Hg . \quad (6.1)$$

等价地， $gHg^{-1} = H$ 。这样的子群称为 G 的一个**不变子群 (invariant group)**(或**正规子群 (normal group)**)。任何群都至少有两个平凡的不变子群： $H = \{e\}$ 和 $H = G$ 。同样清楚的是，一个 *Abel* 群的任何子群都是一个不变的子群。此外，如果 $H \subset G$ 是一个不变子群，则 G 通过 H 的左右陪集以完全相同的方式划分。然后，我们可以简单地参考通过一个不变子群生成的陪集。实际上，我们有下面的定理：

定理 6.1 令 $H \subset G$ 是 G 的一个不变子群，则 H 的不同陪集 $\{gH = Hg \mid g \in G\}$ 组成一个群，称为**商群 (quotient group) G/H** 。

证明：我们必须定义一个乘法规则，以便将不同的陪集相互相乘，并表明它满足定义 4.1 中给出的群的性质。

由于不同的陪集是不相交的，因此可以通过一个陪集中任何一个元素 g_1 来识别这个陪集，也称为一个**表示 (representative)**，并标记为 $[g_1]$ 。我们引入乘法规则：

$$[g_1][g_2] \equiv [g_1g_2] . \quad (6.2)$$

我们必须通过验证该定义是否独立于表示来检查该定义是否有意义。假设 $[g'_1] = [g_1]$ 和 $[g'_2] = [g_2]$ ，则根据定义 6.3， $g'_1 = g_1h_1$ 和 $g'_2 = g_2h_2$ ，其中 $h_1, h_2 \in H$ 。因此

$$\begin{aligned} [g'_1][g'_2] &= [g'_1g'_2] \quad [\text{通过 (6.2)}] \\ &= [g_1h_1g_2h_2] \\ &= [g_1g_2hh_2] \quad \text{对于一些 } h \in H \quad [\text{通过 (6.1)}] \\ &= [g_1g_2] \\ &= [g_1][g_2] , \end{aligned} \quad (6.3)$$

说明乘法 (6.2) 确实是定义良好的。 G/H 中的恒元是子群 (也是陪集) H 本身。因为，对于 $h \in H$ ， $g \in G$ ，存在 $h' \in H$ 使得

$$[h][g] = [hg] = [gh'] = [g][h'] = [g][h] = [g] . \quad (6.4)$$

乘法 (6.2) 的结合率是显而易见的。

练习 6.4 证明由 (6.2) 定义的商群 G/H 的乘法规则满足结合率。

最后， $[g]$ 的逆由下式给出

$$[g]^{-1} = [g^{-1}] . \quad (6.5)$$

这很容易检验，注意到

$$[g][g]^{-1} = [g][g^{-1}] = [gg^{-1}] = [g^{-1}][g] = [g]^{-1}[g] = [e] = [h] , \quad h \in H . \quad (6.6)$$

□

注意到, 对于一个 Abel 群 G 的一个子群 H , 我们一般将 $g_1 \sim g_2 \pmod{H}$ 或者 $[g_1] = [g_2]$ 表述成对于一些 $h \in H$ 有 $g_1 - g_2 = h$ 。[参考练习 5.1]

在这一点上, 让我们回顾一下群同态的概念 (定义 4.2)。我们有下面的重要定理:

定理 6.2 — 群同态定理 (The Group Homomorphism Theorem). 令 $f: G \rightarrow G'$ 是一个群的同态映射, K 是 f 的核 (*kernel*):

$$K = \ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = e' \text{ (} G' \text{ 中的恒元)}\},$$

并且 I 是 f 的像 (*image*):

$$I = \text{im}(f) = \{g' \in G' \mid \text{存在 } g \in G \text{ 使得 } f(g) = g'\}.$$

则有

- 1) K 是 G 的一个正规子群,
- 2) G/K 与 I 同态。

证明: 1) 令 $a, b \in K$, 则 $f(ab) = f(a)f(b) = e'e' = e'$, 因此 $ab \in K$ 。对于任意 $g \in G$ 有 $f(g) = f(ge) = f(g)f(e)$, 因此 $f(e) = e'$ 意味着 $e \in K$ 。此外, 如果 $a \in K$ 则有 $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} = (e')^{-1} = e'$; 因此, $a^{-1} \in K$ 。这证明了 K 是 G 的一个子群。为了说明 K 是一个正规子群, 我们考虑对于 $g \in G$, 集合 gKg^{-1} 。很明显对于 $k \in K$, 有

$$f(gkg^{-1}) = f(g)e'f(g^{-1}) = f(g)(f(g))^{-1} = e',$$

这意味着 $gkg^{-1} \in K$, 或者 $gKg^{-1} \subset K$ 。反过来, 任意 $k \in K$ 可以表述为 $g(g^{-1}kg)g^{-1} = gk'g^{-1}$, $k' \in K$, 这意味着 $K \subset gKg^{-1}$ 。因此, 对于任意的 $g \in G$, 有

$$gKg^{-1} = K.$$

这是 K 是 G 的正规子群的判定依据。

2) 定义映射 $\varphi: G/K \rightarrow I$ 如下

$$\varphi([g]) \equiv f(g), \quad g \in G, \quad (6.7)$$

其中, $[g] \in G/K$ 是陪集 $\{gk \mid k \in K\}$ 。我们有

$$\varphi([g_1][g_2]) = \varphi([g_1g_2]) = f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2) = \varphi([g_1])\varphi([g_2]). \quad (6.8)$$

由于 $I \subset G'$ 是 G' 的一个子群, φ 给出了一个群同态。现在如果 $\varphi([g_1]) = \varphi([g_2])$, 则通过 (6.7), 有 $f(g_1) = f(g_2)$, 并且因此 $f(g_1)f(g_2^{-1}) = f(g_1g_2^{-1}) = e'$ 。这意味着 $g_1g_2^{-1} \in K$, 或 $[g_1] = [g_2]$, 因此 φ 是一个单射 (一对一)。显然也是双射 (到上的), 因为对于任意 $g' \in I$, 存在一个 $g \in G$ 使得 $g' = f(g) = \varphi([g])$ 。由于是满射的, 因此群同态 φ 也是一个同构。 □

作为上述定理的一个例子, 考虑商群 $O(3)/SO(3)$ 。

练习 6.5 说明 $SO(3)$ 是 $O(3)$ 的一个正规子群。

在 $O(3)$ 和 $\mathbb{Z}_2$ (整数模 2 的加法群, 其可以通过集合 $\{1, -1\}$ 与通常的乘法实现) 之间存在着明显的同态。同态 $f: O(3) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ 可以简单地由下式给出 [c.f. (1.32)]:

$$f(a) = \det(a), \quad a \in O(3). \quad (6.9)$$

练习 6.6 说明上述方程确实定义了一个群同态。

由于在群 $\mathbb{Z}_2$ 中恒元是整数 1, 同态 f 的核由下式给出

$$\ker(f) = SO(3). \quad (6.10)$$

现在可以简单地看出

$$O(3)/SO(3) = \{SO(3), sSO(3)\}, \quad (6.11)$$

其中, $s \in O(3)$ 是空间反演

$$s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.12)$$

并且有 $\text{im}(f) = \mathbb{Z}_2$ (f 是双射)。因此, 定理 6.2 的同构 $\varphi: O(3)/SO(3) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ 因此由 (6.7) 给出为

$$\varphi(SO(3)) = 1, \quad (6.13a)$$

$$\varphi(sSO(3)) = -1. \quad (6.13b)$$

我们介绍两个更为重要的概念, 这些概念在群的分类中具有根本的重要性, 并且在 Lie 代数理论中有直接对应的概念。

定义 6.4 i) 除 $\{e\}$ 和它本身外没有任何其它不变 (正规) 子群的群称为**单纯群 (simple group)**。[比如: $SU(2)$ 是一个单纯群] ii) 除 $\{e\}$ 外没有任何其它 Abel 不变 (正规) 子群的群称为**半单纯群 (semisimple group)**。[比如 $SO(3), SO(4)$ 和 Lorentz 群 (Chapter 11 中讨论) 都是半单纯群]。

我们已经在 Chapter 4 中介绍了群表示论中的所有重要概念, 它的主要思想是考虑群元素在向量空间上的作用。这个概念可以推广到一个群在一个任何集合上的作用。设 G 是一个群而 M 是一个集合, G 在 M 上的一个**群作用 (group action)** 是一个映射 $\sigma: G \times M \rightarrow M$, $(g, x) \mapsto gx$, 其满足结合律

$$g_1(g_2x) = (g_1g_2)x, \quad (6.14)$$

和条件: 对于任意的 $x \in M$, 有

$$ex = x, \quad (6.15)$$

其中, e 是 G 的恒元。

在物理学应用中, 最常见的情况是当 M 是一个向量空间 (Euclid 空间, Minkowski 时空,

量子力学中 Hilbert 空间的各种子空间等)。当 G 是一个 Lie 群时, 经常见到的是 M 是一个可微流形, 在这种情况下, σ 也被要求是一个微分映射。(这是微分几何中最重要的情况)。显然, M 也可以是一个群。

练习 6.7 说明一个群对于它本身的左作用 (left action) 定义为

$$\sigma_L(g, g') = L_g g' = gg' \quad (6.16)$$

是一个群作用。如果右作用 (right action) 定义为

$$\sigma_R(g, g') = R_g g' = g'g \quad (6.17)$$

下面是群作用的重要概念。

定义 6.5 一个群作用 $\sigma: G \times M \rightarrow M$ 被称为是**有效的 (effective)**, 如果恒元 $e \in G$ 是平凡作用在 M 上的唯一元素, 即: 如果对于任意 $x \in M$, 有 $\sigma(g, x) = x$, 则 $g = e$ 。

定义 6.6 一个群作用 $\sigma: G \times M \rightarrow M$ 被称为是**自由 (free)** 的, 如果每个不是 G 恒元的元素 ($g \neq e$) 在 M 中没有**不动点 (fixed points)**, 即: 如果存在一个元素 $x \in M$, 使得 $\sigma(g, x) = x$, 则 $g = e$ 。

定义 6.7 一个群作用 $\sigma: G \times M \rightarrow M$ 被称为是**传递 (transitive)** 的, 如果对于任意 $x_1, x_2 \in M$, 存在一个 $g \in G$, 使得 $\sigma(g, x_1) = x_2$ 。

练习 6.8 $O(n)$ 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上的作用是有效的? 自由的? 传递的? [考虑 $O(3)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上作用的几何直观情况]。对于 $O(n)$ 作用在 S^{n-1} [($n-1$) 维球面] 回答相同的问题。

定义 6.8 给定一个群作用 $\sigma: G \times M \rightarrow M$, 一个元素 $x \in M$ 的**迷向群 (isotropy group)** (**稳定 (stabilizer)** 或**小群 (little group)**) 是 G 的子群, 定义为

$$H(x) = \{g \in G \mid \sigma(g, x) = x\} . \quad (6.18)$$

练习 6.9 说明上面定义的 $H(x)$ 是 G 的一个子群。

从定义 6.6 得到: 如果一个群作用是自由的, 则对于任意的 $x \in M$, 迷向群 $H(x) = \{e\}$ 。

练习 6.10 证明上面的表述。

再次考虑 $G = SO(3)$ 作用在 $\mathbb{R}^3$ 上和一个不动点 $x \in \mathbb{R}^3$ 。迷向子群 $H(x)$ 显然是关于 x 轴 (从原点指向 x 的向量) 旋转的群, 因此与 $SO(2)$ 同构。用 $SO(3)/SO(2)$ 表示左陪集空间 (以下考虑也可以用于右陪集空间)。由于 $SO(2)$ 是 $SO(3)$ 的一个子群, 而不是 $SO(3)$ 的一个不变 (正规) 子群, $SO(3)/SO(2)$ 并没有群的结构。然而这个陪集空间有流形结构 (见 Chapter 30), 实际上它同胚 (拓扑等价) 于 S^2 (2-球面)。为了看到这一点, 我们回忆定义 6.3, 两个元素 g 和 $g' \in SO(3)$ 属于相同的左陪集 (一个元素在 $SO(3)/SO(2)$ 中) 并提供了 $g' = gh$, 其中 $h \in H(x)$ 。显然, g 和 g' 对于 x 有相同的影响, 因为

$$g'x = ghx = gx . \quad (6.19)$$

令 x 为 $\mathbb{R}^3$ 中单位圆上的北极点 $(0, 0, 1)$, 并假设 $gx = y$, 它是单位圆上的另一个点 (见 Figure 6.2)。

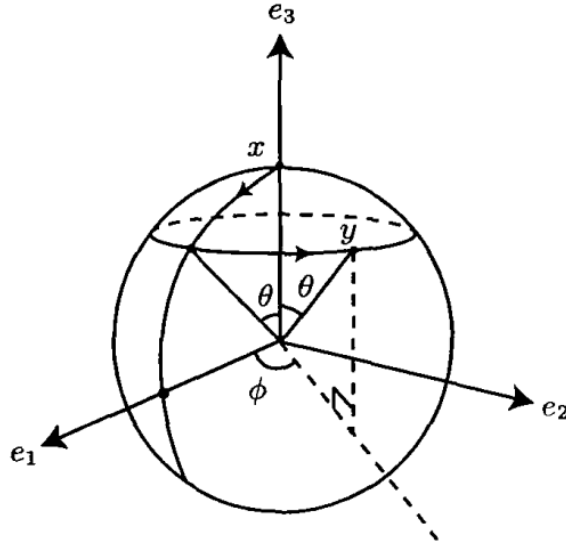


Figure 6.2

陪集 $[g]$ 则由从北极点到 y 点 $SO(3)$ 中的所有元素组成, 它们当然由极坐标 (θ, ϕ) 确定。因此, 单位圆上每一个点对应一个陪集, 并且我们有

$$SO(3)/SO(2) \sim S^2, \quad (6.20)$$

其中上方方程中的符号 ‘ $\sim$ ’ 是 ‘同胚于’ 的意思。下面对于任意正整数 n 的推广也是正确的 (但我们将省略证明):

$$O(n+1)/O(n) \sim SO(n+1)/SO(n) \sim S^n, \quad (6.21a)$$

$$U(n+1)/U(n) \sim SU(n+1)/SU(n) \sim S^{2n+1}, \quad (6.21b)$$

其中, S^n 是 n -球面; 并且 $U(n)$ 和 $SU(n)$ 分别是 $n \times n$ 么正矩阵和行列式为 $+1$ 的 $n \times n$ 么正矩阵。

一般来说, 陪集空间 G/H 允许一个可微分的结构 (见 Chapter 30) 并成为一个可微流形, 称为一个**均匀空间 (homogeneous space)**, 其中 G 是 Lie 群, H 是 G 的子群。

我们现在将表述并证明关于迷向子群的一个非常有用的事实:

引理 6.1 给定一个群作用 $\sigma: G \times M \rightarrow M$, $g \in G$ 和 $x \in M$, 在 x 和 gx 处的迷向子群由下式关联

$$H(gx) = gH(x)g^{-1}. \quad (6.22)$$

证明: 令 $g' \in H(gx)$ 。则 $g'gx = gx$, 并且有

$$g^{-1}g'gx = g^{-1}gx = x.$$

因此

$$g'' \equiv g^{-1}g'g \in H(x) ,$$

从而 $g' = gg''g^{-1}$, 这意味着

$$g' \in gH(x)g^{-1} .$$

因此

$$H(gx) \subset gH(x)g^{-1} . \quad (6.23)$$

反之, 令 $g'' \in H(x)$, 则有 $g''x = x$, 并且有

$$(gg''g^{-1})gx = gg''x = gx .$$

因此, $gg''g^{-1} \in H(gx)$, 因而

$$gH(x)g^{-1} \subset H(gx) . \quad (6.24)$$

方程 (6.23) 和 (6.24) 共同说明了引理。 $\square$

我们将用上述引理的一个有趣应用 (进行证明所谓的 Euler 定理) 来结束本章, 该定理在刚体的运动学中具有基本的重要性。

定理 6.3 — Euler 定理. 每一个旋转 $R \in SO(3)$ 都能写成一个乘积

$$R = R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi) , \quad (6.25)$$

其中, R_2 和 R_3 是分别关于 e_2 和 e_3 轴的旋转, 同时角度 ϕ, θ, ψ (被称为 **Euler 角 (Euler angles)**) 的取值范围 $0 \leq \phi, \psi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ 。

证明: 考虑 $\mathbb{R}^3$ 上的一个任意旋转 $R \in SO(3)$ 及它作用在点 $x = (0, 0, 1)$ (单位球面的北极点) 上。设 $Rx = y$, 其中 y 在单位球面上的点 (θ, ϕ) (见 Figure 6.2)。我们可以看到

$$Rx = R_3(\phi)R_2(\theta)x \equiv gx , \quad (6.26)$$

其中

$$g = R_3(\phi)R_2(\theta) \in SO(3) . \quad (6.27)$$

记

$$R = g'g , \quad \text{其中 } g' = Rg^{-1} \in SO(3) . \quad (6.28)$$

则 $g'(gx) = gx$, 并因此

$$g' \in H(gx) = H(Rx) ,$$

其中, $H(gx)$ 是 gx 的迷向子群, 或者在单位球面上通过 gx 点关于一个轴旋转群。通过引理 6.1, 存在一个关于 z 轴 e_3 的旋转 $R_3(\psi)$, 使得

$$g' = gR_3(\psi)g^{-1} .$$

通过 (6.28)

$$R = gR_3(\psi)g^{-1}g = gR_3(\psi) ,$$

并通过 (6.27), 有

$$R = R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi) . \quad (6.29)$$

□

Euler 定理中的旋转是关于空间中固定的轴。这些轴在物理学文献中被称为**空间固定轴 (space-fixed axes)**。在物理学中, 通常用与刚体一起移动的轴 (所谓的**物体固定轴 (body-fixed axes)** (或**移动标架 (moving frames)**)) 来表示刚体的任意旋转 R 是很方便的 (见 Chapter 31)。我们将建立下面的结论:

$$R = R_{3'}(\psi)R_{2'}(\theta)R_3(\phi), \quad \text{物体固定轴} , \quad (6.30)$$

其中旋转顺序涉及以下几组的物体固定轴 [Figure 6.3(a) 到 Figure 6.3(d)]:

$$(e_1, e_2, e_3) \xrightarrow{R_3(\phi)} (e'_1, e'_2, e_3) \xrightarrow{R_{2'}(\theta)} (e''_1, e'_2, e'_3) \xrightarrow{R_{3'}(\psi)} (e'''_1, e''_2, e'_3) .$$

在 Figure 6.3 中, 物体固定轴被画成了实线。

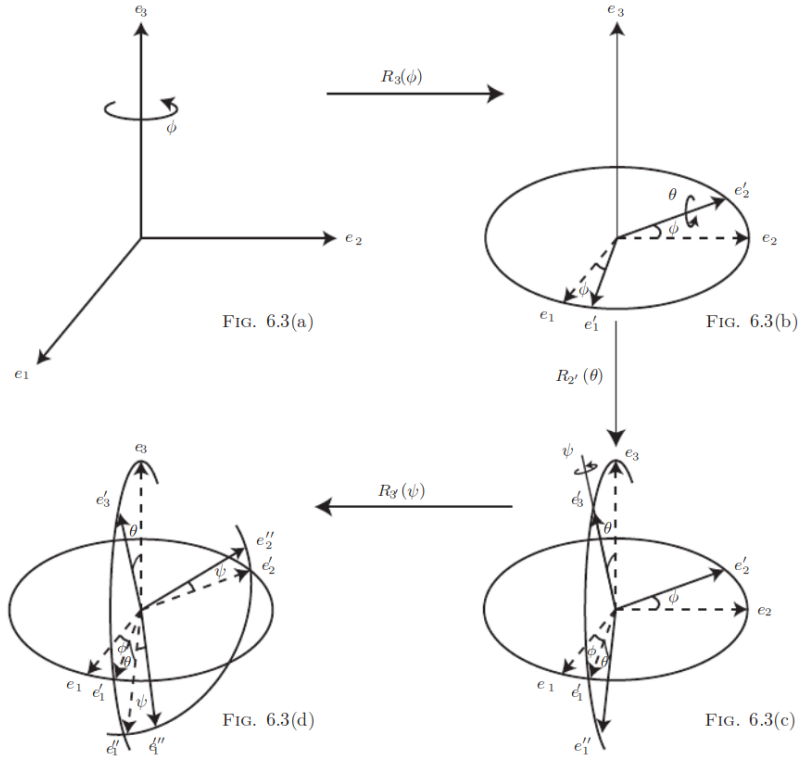


Figure 6.3

实际上, 运用引理 6.1, 有

$$R_{3'}(\psi) = R_{R_{2'}(\theta)e_3}(\psi) = R_{2'}(\theta)R_3(\psi)R_{2'}^{-1}(\theta) , \quad (6.31)$$

和

$$R_{2'}(\theta) = R_{R_3(\phi)e_2}(\theta) = R_3(\phi)R_2(\theta)R_3^{-1}(\phi) . \quad (6.32)$$

从 (6.31) 得到:

$$R_{3'}(\psi)R_{2'}(\theta)R_3(\phi) = R_{2'}(\theta)R_3(\psi)R_3(\phi) . \quad (6.33)$$

方程 (6.32) 则最终产生:

$$\begin{aligned} R_{3'}(\psi)R_{2'}(\theta)R_3(\phi) &= R_3(\phi)R_2(\theta)R_3^{-1}(\phi)R_3(\psi)R_3(\phi) \\ &= R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi) , \end{aligned} \quad (6.34)$$

在第二个等号处, 我们使用了 $R_3^{-1}(\phi)$ 和 $R_3(\psi)$ 可交换的事实, 因为它们是关于同一轴的旋转。注意到 (6.25) 和 (6.30) 中的旋转角度的顺序是彼此相反的。

7. 基本 Lie 代数概念

在 Chapter 4 中，我们介绍了 Lie 群的 Lie 代数作为装备了 Lie 括号 (对易算符) 作为内积的 Lie 群的无穷小生成元的线性空间。我们进一步介绍一个 Lie 代数的抽象定义 [见 (4.28) 的讨论]。在物理应用中，最重要的 Lie 代数是经典 Lie 代数，其对应于经典 (Lie) 群的 Lie 代数。它们通常都是实 Lie 代数，也就意味着它们也是实数域上的向量空间。我们也可以讨论复 Lie 代数 (在域 $\mathbb{C}$ 上)。

由于 Lie 群也是可微流形，因此存在微分几何方面的理论，我们将推迟到 Chapter 34。这里我们只关注代数方面。

对应于群概念中的子群，不变 (正规) 子群和商群，我们有 Lie 代数概念中的子代数，理想和商代数。群的单纯性和半单纯性的概念在 Lie 代数中也有直接对应的部分。

定义 7.1 一个 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的一个子集 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{G}$ 的 **Lie 子代数 (Lie subalgebra)**，如果 $\mathcal{S}$ 在 Lie 括号 (对易算符) 下封闭，即：如果对于任意的 $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$ ，都有 $[s_1, s_2] \in \mathcal{S}$ 。我们将这个简写为 $[\mathcal{S}, \mathcal{S}] \subset \mathcal{S}$ 。

定义 7.2 一个 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 是两个 Lie 代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的**直和 (direct sum)**，如果 $\mathcal{G}$ 作为一个向量空间是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的直和 (向量空间的直和) 并且如果 $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$ 。我们记做： $\mathcal{G} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ 。

练习 7.1 说明如果 $\mathcal{G} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ ，则 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 都是 $\mathcal{G}$ 的子代数。

定义 7.3 一个 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 是两个子代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的**半直和 (semi-direct sum)**，如果 $\mathcal{G}$ 作为一个向量空间是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的直和，并且如果 $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \subset \mathcal{A}$ 。我们记做 $\mathcal{G} = \mathcal{A} \oplus_{\mathcal{S}} \mathcal{B}$ 。

定义 7.4 一个 Lie 子代数 $\mathcal{S}$ 是一个 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的一个**理想 (ideal)** (或**不变子代数 (invariant subalgebra)**)，如果 $[\mathcal{S}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{S}$ ，即：对于任意的 $s \in \mathcal{S}$ 和 $g \in \mathcal{G}$ ，都有 $[s, g] \in \mathcal{S}$ 。显然，如果 $\mathcal{G} = \mathcal{A} \oplus_{\mathcal{S}} \mathcal{B}$ ，则 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个理想。

练习 7.2 在一个直和

$$\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_n$$

中, 说明每个 $\mathcal{A}_i, i = 1, \dots, n$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个理想。

定义 7.5 一个 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的**中心 (center)** 是唯一最大理想 $\mathcal{C}$, 使得 $[\mathcal{G}, \mathcal{C}] = 0$ 。

在群论中, 我们有子群生成的左右陪集空间和正规子群产生的商群 (见 Chapter 6)。在 Lie 代数中有类似的情况。假设 $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$ 是一个 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的一个 Lie 子代数。对于 $A \in \mathcal{G}$ 定义等价类 $[A]$: 对于任意的 $s \in \mathcal{S}$, 集合 $A + s$ 。因此, 如果两个元素 A 和 B 满足 $A - B = s \in \mathcal{S}$, 则两个元素 A 和 B 在相同的等价类中, 记做 $A = B \pmod{\mathcal{S}}$ 。这个类中任何 $A \in \mathcal{G}$ 称为 $[A]$ 的一个表示并且确定 $[A]$ 。这些等价类对应群论中的陪集; 但是左右之间没有区别, 因为代数中的加法是向量加法, 因此是可对易的。

练习 7.3 说明上面对于 $[A], A \in \mathcal{G}$ 的定义确实是一个等价关系。

假设我们试着在不同的等价类中定义一个 Lie 括号为

$$[[A], [B]] \equiv [[A, B]] . \quad (7.1)$$

为了使这个定义有意义, $[A, B]$ 必须确实是 (7.1) 等号右边的一个表示, 这意味着它必须通过一个元素 $s \in \mathcal{S}$ 与同一类中任何其它元素不同。现在, 对于 $s_1, s_2 \in \mathcal{S}$, 有

$$[A + s_1, B + s_2] = [A, B] + [s_1, B] + [A, s_2] + [s_1, s_2] , \quad (7.2)$$

当且仅当 $\mathcal{S}$ 是一个理想, 其等于 $[A, B] + s, s \in \mathcal{S}$ 。因此, 我们有:

定义 7.6 如果 $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$ 是 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的一个理想, 则 $\mathcal{G}$ 中的等价类定义为

$$[A] = [A + s] , \quad A \in \mathcal{G}, s \in \mathcal{S}, \quad (7.3)$$

组成了一个 Lie 代数称为**商代数 (quotient algebra)**, 记作 $\mathcal{G}/\mathcal{S}$ 。商代数的 Lie 括号由 (7.1) 给出。

练习 7.4 说明对于商代数, 向量加法

$$[A] + [B] = [A + B] \quad (7.4)$$

是良好定义的。

练习 7.5 令 G 是一个 Lie 群并且 $H \subset G$ 是 G 的一个正规子群。令 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{H}$ 是分别对应 G 和 H 的 Lie 代数。说明: $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一个理想。

一个 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的对易子的集合, 记作 $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, 很明显也是 $\mathcal{G}$ 的一个子代数。它实际上

也是 $\mathcal{G}$ 的一个理想, 因为, 对于任意的 $A, A_1, A_2 \in \mathcal{G}$, 有

$$[[A_1, A_2], A] = [A_3, A] \in [\mathcal{G}, \mathcal{G}], \quad (7.5)$$

其中, $A_3 = [A_1, A_2]$ 。我们写成

$$\mathcal{G}^{(1)} \equiv [\mathcal{G}, \mathcal{G}]. \quad (7.6)$$

类似地,

$$\mathcal{G}^{(2)} \equiv [\mathcal{G}^{(1)}, \mathcal{G}^{(1)}] \quad (7.7)$$

是 $\mathcal{G}^{(1)}$ 的一个理想, 并且通过归纳

$$\mathcal{G}^{(n+1)} \equiv [\mathcal{G}^{(n)}, \mathcal{G}^{(n)}] \quad (7.8)$$

是 $\mathcal{G}^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ 的一个理想, 其中 $\mathcal{G}^{(0)} \equiv \mathcal{G}$ 。

练习 7.6 通过归纳验证上面的表述。

定义 7.7 如果通过 (7.8) 给出的 $\mathcal{G}$ 的理想的序列终止于 0 ($\mathcal{G}$ 中的零向量), $\mathcal{G}$ 被称为是**可解的** (*solvable*)。

练习 7.7 $SO(3)$ Lie 代数是可解的么? 参考从 (4.36) 到 (4.38) 的方程。 $SO(n)$ Lie 代数是可解的么?

练习 7.8 说明所有的 $n \times n$ 上三角矩阵的集合

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 0 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

是一个可解 Lie 代数。

一个由 Lie 证明重要的定理表述为: 每个复可解矩阵代数都同构于三角矩阵的一个子代数 (见 D. H. Sattinger 和 O. L. Weaver 1986)。

在量子力学中具有基本重要性的 Heisenberg 代数 (在 Chapter 13 中介绍) 是可解 Lie 代数的一个例子。

比可解性更强的条件是幂零性。

定义 7.8 一个 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 被称为是**幂零的** (*nilpotent*), 如果嵌套序列

$$\mathcal{G}_{(n+1)} \equiv [\mathcal{G}, \mathcal{G}_{(n)}], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.9)$$

($\mathcal{G}_{(0)} \equiv \mathcal{G}$), 其中

$$\mathcal{G}_{(n+1)} \subset \mathcal{G}_{(n)} \subset \cdots \subset \mathcal{G}_{(1)} = \mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}_{(0)} = \mathcal{G}$$

终止于 0 ($\mathcal{G}$ 中的零向量)。

方程 (7.8) 和 (7.9) 意味着 $\mathcal{G}^{(n)} \subset \mathcal{G}_{(n)}$ 。因此, 幂零性意味着可解性。除了可解之外, 上面提到的 Heisenberg 代数也是幂零的。

定义 7.9 一个 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的根 (radical) $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{G}$ 的唯一最大可解理想。

一个 Lie 代数的根总是存在 (这里省略证明)。

定义 7.10 一个 Lie 代数称为单纯的 (simple), 如果除 $\{0\}$ 和它本身外不含理想。

定义 7.11 一个 Lie 代数称为半单纯的 (semisimple), 如果除 $\{0\}$ 外不含 Abel 理想。

和群的情况一样, 代数的单纯性意味着半单纯性。半单纯 Lie 代数的一个例子是 $\mathcal{SO}(3)$ 。

半单纯 Lie 代数在几何和物理学中扮演着一个基本角色。Cartan 已经给出了复半单纯 Lie 代数的一个完整分类 (见 Chapter 24)。除了 $\mathcal{GL}(n, \mathbb{C})$ 外, 所有经典群的 Lie 代数都是半单纯的。

可解性和半单纯性的概念将通过下面的 Lie 代数分类理论中的中心事实联系起来 (见 N. Jacobson 1962), 其将只表述而不证明。

定理 7.1 — Levi 分解定理 (Levi's Decomposition Theorem). 每一个 Lie 代数都是它的根和一个半单纯 Lie 代数的半直和。

作为 Levi 分解的一个例子, 考虑分别由 (4.4) 和 (4.22) 定义的六个算符 p_1, p_2, p_3 (线动量) 和 L^1, L^2, L^3 (角动量) 的集合。回想一下, p_j 作为 $\mathbb{R}^3$ 中平移的生成元, L^j 作为 $\mathbb{R}^3$ 中旋转的生成元。另外, 它们满足对易关系 (4.14) 和 (4.40), 并构成 Lie 代数 $\mathcal{T}(3)$ 和 $\mathcal{SO}(3)$ 的基础, Lie 代数分别对应于 $\mathcal{T}(3)$ ($\mathbb{R}^3$ 中平移 Abel 群) 和 $\mathcal{SO}(3)$ 。并不难说明: 使用 (4.12), (4.14), (4.22) 和 (4.40), 有

$$[p_j, L^k] = [L^j, p_k] = i\hbar \varepsilon_{jk}^l p_l, \quad (7.10)$$

其中, $\varepsilon_{jk}^l = \varepsilon_{jkl}$ 是由 (2.8) 给出的 Levi-Civita 张量。

练习 7.9 证明 (7.10)。

方程 (7.10), 以及对易关系 [(4.14) 和 (4.40)]:

$$[p_i, p_j] = 0 \quad (7.11)$$

$$[L^j, L^k] = i\hbar \varepsilon_l^{jk} L^l \quad (7.12)$$

确定一个六维 Lie 代数 $\mathcal{E}(3)$, $\mathbb{R}^3$ 中 Euclidean 运动的 Lie 代数。由于 (7.10) 和 (7.11), $\mathcal{T}(3)$ 是 $\mathcal{E}(3)$ 的根, $\mathcal{SO}(3)$ 是半单纯。因此

$$\mathcal{E}(3) = \mathcal{T}(3) \oplus_S \mathcal{SO}(3) \quad (7.13)$$

是 Levi 分解的一个例子。

和群的情况一样, 我们可以通过向量空间上的线性算符来表示 Lie 代数的元素。

定义 7.12 在向量空间 V 上的 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的表示是一个同态 $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}(V)$, 其中 $\mathcal{T}(V)$ 是 V 上的线性变换的代数。 f 是同态意味着它保持结构:

$$\begin{aligned} f(\alpha A + \beta B) &= \alpha f(A) + \beta f(B) \\ f[A, B] &= [f(A), f(B)] \end{aligned} \quad (7.14)$$

其中, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ (域和 $\mathcal{G}$ 有关), 并且 $A, B \in \mathcal{G}$ 。

由于 $\mathcal{G}$ 本身是一个向量空间, 我们可以通过运算符 $\mathcal{G}$ 来表示它。 $\mathcal{G}$ 本身的一个特别重要的表示是所谓的**伴随表示 (adjoint representation)**, $A \in \mathcal{G} \mapsto Ad_A$, 定义为

$$Ad_A(B) \equiv [A, B] \quad (7.15)$$

为了使这个定义有意义, 我们必须有

$$\begin{aligned} Ad_{\alpha A + \beta B} &= \alpha Ad_A + \beta Ad_B \\ Ad_{[A, B]} &= [Ad_A, Ad_B] \end{aligned} \quad (7.16)$$

第一个条件很明显; 第二个由 Jacobi 的恒元确保 (4.26)。

练习 7.10 验证方程 (7.16)。

使用 (1.16) 和 (4.29), 我们可以根据结构常数推导出 Lie 代数的伴随表示的矩阵表示。设 $(e_1, \dots, e_n)$ 是 $\mathcal{G}$ 的根。则有

$$Ad_{e_k}(e_i) = (Ad_{e_k})_i^j e_j = [e_k, e_i] = c_{ki}^j e_j \quad (7.17)$$

因此

$$(Ad_{e_k})_i^j = c_{ki}^j \quad (7.18)$$

如前所述, 对 Lie 代数的伴随表示有一个重要的微分几何解释, 我们将在 Chapter 34 中解释。

举个例子来讲, 考虑 $\mathcal{SO}(3)$ 的伴随表示。回顾对易关系 (4.36) 到 (4.38), 选择 $\mathcal{SO}(3)$ 给出的基

$$e_1 = J_3^2, \quad e_2 = J_1^3, \quad e_3 = J_2^1 \quad (7.19)$$

所以我们有

$$[e_i, e_j] = \varepsilon_{ij}^k e_k \quad (7.20)$$

因此, 以 (7.19) 为基的 $\mathcal{SO}(3)$ 的结构常数由下式给出

$$c_{ij}^k = \varepsilon_{ij}^k \quad (7.21)$$

这正是 $\mathbb{R}^3$ 中普通向量 (交叉) 乘积的代数 [参见练习 4.7]。此外, 从 (7.18)

$$Ad_{e_i}(e_j) = \varepsilon_{ij}^k e_k \quad (7.22)$$

因此, 当 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 被认为是 $\mathbb{R}^3$ Lie 代数 (定义了叉积) 中的向量时, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 可以被解释为 $\mathbf{A}$ 的伴随表示作用在 $\mathbf{B}$ 上。

对于 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的给定的表示 $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}(V)$, $\mathcal{T}(V)$ 中的 f 的图像是表示空间 V 上的线性算符, 其内部加法和乘法是显式定义的。 $im(f) \subset \mathcal{T}(V)$ 中元素的求和和乘积, 以及常见的分配律和结合律, 形成代数, 称为 $\mathcal{G}$ 关于表示 f 的**包络代数 (enveloping algebra)**, 记做 $\mathcal{A}_f(\mathcal{G})$ 。

再次考虑 $SO(3)$ 。稍微滥用符号, 让我们写一个真实表示:

$$L_x = f(L^1), \quad L_y = f(L^2), \quad L_z = f(L^3)$$

总角动量的平方

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{7.23}$$

是包络代数的一个元素, 实际上位于这个代数的中心 (与代数的所有元素对易)。它等于 $C/2$, 其中 C 称为 **Casimir 算符 (Casimir operator)** 的表示 $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}(V)$, 在量子力学中的角动量理论中具有重要意义。在引入 $\mathcal{G}$ 中特定度量的概念 (称为 Killing 形式) 之后, 我们将在 Chapter 8 中更详细地考虑 Casimir 算符。

8. 内积、度规和对偶空间

在三维 Euclidean 向量的基本向量代数中，我们学到两个分量分别为 A^i 和 B^i 的向量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的标量积 (或内积) 被定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_i A^i B^i \quad (8.1)$$

运用 Einstein 求和约定，我们可以写成

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \delta_{ij} A^i B^j = A^i B_i = A_j B^j \quad (8.2)$$

上面的方程可能只是符号区别。但是实际上 (8.1) 隐藏了几个重要的数学概念，这些概念可以由 (8.2) 表示。

首先是给定向量空间的对偶空间概念。然后是度规的概念，其用于测量向量空间中的点之间的距离以及用于测量相同空间中的向量之间的角度的规则。最后，度规给出了向量空间中的对象与对偶空间中的对象之间的一一对应关系。该对应关系是通过对所谓的度规张量及其逆进行升降指标的过程获得。

(8.2) 中的 Kronecker delta 是度规张量的一个非常特殊情况，在更一般的情况下 (例如: **Riemann 流形 (Riemannian manifold)**) 中，是 $(0,2)$ -型张量场 $g_{ij}(x)$ ，取决于底流形中的位置 x 。恒定张量场的 $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ 的情况被称为 **Euclidean 度规 (Euclidean metric)**。当 g_{ij} 是一个常数时，度规被称为**平直 (flat)**。物理学中平直但非 Euclidean 度规的一个非常

重要的例子是狭义相对论中的 Minkowski 度规 $\eta_{\mu\nu}$ [已经在 (2.20) 中遇到]:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

其中 $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; “0” 分量是时间分量; 同时 “1”, “2”, “3” 分量是空间分量。则具有 (x^0, x^1, x^2, x^3) 分量的 4 维时空向量的长度平方是

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad (8.4)$$

其中, c (光速) 已经被规定为 1。当 $g_{ij}(x)$ 取决于时空点 x 时, 存在曲率, 我们处于广义相对论的范畴。注意, Minkowski 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 不是**正定的 (positive definite)**, 因为 (8.4) 的等式右边可以是正数, 零或负数。在物理术语中, 根据 $\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$ 是正, 零还是负, 4-向量可以分别称为**类空 (space-like)**, **类光 (light-like)** 或**类时 (time-like)**。

在一般规定中, 我们在每个点 $x \in M$ 处有一个**可微流形 (differentiable manifold)** M , 其中存在一个称为**切空间 (tangent space)** 的向量空间。(我们无法在这里给出这些术语的确切含义; 读者将在 Chapter 30 中找到更详细的讨论)。所有切空间的集合 (M 中每个点一个) 称为 M 上的**切丛 (tangent bundle)** TM (见 Figure 8.1)。

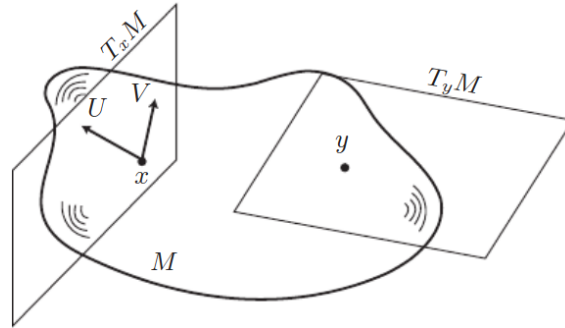


Figure 8.1

在 Figure 8.1 中, U, V 是 $T_x M$ 中的向量, $x \in M$ 处的切空间。 M 上的**向量场 (vector field)** 是 M 的每个点处的向量的连续分布。如前所述, 数学上, M 上的向量场被称为切丛 TM 的一个**截面 (section)**。

让我们将注意力集中在特定的切空间 $T_x M$ 上。向量 $U \in T_x M$ 的长度平方由 [归纳 (8.2)] 给出

$$\|U\|^2 = g_{ij}(x) U^i U^j \quad (8.5)$$

两个向量 $U, V \in T_x M$ 的**内积 (inner product)** 由下式给出

$$G(U, V) = g_{ij}(x) U^i V^j \quad (8.6)$$

度规张量 G 在 x 点被称为**非退化 (non-degenerate)**, 如果满足 $U \in T_x M$ 和

$$G(U, V) = 0 \quad (8.7)$$

对于任意 $V \in T_x M$, $U = 0$ 必为真。我们只能使用非退化和**对称 (symmetric)** ($g_{ij} = g_{ji}$) 度规张量。上述非退化条件直接说明了 n 元代数方程组

$$g_{ij}U^i = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (8.8)$$

其中, n 是流形 M 的维数, 因此是 M 上任何切空间的维度, 只有零解 ($U^i = 0$ 表示对于任意 i)。这反过来说明 (将在 Chapter 16 看到)

$$\det(g_{ij}) \neq 0 \quad (8.9)$$

事实上, $\det(g_{ij}) \neq 0$ 是 G 为非退化的充分必要条件。用 U_i 分量定义协变向量 (covariant vector)[一个 $(0, 1)$ -型张量]

$$U_i = g_{ij}U^j \quad (8.10)$$

U_i 是在不同空间中的向量, 称为切空间 $T_x M$ 的**对偶空间 (dual space)**, 或 $x \in M$ 处的**余切空间 (cotangent space)**, 用 $T_x^* M$ 表示。从上面的讨论中, G 的非退化说明 $\det(g_{ij}) \neq 0$, 这意味着由 G 确定的从 $T_x M$ 到 $T_x^* M$ 的线性变换必须是可逆的 (见定理 16. 5)。由 g^{ij} 表示的逆变换因此存在, 并且我们有

$$U^i = g^{ij}U_j \quad (8.11)$$

$$g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i \quad (8.12)$$

因此, 度规张量 g_{ij} 在切空间与其对应的余切空间之间建立了一一对应的映射。这是通过**降低指标 (lowering indices)**(从切空间的余切空间) 和**升高指标 (raising indices)**(从余切空间到切空间) 来实现的。

因此, 一个形式为 $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$ (具有 r 个上指标和 s 个下指标) 的 (r, s) -型张量是一个在如下的张量空间中的对象

$$\underbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}_{r\text{次}} \otimes \underbrace{T_x^* M \otimes \dots \otimes T_x^* M}_{s\text{次}}$$

其中, $\otimes$ 表示**张量积 (tensor product)**。这些张量空间的连接, 每个点 $x \in M$, 称为**张量丛 (tensor bundle)**。可以作用于 (r, s) -型张量场, 它们对应于张量丛上的截面。总而言之, 度规 G (当它是正定时也称为 **Riemann 度规 (Riemannian metric)**) 是对称的非退化 $(0, 2)$ -型张量场。 $(0, 2)$ -型张量场也称为**秩 -2 协变张量场 (rank-two covariant tensor field)**。如果一个对称非退化度规不是正定的, 则称为**伪 Riemann 流形 (pseudo-Riemannian manifold)**。例如, (8.3) 的 Minkowski 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 不是正定的。

以上关于对偶空间的讨论是在几何语言中进行以便直观。我们现在将对双空间概念进行更抽象 (和更一般) 的代数表示。可以发现在量子力学的数学形式中非常有用。

设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间 (通常在物理应用中是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$)。

定义 8.1 在域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间 V 上的所有 $\mathbb{F}$ -值线性函数的集合称为 V 的对偶空间, 由 V^* 表示。

回想一下线性函数只是线性映射的一种特殊情况 $f: V \rightarrow W$ (由 Definition 1.1 定义) 其中 W 是域 $\mathbb{F}$ 。关于 V^* 的第一个重要事实是 V 的对偶, 即: 如果 $\dim(V) = n$, 则 $\dim(V^*) = n$ 。证明非常简单和有用, 我们将其呈现如下。假设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组基。然后可以将任意向量 $v \in V$ 表示为

$$v = v^i e_i \quad (8.13)$$

令 $f \in V^*$, 即: f 是 V 上的线性函数。然后线性意味着

$$f(v) = f(v^i e_i) = v^i f(e_i) \quad (8.14)$$

因此, 任何 f 完全由其在 V 的基 $\{e_i\}$ 上的值确定。现在选择 V^* 中 n 个线性函数 $e^{*i}, i = 1, \dots, n$ 使得

$$e^{*i}(e_j) = \delta_j^i, \quad 1 \leq j \leq n \quad (8.15)$$

则

$$e^{*i}(v) = e^{*i}(v^j e_j) = v^j e^{*i}(e_j) = v^j \delta_j^i = v^i \quad (8.16)$$

实际上, e^{*i} 作用于任意 $v \in V$ 选出 v 的第 i 个分量。然后, 从 (8.14)

$$f(v) = v^i f(e_i) = f(e_i) e^{*i}(v) \quad (8.17)$$

定义

$$f_i \equiv f(e_i) \in \mathbb{F} \quad (8.18)$$

当 $\mathbb{F}$ 是数域时, 这些是数字。所以

$$f(v) = f_i e^{*i}(v) \quad (8.19)$$

对于任意 $v \in V$, 和

$$f = f_i e^{*i} \quad (8.20)$$

换句话说, 任意的 $f \in V^*$ 可以表示为在 V^* 中向量 $e^{*i}, i = 1, \dots, n$ 的线性组合。我们将通过显示它们作为 V^* 中的向量线性无关来说明 $\{e^{*i}\}$ 是 V^* 的一组基。假设

$$f = f_1 e^{*1} + \dots + f_n e^{*n} = 0 \quad (8.21)$$

也就是说, f 是 V^* 中的零函数。因此对于任意 $v \in V$, 因此 $f(v) = 0$ 。重申这一事实, 我们在使用 (8.16)

$$f_1 v^1 + f_2 v^2 + \dots + f_n v^n = 0 \quad (\text{数字零}) \quad (8.22)$$

对于任意 n -tuple $\{v^1, \dots, v^n\} \in \mathbb{F}^n$ 。这必然意味着 $f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0$, 建立 $\{e^{*i}\}$ 的线性无关性。由于基 $\{e^{*i}\}, i = 1, \dots, n$, 具有 n 个元素, V^* 是 n 维的。这样就完成了证明。

由 (8.15) 定义的 V^* 的基 $\{e^{*i}\}$ 被称为 $\{e_i\}$ 的**对偶基 (dual basis)**。根据 (8.16), 它们

实际上是关于 V 的基 $\{e^*\}$ 的**坐标函数 (coordinate functions)**。由于 V 和 V^* 具有与向量空间相同的维度，它们必然是彼此**同构 (isomorphic)** 的 (一对一)。我们可以定义 $v \in V$ 和 $v^* \in V^*$ 之间的**配对 (pairing)**

$$\langle v, v^* \rangle = v^*(v) \quad (8.23)$$

写 $v^*(v)$ 的括号方式，如上面等式左边所示，表明 $v \in V$ 也可视为 V^* 的线性函数。事实上，对应于在 V^* 任何线性函数 $\varphi(\varphi: V^* \rightarrow \mathbb{F})$ ，存在有一个 $v \in V$ 使得：对于任意的 $v^* \in V^*$ ，有

$$\langle v, v^* \rangle = \varphi(v^*) \quad (8.24)$$

因此

$$(V^*)^* = V \quad (8.25)$$

练习 8.1 对于在 V^* 上给定的函数 φ 和 V 上选择的一组基 $\{e_i\}$ ，用 e_i 说明 $v \in V$ 满足 (8.24)。

通过上面的抽象设定，可以在 V 上定义非退化，对称的内积：

$$\text{对于任意 } v_1, v_2 \in V, \quad (v_1, v_2) = (v_2, v_1) \in \mathbb{F} \quad (8.26a)$$

如果对于任意的 $v_2 \in V$ ，有 $(v_1, v_2) = 0$ ，则 $v_1 = 0$ 。这个内积是从 $V \otimes V$ 到 $\mathbb{F}$ 的双线性映射，在下面提供 V 和 V^* 之间的同构办法。对于特定的 $v \in V$ ，存在唯一的 $v^* \in V^*$ 使得：对于任意的 $u \in V$ ，有

$$(u, v) = \langle u, v^* \rangle \quad (8.26b)$$

相反，对于特定的 $v^* \in V^*$ ，存在唯一的 $v \in V$ ，使得 (8.26b) 成立。上述表述的证明并不困难，但我们不会在此展示。实际上在 Chapter 12 中，我们将会展示该定理的无限维情况下的证明，称为 Riesz 定理。

在量子力学中，使用**复向量空间 (complex vector spaces)**(通常是无限维的称为 **Hilbert 空间 (Hilbert spaces)**)，其中域 $\mathbb{F}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 而不是实数域，对称性 (8.26a) 需要被替换为**共轭 (hermitian) 对称性 (conjugate (hermitian) symmetry)**：

$$(v_1, v_2) = \overline{(v_2, v_1)} \quad (8.27)$$

并且双线性性质替换为**共轭双线性 (conjugate-bilinear)** 性质：对于任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ，有

$$(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, v) = \alpha_1 (v_1, v) + \alpha_2 (v_2, v) \quad (8.28a)$$

$$(v, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \overline{\alpha_1} (v, v_1) + \overline{\alpha_2} (v, v_2) \quad (8.28b)$$

在上述三个等式中，上划线表示复共轭。在物理学文献中，几乎普遍使用 **Dirac 括号 (Dirac bracket)** 符号，其中写作 $\langle | \rangle$ 而不是小括号并且 $(,)$ 中的条目的顺序颠倒。因此

$$(v_1, v_2) = \langle v_2 | v_1 \rangle \quad (8.29)$$

上述方程 (8.28b) 实际上是 (8.27) 和 (8.28a) 的结果。我们将在 Chapter 12 讨论 Dirac 符号的实用性。

具有内积并且满足 (8.27) 和 (8.28) 的复矢量空间称为酉空间 (unitray space)。对于酉空间 V , 由 (8.26b) 给出的内积 $(\cdot, \cdot)$ 得到的共轭同构 (conjugate isomorphism) $G: V \rightarrow V^*$ 满足以下条件。如果, 在 G 下, 我们有

$$v \mapsto v^* \quad (8.30)$$

则

$$\alpha v \mapsto \bar{\alpha} v^* \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (8.31)$$

这是 (8.28b) 所要求的。

练习 8.2 验证上述条件。

一旦在 $V \times V$ 上定义内 (标量) 积, 对应的共轭同构 $G: V \rightarrow V^*$ 得到在 V^* 中标量积满足

$$(v_1^*, v_2^*) = (v_2, v_1) = \overline{(v_1, v_2)} \quad (8.32)$$

练习 8.3 说服自己下面规则

$$(v_1^*, v_2^*) = (v_1, v_2)$$

如果不满足 (8.28a) 和 (8.31), 它将无法成立。

注意到, 由于对于任意 $\alpha \in \mathbb{R}$, 则 $\bar{\alpha} = \alpha$, 因此酉空间 [(8.27), (8.28), (8.31) 和 (8.32)] 中内积的规则也将自动保留在实向量空间中的内积。

现在让我们重新检查方程 (8.10), (8.11) 和 (8.12)。考虑 $V = T_x M$ 和 $V^* = T_x^* M$ 。为 $T_x M$ 选择一组基 $\{e_i\}$, 并将 $U \in T_x M$ 写为

$$U = U^i e_i \quad (8.33)$$

则由 $g_{ij}(x)$ 给出的度规张量 G 给出内积

$$(U, V) = G(U, V) = g_{ij} U^i V^j \quad (8.34)$$

得到同构 $G: T_x M \rightarrow T_x^* M$ 则由下式给出

$$U^i e_i \mapsto g_{ij} U^j e^{*i} = U_i e^{*i} \quad (8.35)$$

其中, $\{e^{*i}\}$ 是 $\{e_i\}$ 的对偶基。反过来

$$U_i e^{*i} \mapsto g^{ij} U_j e_i = U^i e_i \quad (8.36)$$

方程 (8.36) 只是 (8.35) 的逆映射。后一个等式是有效的, 因为由 (8.26)

$$\begin{aligned}\langle U, V^* \rangle &= \langle U^i e_i, V_j e^{*j} \rangle = \langle U^i e_i, g_{jk} V^k e^{*j} \rangle = g_{jk} U^i V^k \langle e_i, e^{*j} \rangle \\ &= g_{jk} U^i V^k \delta_i^j = g_{ik} U^i V^k = (U, V)\end{aligned}\quad (8.37)$$

为了总结本章, 我们引入了一个关于 Lie 代数 $\mathcal{G}$ (考虑成向量空间) 的重要度规, 称为 $\mathcal{G}$ 上的 Killing 形式。这种形式由 $\mathcal{G}$ 的伴随表示引入 (见 Chapter 7)。

定义 8.2 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的 **Killing 形式 (Killing form)** 是在 $\mathcal{G}$ 上的对称双线性形式由下式给出

$$K(A, B) \equiv \text{Tr}(Ad_A Ad_B) \quad (8.38)$$

其中, $A, B \in \mathcal{G}$ 和 Tr 代表迹。

在上面的定义中, Ad_A, Ad_B 是 $\mathcal{G}$ 上的线性算符。因此, 乘积 $Ad_A Ad_B$ 也是 $\mathcal{G}$ 上的线性算符, 其迹由算符的一些矩阵表示的迹给出。在 Chapter 17 [定理 17.2 和方程 (17.33)] 我们将看到线性算符的迹与矩阵表示独立。

对于 $\mathcal{G}$ 的基 $\{e_i\}$ 的选择, $\mathcal{G}$ 的度规张量由下式给出 [参考 (8.6)]

$$g_{ij} = K(e_i, e_j) \quad (8.39)$$

对于结构常数而言, 我们从 (7.18) 可以看出

$$g_{ij} = \text{Tr}(Ad_{e_i} Ad_{e_j}) = (Ad_{e_i})_k^l (Ad_{e_j})_l^k = c_{ik}^l c_{jl}^k \quad (8.40)$$

练习 8.4 说明 $\mathcal{SO}(3)$ 的度规张量是

$$g_{ij} = -2\delta_{ij} \quad (8.41)$$

其中, δ_{ij} 是 Kronecker delta。[使用 (2.13)]

根据上述结果, $\mathcal{SO}(3)$ 的度规张量是负定的。这是 $\mathcal{SO}(3)$ 及其对应的 Lie 群 $SO(3)$ 的重要性质。事实上, 我们有下面的有用的定理 (没有证明)。

定理 8.1 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 生成紧致 Lie 群, 当且仅当它的 Killing 形式为负定。负定性意味着: 对于任意 $A = A^i e_i, B = B^i e_i \in \mathcal{G}$, 则

$$g_{ij} A^i B^j < 0 \quad (8.42)$$

其中, $\{e_i\}$ 是 $\mathcal{G}$ 的基。

练习 8.5 说明 Killing 形式满足

$$K([A, B], C) = K([B, C], A) = K([C, A], B) = -K([B, A], C) \quad (8.43)$$

Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的 Killing 形式提供了关于 $\mathcal{G}$ 的结构的基本信息。这通过以下基本定理 (没有证明) 称为 Cartan 标准来举例说明。

定理 8.2 — Cartan 第一标准 (Cartan's first Criterion). 当且仅当 Killing 形式是非退化的: $\det(g_{ij}) \neq 0$, Lie 代数是半单纯的。

定理 8.3 — Cartan 第二标准 (Cartan's second Criterion). 当且仅当对于任意 $A \in \mathcal{G}$ 和 $B \in \mathcal{G}^{(1)}$ 都有 $K(A, B) = 0$ 时, Lie 代数是可解的。[参考 (7.6)]

对于半单纯李代数, $\det(g_{ij}) \neq 0$ 。因此逆 g^{ij} 存在, 我们可以定义伴随表示的 **Casimir 算符 (Casimir operator)**

$$C \equiv g^{ij} Ad_{e_i} Ad_{e_j} \quad (8.44)$$

其中, $\{e_i\}$ 是 $\mathcal{G}$ 的基。它是包络代数 $\mathcal{A}_{Ad}(\mathcal{G})$ 的一个元素 [参考 Chapter 7]。我们必须检查上面的定义是否独立于 $\mathcal{G}$ 基的选择。的确, 引入基 $e_i = a_i^j e'_j$ 的变化, 使得 $e'_i = (a^{-1})_i^j e_j$ (参考 Table 1.1)。然后, 通过 (2.1) 和 (7.15): 对于任意基向量 e_p 有

$$\begin{aligned} & (g')^{ij} Ad_{e'_i} Ad_{e'_j} (e_p) \\ &= a_i^l a_j^k g^{lk} [e'_l, [e'_j, e_p]] \\ &= g^{lk} a_l^i (a^{-1})_i^m a_k^j (a^{-1})_j^n [e_m, [e_n, e_p]] \\ &= g^{lk} \delta_l^m \delta_k^n [e_m, [e_n, e_p]] \\ &= g^{lk} [e_l, [e_k, e_p]] \\ &= g^{lk} Ad_{e_l} Ad_{e_k} (e_p) \end{aligned} \quad (8.45)$$

关于基的选择的定义 (8.44) 的独立性遵循线性。

让我们记

$$E_i \equiv Ad_{e_i} \quad (8.46)$$

则 E_i 协变变换, 并可以将 Casimir 算符写成

$$C = g^{ij} E_i E_j = E^j E_j \quad (8.47)$$

其中

$$E^i = g^{ij} E_j \quad (8.48)$$

最终我们得到了

定理 8.4 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的伴随表示的 Casimir 算符 C 位于包络代数 $\mathcal{A}_{Ad}(\mathcal{G})$ 的中心, 也就是说, 它与 $\mathcal{A}_{Ad}(\mathcal{G})$ 中的每个元素对易。

证明: 足以说明: 对于任意的 $\mathcal{G}$ 的基 e_k , C 和 $Ad_{e_k} = E_k$ 对易。我们有

$$\begin{aligned} [C, E_k] &= g^{ij} [E_i E_j, E_k] = g^{ij} \{E_i, [E_j, E_k] + [E_i, E_k] E_j\} \\ &= g^{ij} \{c_{jk}^l E_i E_l + c_{ik}^l E_l E_j\} = g^{ij} c_{jk}^l E_i E_l + g^{ji} c_{jk}^l E_l E_i = g^{ij} c_{jk}^l (E_i E_l + E_l E_i) \\ &= g^{ij} g^{lm} c_{mjk} (E_i E_l + E_l E_i) = -g^{ij} g^{lm} c_{jmk} (E_l E_i + E_i E_l) = -[C, E_k] \end{aligned} \quad (8.49)$$

因此正如预期那样, $[C, E_k] = 0$ 。在 (8.49) 的第 5 个等式中, 我们使用了 g^{ij} 是对称的事实;

在第 6 个等式中，我们通过下式定义了 $(0, 3)$ -张量 c_{ijk}

$$c_{ijk} = g_{il}c_{jk}^l \quad (8.50)$$

而在第 7 个等式中，我们使用了 c_{ijk} 是完全反对称的事实。最后一个事实可以看作如下。从结构常数的定义 [(4.29)] 可以看出

$$c_{jk}^l = -c_{kj}^l \quad (8.51)$$

则从 (8.50) 开始

$$c_{ijk} = -c_{ikj} \quad (8.52)$$

运用 (8.50) 和 (8.40)，我们有

$$c_{ijk} = c_{in}^m c_{lm}^n c_{jk}^l = -c_{in}^m c_{lk}^n c_{mj}^l - c_{in}^m c_{lj}^n c_{km}^l = c_{in}^m c_{jl}^n c_{km}^l + c_{ni}^m c_{mj}^l c_{lk}^n \quad (8.53)$$

在第二个等式中，我们运用 Jacobi 的恒元的结构常数 [(4.32)]，在第三个等式中我们运用了 (8.51)。因此

$$c_{jik} = c_{jn}^m c_{il}^n c_{km}^l + c_{nj}^m c_{mi}^l c_{lk}^n = -c_{im}^l c_{jn}^m c_{kl}^n - c_{li}^n c_{nj}^m c_{mk}^l = -c_{ijk} \quad (8.54)$$

类似地，

$$c_{ijk} = -c_{kji} \quad (8.55)$$

□

注意，即使技术上 Casimir 算符仅定义为半单纯李代数，也可能存在非半单纯代数的包络代数中的元素，它与代数的所有生成元 (基向量) 对易。例如，在 $\mathcal{E}(3)$ 中，Euclidean 运动的六维 Lie 代数 [(7.13)] 就是这种情况。 $\mathcal{T}(3)$ 不是半单纯的，因为它包含了 Abel 理想 $\mathcal{T}(3)$ (三维平移的代数)[参考：对易关系 (7.10) 至 (7.12)]。但是可以轻易地验证

$$p^2 \equiv p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \quad (8.56)$$

和

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{L} \equiv p_1 L^1 + p_2 L^2 + p_3 L^3 \quad (8.57)$$

(略微滥用符号) 与所有 p_i 和 L^i 对易。这些有时也称为 Casimir 算符。

9. $SO(4)$ 和氢原子

氢原子问题传统上是为了处理 Schrödinger 波动方程 (二阶偏微分方程) 问题。但它也提供了运用群论方法的一个很好的例子, 尤其是运用 Chapter 4 和 Chapter 7 中的 Lie 代数理论的基本思想。我们将看到氢原子的量子化能级 (具有它们的简并度) 的光谱是基于旋转对称的结果和电子 Hamilton 量的附加对称性——有时称为**动力学对称性 (dynamical symmetry)**。

我们将考虑所谓的 **Kepler 问题 (Kepler problem)**, 其中 Hamilton 量仅包括电子和原子核之间的 Coulomb 相互作用。这个 Hamilton 量由下式给出

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \quad (9.1)$$

$$p_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (9.2)$$

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \quad (9.3)$$

其中, m 是电子的约化质量, e 是电子电荷的大小, Z 是核的电荷数。

经典 Kepler 问题的优雅解决方案如下: Hamilton 运动方程 (见 Chapter 44)

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (9.4)$$

其中, q^i 和 p_i 分别是正则坐标和动量, 得到 [由 (9.1) 给出的 H]

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{Ze^2\mathbf{r}}{r^3} \quad (9.5)$$

上述第二个方程中只是 Newton 第二定律应用于当前情况。人们试图寻找所有**运动学常**

数 (constants of motion), 它关于时间的导数为零。很容易发现角动量

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (9.6)$$

是一个这样的物理量, 因为 (9.5),

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad (9.7)$$

另一个 (不是那么明显) 的是所谓的 **Runge-Lenz 向量 (Runge-Lenz vector)**:

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{L}}{m} - \frac{Ze^2 \mathbf{r}}{r} \quad (9.8)$$

同时也满足

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0 \quad (9.9)$$

练习 9.1 验证 (9.7) 和 (9.9)。

很明显

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (9.10)$$

练习 9.2 验证 (9.10)。

因此, $\mathbf{L}$ 垂直于轨道平面, $\mathbf{M}$ 位于该平面上。后一事实立即产生轨道, 由 (9.8) 给出

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{r} = \frac{L^2}{m} - Ze^2 r \quad (9.11)$$

事实上, 这是圆锥曲线的等式。为了更明确地看到这一点, 我们让 $x-y$ 平面与轨道平面重合, 沿正 x 轴 $\mathbf{M}$ 的方向。则 (9.11) 可以用极坐标写成

$$r = \frac{L^2}{mZe^2} \left(1 + \frac{M}{Ze^2} \cos \phi \right)^{-1} \quad (9.12)$$

其中, ϕ 是 $\mathbf{r}$ 与 x 轴 ($\mathbf{M}$ 方向) 之间的角度, $\frac{M}{Ze^2}$ 是圆锥曲线的偏心距。运用更多的向量代数将揭示

$$M^2 = \frac{2HL^2}{m} + Z^2 e^4 \quad (9.13)$$

因此, 恒定的总能量由下式给出

$$H = \frac{m}{2L^2} (M^2 - Z^2 e^4) \quad (9.14)$$

现在我们运用量子力学, $\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{L}$ 都是 Hilbert 空间中电子波函数的所有算符 [见 Chapter 12], 并且不相互对易 [参考 (4.12), (7.10) 到 (7.12)]。特别的有: $\mathbf{p} \times \mathbf{L} \neq -\mathbf{L} \times \mathbf{p}$ 。因此, 我们通过反对称 $\mathbf{p} \times \mathbf{L}$ 乘积来重新定义量子力学的 Runge-Lenz 向量:

$$\mathbf{M} \equiv \frac{1}{2m} (\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{p}) - \frac{Ze^2 \mathbf{r}}{r} \quad (9.15)$$

从这一点来看, 主要策略是利用对称性和守恒之间的深层联系 (如 Chapter 3 所述)。我们已经在 Chapter 4 中详细研究了旋转对称性, 其中对称群 $SO(3)$ 及其无穷小生成元 L^1, L^2, L^3 构成了 Lie 代数 $\mathcal{SO}(3)$ 的基础。(9.1) 中的 Hamilton 量 H 明显是旋转不变的 (Coulomb 力是中心力), 因此我们期望经典下角动量守恒。量子力学下, 角动量守恒也是通过显式计算 $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ 和对可观测量 A 使用 Heisenberg 运动方程来建立的:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{[A, H]}{i\hbar} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (9.16)$$

练习 9.3 通过对 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{p}$ 使用 (9.16), 说明量子力学中 $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$ 。

注意到, $[A, H] = 0$ 表示

$$H = AHA^{-1} \quad (9.17)$$

我们说在这种情况下, H 在无穷小变换 A 下是不变的。在 Chapter 18 中, 我们将根据群表示理论更详细地研究 (9.17) 在 Hamilton 量能量本征值分类中的意义。

现在, 经典力学表明 M 是运动学常数即 [(9.9)]。事实证明, 量子力学中 $\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0$ 是正确的。

练习 9.4 通过区分依赖于 t 的 (9.15) 和通过运用 (9.16) 的等式右边在结果表述时估计所有时间导数来验证上述表述。[警告: 这是一项乏味的练习。它涉及重复使用对易关系]

$$[f(\mathbf{r}), \mathbf{p}] = i\hbar \nabla f(\mathbf{r})$$

其中, f 是 $\mathbf{r}$ 分量的解析函数。(见 W. Pauli 1926)]。

因此, 我们得到

$$[\mathbf{L}, H] = [\mathbf{M}, H] = 0 \quad (9.18)$$

除了 L^1, L^2, L^3 之外, M^1, M^2, M^3 也是运动常数的事实, 表明此处的 Lie 群大于 $SO(3)$ 。实际上, 我们将通过计算出这些对象的所有对易关系并证明它们满足 (4.29) 来确定 M^i 和 L^j 构成六维 Lie 代数的基。得到了以下结果 (我们将不会在此处进行繁琐但直接的演示)。

$$[L^i, L^j] = i\hbar \varepsilon_k^{ij} L^k \quad (9.19)$$

$$[L^i, M^j] = i\hbar \varepsilon_k^{ij} M^k \quad (9.20)$$

$$[M^i, M^j] = -\frac{2i\hbar}{m} H \varepsilon_k^{ij} L^k \quad (9.21)$$

实际上, 由于 H 在最后一个方程等式右边出现, 似乎会破坏一些东西。但由于 H 与 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{L}$ 两者都对易, 群表示理论的 Schur 引理 (见 Chapter 18) 说明, 在群的不可约表示中 (在电子波函数的 Hilbert 空间的子空间上), $H = EI$, 其中 $E \in \mathbb{R}$ 和 I 是单位算符。如果我们在一个不可约表示中工作, 并将所有 L^i, M^j 视为表示空间上的线性算符, 那么 (9.21) 的等式右边中的 H 可以被替换为一个实数 E , 并且会满足 (4.29) 的封闭要求。在不可约表示中让我们

定义

$$\mathbf{M}' \equiv \sqrt{-\frac{m}{2E}} \mathbf{M} \quad (9.22)$$

其中, $E < 0$ (电子束缚态)。注意, $\mathbf{M}'$ 具有与角动量 $\mathbf{L}$ 相同的物理维度。对易关系 (9.19) 至 (9.21) 则可以写为

$$[L^i, L^j] = i\hbar \varepsilon_k^{ij} L^k \quad (9.23)$$

$$[L^i, (M')^j] = i\hbar \varepsilon_k^{ij} (M')^k \quad (9.24)$$

$$[(M')^i, (M')^j] = i\hbar \varepsilon_k^{ij} L^k \quad (9.25)$$

通过 L^i 生成的三维代数 $\mathcal{SO}(3)$ 显然是我们的六维代数的一个子代数。六个运算符 L^i 和 $(M')^j$ 可以看作是 4×4 反对称矩阵的六个独立分量 $-iJ$ (算符) 如下:

$$\begin{aligned} & -i\hbar J \\ &= -i\hbar \begin{pmatrix} 0 & J_1^2 & J_1^3 & J_1^4 \\ -J_1^2 & 0 & J_2^3 & J_2^4 \\ -J_1^3 & -J_2^3 & 0 & J_3^4 \\ -J_1^4 & -J_2^4 & -J_3^4 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 0 & L^3 & -L^2 & (M')^1 \\ -L^3 & 0 & L^1 & (M')^2 \\ L^2 & -L^1 & 0 & (M')^3 \\ -(M')^1 & -(M')^2 & -(M')^3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.26)$$

就 J_i^j 而言, 则对易关系 (9.23) 至 (9.25) 表现为单个方程

$$[J_i^j, J_k^l] = \delta_k^j J_i^l - \delta_i^l J_k^j + \delta_i^k J_l^j - \delta_l^j J_i^k, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, 4 \quad (9.27)$$

练习 9.5 通过 (9.25) 说明 (9.27) 和 (9.23) 是等价的。

从我们前面的结果 (4.35) 中, 这些正是 Lie 代数 $\mathcal{SO}(4)$ 的对易关系! 因此, 量子力学 Kepler 问题的相关群是 $SO(4)$ 。

$\mathcal{SO}(4)$ 实际上可以分解为两个 $\mathcal{SO}(3)$ 的直和:

$$\mathcal{SO}(4) = \mathcal{SO}(3) \oplus \mathcal{SO}(3) \quad (9.28)$$

这可以通过将基 $\{\mathbf{L}, \mathbf{M}'\}$ 改变为下面表达式来实现

$$\mathbf{L}^\pm \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{L} \pm \mathbf{M}') \quad (9.29)$$

依赖于新的基的结构常数由下式给出

$$[(L^\pm)^i, (L^\pm)^j] = i\hbar \varepsilon_k^{ij} (L^\pm)^k \quad (9.30)$$

$$\left[(L^+)^i, (L^-)^j \right] = 0 \quad (9.31)$$

正如预期的结果 (9.28)。

练习 9.6 通过运用 (9.23) 至 (9.25) 验证上述两个方程。

从 (9.18) 可以明显看出

$$[L^+, H] = [L^-, H] = 0 \quad (9.32)$$

因此, L^+ 和 L^- 都是运动学常数。

正如 Chapter 7 后面所讨论的那样, $SO(4)$ 中 $SO(3)$ 的每个部分都有一个 Casimir 算符。它们分别为 $L^+ \cdot L^+$ 和 $L^- \cdot L^-$, 本征值分别为 $l^+(l^+ + 1)$ 和 $l^-(l^- + 1)$; 所以 $SO(4)$ 的 Casimir 算符很简单

$$C \equiv L^+ \cdot L^+ + L^- \cdot L^- \quad (9.33)$$

同

$$[C, (L^\pm)^i] = 0 \quad (9.34)$$

现在在 $SO(4)$ [或 $SO(4)$] 的相同不可约表示中, $L^+ \cdot L^+$ 和 $L^- \cdot L^-$ 具有相同的本征值, 即

$$l^+ (l^+ + 1) = l^- (l^- + 1) \quad (9.35)$$

因此, 我们有

$$l^+ = l^- = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots \quad (9.36)$$

这实际上得到了结果

$$L^+ \cdot L^+ - L^- \cdot L^- = L \cdot M' = L \cdot M = 0 \quad (9.37)$$

这也可以直接证明。事实上, 使用对易关系 (4.12) 到 (4.14), 我们可以建立以下算符方程:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (9.38)$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (9.39)$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (9.40)$$

这证实了经典的结果。用 (9.15) 给出的 $\mathbf{M}$ 的表达式处理并利用 $\mathbf{r}, \mathbf{p}$ 和 $\mathbf{L}$ 之间的各种对易关系, 也得到了

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{M} = \frac{2H}{m} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + \hbar^2) + Z^2 e^4 \quad (9.41)$$

现在, 由于 (9.40), Casimir 算符 C [(9.33)] 可以写成

$$C = \frac{1}{2} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{M}' \cdot \mathbf{M}') \quad (9.42)$$

或者, 在使用 (9.22) 和 (9.41) 时用 $E \in \mathbb{R}$ 代替 H ,

$$C = - \left(\frac{\hbar^2}{2} + \frac{mZ^2 e^4}{4E} \right) \quad (9.43)$$

将 C 替换为 $2l^+(l^+ + 1)$ [参考: (9.33), (9.35) 和 (9.36)], 得到

$$E = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2(2l^+ + 1)^2}, \quad l^+ = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots \quad (9.44)$$

从 (9.29), 我们意识到总轨道角动量 $\mathbf{L}$ 由下式给出

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^+ + \mathbf{L}^- \quad (9.45)$$

$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}$ 的本征值是 $l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ (轨道角动量量子数只能为整数)。从量子力学中角动量的叠加原理 [实际上是 $SO(3)$ 的不可约表示的产品表示理论 (见 Chapter 22)], 假设 l 这些值为 (由 Clebsch-Gordon 分解给出)

$$l = \begin{cases} l^+ + l^- = 2l^+ \\ l^+ + l^- - 1 \\ \dots \\ \dots \\ l^+ - l^- = 0 \end{cases} \quad (9.46)$$

由于 $2l^+$ 总是整数, 我们可以用 n 替换 $2l^+ + 1$, 一个正整数。最后, 我们得到了能量本征值的表达式如下

$$E = -\frac{mZ^2e^4}{4\hbar^2n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.47)$$

在上面的等式中, n 被认为是主量子数 (**principal quantum number**)。对于给定的 n , (9.46) 说明轨道角动量量子数 l 可以采用从 0 到 $n-1$ 的单位间隔值。而且, 对于给定的 $l^+ = l^-$, 每一个 $(L^+)^3$ 和 $(L^-)^3$ 中有 $2l^+ + 1 = n$ 个值。因此, 每个能级都是 n^2 简并 (忽略自旋)。考虑自旋后, 实际的简并度是 $2n^2$ 。

10. 伴随与么正变换

我们在 Chapter 1 中看到，向量空间 V 上的线性变换可以用依赖于 V 的基 $\{e_i\}$ 的特定选择的 $n \times n$ 矩阵来表示。我们还学习了一类称为正交变换的重要线性变换。这些由正交矩阵 a 表示，满足条件 $aa^T = a^T a = 1$ 。对于 Euclidean 空间，即定义了 Euclidean 内积 (8.2) 的空间，正交变换保持向量的长度。在本章中，我们将学习推广正交变换到所谓的么正变换 (有时候也翻译为酉变换)，它在酉空间中扮演相同的角色 [定义了满足 (8.27) 和 (8.28) 的内积的复空间] 在实 Euclidean 空间中作为正交变换。么正变换保留了酉空间中向量的长度 (范数)，并且在量子力学中具有根本重要性。首先，我们需要引入伴随算符 (变换) 的概念。

定义 10.1 设 A 是作用在内积空间 V 的线性算符 (变换)。由下面的性质定义的唯一线性算符 $A^\dagger$ ：对于任意的 $v_1, v_2 \in V$ ，有

$$(Av_1, v_2) = (v_1, A^\dagger v_2) \quad (10.1)$$

则 $A^\dagger$ 称为 A 的伴随 (*adjoint*)。

练习 10.1 证明上述定义是有意义的，即：证明 $A^\dagger$ 是的定义

- (1) 是唯一的，并且
- (2) 是线性的。

很容易从定义中得出伴随算符的下列性质。

$$1) \quad 0^\dagger = 0, \quad (\text{零算符的伴随是它本身}) \quad (10.2)$$

$$2) \quad 1^\dagger = 1, \quad (\text{单位算符的伴随是它本身}) \quad (10.3)$$

$$3) \quad (A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger \quad (10.4)$$

$$4) \quad (\alpha A)^\dagger = \bar{\alpha} A^\dagger, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (10.5)$$

$$5) \quad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad (10.6)$$

$$6) \quad (A^{-1})^\dagger = (A^\dagger)^{-1}, \quad \text{如果 } A \text{ 是可逆的话} \quad (10.7)$$

$$7) \quad (A^\dagger)^\dagger = A \quad (10.8)$$

练习 10.2 证明上述 4) 至 7) 式。

伴随等于它本身的算符 ($A^\dagger = A$) 被称为**自伴随 (self-adjoint)** 或者 **hermitian**。Hermitian 算符在量子力学中起着至关重要的作用。在该理论的数学形式中, 每个物理的可观测量, 称为**可观测量 (observable)**, 必须由酉空间上的 hermitian 算符来表示, 空间中的向量描述物理系统的**状态 (states)**。我们已经看到了一些重要的例子: 线性动量算符 [(4.4)] 和角动量算符 [(4.22)]。

由于线性算符一般不对易, 所以应该注意两个 hermitian 算符的乘积不一定是 hermitian。实际上, (10.6) 说明当且仅当 A 和 B 对易时, 两个 hermitian 算符 A 和 B 的乘积才是 hermitian。

hermitian 算符的另外两个相关而有用的事实如下:

i) 如果 $A^\dagger = A$, 则: 对于任意 B , 都有 $B^\dagger AB$ 是 hermitian;

ii) 如果 B 是可逆的, 并且 $B^\dagger AB$ 是 hermitian, 则 A 是 hermitian。

如果

$$A^\dagger = -A \quad (10.9)$$

算符 A 称为 **skew-hermitian**。

很容易看出, 每个线性算符 A 都可以被唯一地分解为 $A = B + C$, 其中 B 是 hermitian, 而 C 是 skew-hermitian。事实上, 我们有

$$B = \frac{A + A^\dagger}{2} \quad (10.10)$$

$$C = \frac{A - A^\dagger}{2} \quad (10.11)$$

每个 hermitian 算符都可以通过 skew-hermitian 简单乘以 $i = \sqrt{-1}$ 来得到 (反之亦然)。因此, 每个线性算符 A 都有唯一的分解

$$A = B + iC \quad (10.12)$$

其中, B 和 C 都是 hermitian。这让人联想到这样一个事实: 每个复数 $z \in \mathbb{C}$ 都可以唯一地分解为 $z = x + iy$, 其中, x 和 y 都是实数。因此, hermitian 算符在算符空间的代数中扮演

实数的角色, skew-hermitian 算符扮演虚数的角色。

定义 10.2 一个么正变换 (*unitary transformation*) A 满足条件:

$$A^{-1} = A^\dagger \quad (10.13a)$$

或等价地:

$$A^\dagger A = AA^\dagger = 1 \quad (10.13b)$$

从定义中, 我们立刻看到: 么正变换保留了酉空间中向量的长度。实际上, 通过内积确定在酉空间 V 中向量 v 的长度平方

$$\|v\|^2 = (v, v) \quad (10.14)$$

因此, 对于么正算符 A

$$(Av, Av) = (v, A^\dagger Av) = (v, v) \quad (10.15)$$

前面介绍的有限空间平移 [(4.10)] 和有限空间旋转 [(4.21)] 是量子力学中么正算符的非常重要的例子。另一个重要的例子是量子力学中的有限时间平移算符 (**时间演化算符 (time-evolution operator)**)

$$U(t) = \exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right) \quad (10.16)$$

其中, H 是系统的 **Hamilton 量** (hermitian 算符表示系统的能量是可观测的)。

现在我们将找到伴随 $A^\dagger$ 的矩阵表示, 给定 A 的矩阵表示依赖于 V 的**标准正交基 (orthonormal basis)** $\{e_i\}$ 。如果 $(v_1, v_2) = (v_2, v_1) = 0$, 其中 $(,)$ 是内积, 则两个向量 v_1, v_2 称为**正交 (orthogonal)** 的。标准正交基础只需简单满足

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad (10.17)$$

也就是说, 基中的每两个不同的基向量彼此正交, 并且它们都是单位长度。需要注意的一个重要事实 (尽管我们不会证明它) 是标准正交基应确定存在于酉空间中。

为了解使用标准正交基的优点, 我们需要介绍 V 中**对偶基到 V 中给定基 $\{e_i\}$ (the dual basis in V to a given basis $\{e_i\}$ in V)** 的概念 (与在 Chapter 8 介绍的对偶空间 V^* 中对偶基 $\{e^*\}$ 到 V 中给定基 $\{e_i\}$ 概念相反)。首先我们回想一下, 对于 V 中的给定基 $\{e_i\}$, V^* 中的对偶基 $\{e^{*i}\}$ 由下式给出:

$$\langle e_i, e^{*j} \rangle = \delta_i^j \quad (10.18)$$

酉空间 V 定义了内积, 因此得到 V 和 V^* 之间的共轭同构:

$$G: V \longrightarrow V^* \quad , \quad G^{-1}: V^* \rightarrow V$$

设 e'_i 是共轭同构 G^{-1} 下的 e^{*i} 的像。根据定义, 集合 $\{e'_i\}$ 满足

$$(e_i, e'_j) = \langle e_i, e^{*j} \rangle = \delta_{ij} \quad (10.19)$$

集合 $\{e'_i\}$ 是线性无关的。实际上, 假设 $\alpha^i e'_i = 0, \alpha^i \in \mathbb{C}$ 。则对于任意 j , 有 $(\alpha^i e'_i, e_j) = 0 = \alpha^i (e'_i, e_j) = \alpha^i \delta_{ij} = \alpha^j$ 。然后, 因为 $\{e'_i\}$ 和 $\{e_i\}$ 通过可逆线性变换联系起来, 任意向量 $v \in V$

可以用 $\{e_i\}$ 的线性组合来表达, 同时也能够用 $\{e'_i\}$ 来表达。因此, $\{e'_i\}$ 也是 V 的基。它被称为 V 对 $\{e_i\}$ 的对偶基。现在到了关键。正交基 $\{e_i\}$ 是**自对偶 (self-dual)** 的, 即: $e'_i = e_i$ 。证明很容易。对于任意 $v \in V$, 我们有

$$(v, e_i - e'_i) = (v, e_i) - (v, e'_i) = (v^j e_j, e_i) - (v^j e_j, e'_i) = v^j \delta_{ij} - v^j \delta_{ij} = v^i - v^i = 0 \quad (10.20)$$

这意味着: 对于任意的 i , 有 $e'_i = e_i$ 。

现在假设线性算符 A 的矩阵表示依赖于 V 的基 $\{e_i\}$ 为 a_i^j , 即 [见 (1.16)]

$$A(e_i) = a_i^j e_j \quad (10.21)$$

并且 $A^\dagger$ 依赖于上面介绍的对偶基 $\{e'_i\}$ 的矩阵表示是 $(a^\dagger)_i^j$, 即,

$$A^\dagger(e'_i) = (a^\dagger)_i^k e'_k \quad (10.22)$$

则, 我们有

$$(e_j, A^\dagger e'_i) = \overline{(a^\dagger)_i^k} (e_j, e'_k) = \overline{(a^\dagger)_i^k} \delta_{jk} = \overline{(a^\dagger)_i^j} \quad (10.23)$$

另一方面

$$(e_j, A^\dagger e'_i) = (A e_j, e'_i) = a_j^k (e_k, e'_i) = a_j^k \delta_{ki} = a_j^i \quad (10.24)$$

因此

$$(a^\dagger)_i^j = \overline{a_j^i} \quad (10.25)$$

矩阵 $(a^\dagger)_i^j = \overline{a_j^i}$ 称为矩阵 (a_i^j) 的 **hermitian 共轭 (hermitian conjugate)**。

在上面的方程中, 重要的是要记住 a_i^j 是依赖于基 $\{e_i\}$ 的 A 的矩阵表示, 而是 $(a^\dagger)_i^j$ 是依赖于对偶基 $\{e'_i\}$ 的 $A^\dagger$ 的矩阵表示。通常, $\{e_i\}$ 不要求是标准正交基。但如果是, 则 $e_i = e'_i$ 如我们之前的讨论所述, 同时 (10.25) 是将依赖于同一 (标准正交) 基的 A 和 $A^\dagger$ 的矩阵联系起来的表述。

注意, 矩阵 $(a^\dagger)_i^j$, 根据 (10.25), 是矩阵 a_i^j 的复共轭转置。对于一个 hermitian 算符 ($A^\dagger = A$), 依赖于标准正交基 $\{e_i\}$ 的矩阵表示则满足条件

$$a_i^j = \overline{a_j^i} \quad (10.26)$$

因此, 矩阵等于其复共轭转置。这种矩阵称为 **hermitian 矩阵 (hermitian matrix)**。注意, 实 hermitian 矩阵只是实对称矩阵 ($a_i^j = \overline{a_j^i} = a_j^i$)

如果算符 A 是么正的 ($A^{-1} = A^\dagger$), 并且依赖于标准正交基础 $\{e_i\}$ 的 A 的矩阵表示是 (a_i^j) , 则依赖于相同的基的 A^{-1} 矩阵表示的 hermitian 共轭矩阵是 (a_i^j) , 即就是

$$(a^{-1})_i^j = \overline{a_j^i} \quad (10.27)$$

满足上述性质的矩阵称为**么正矩阵 (unitary matrix)**。

练习 10.3 说明 $\exp(iA)$ 是一个么正算符，其中 A 是 hermitian。

如果 (6.27) 中的矩阵 (a_i^j) 是实矩阵，那么

$$(a^{-1})_i^j = \overline{a_j^i} = a_j^i \quad (10.28)$$

即就是

$$a^{-1} = a^T \quad (10.29)$$

并且么正性退化到正交性。

11. Lorentz 群和 $SL(2, \mathbb{C})$

Lorentz 群在物理学中具有特殊的意义，因为它在狭义相对论中起着重要作用，因而在量子场论中也是如此。在 Lorentz 变换下物理定律的不变性所表现出的所谓时空对称性是物理学中最基本的守恒原理的来源，包括 Chapter 3 和 Chapter 4 中早先考虑的动量和角动量守恒。

回想一下 Chapter 8[参考 (8.3)] 中介绍的 $\mathbb{R}^4$ 上的 Minkowski 度规

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

向量 $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$ 的范数 (norm) $\|x\|^2$ 由下式决定

$$\|x\|^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad (11.1)$$

(注意：通常在物理文献中使用希腊字母表示时空指标；用拉丁字母表示空间指标。) 定义了 Minkowski 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 的向量空间 $\mathbb{R}^4$ 称为 **Minkowski 空间 (Minkowski space)**，我们在这章中用 M 表示。

定义 11.1 Lorentz 变换 (Lorentz transformation) Λ 是 Minkowski 空间 M 上保持向量范数的线性变换，即：对于任意 $x \in M$

$$\|\Lambda x\|^2 = \|x\|^2 \quad (11.2)$$

Lorentz 变换可以想成时空的‘旋转’。在一个时空点 $x \in M$ 上的 Lorentz 变换 Λ 的作

用通常用分量来表示为

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (11.3)$$

或者

$$(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_0^1 & \Lambda_0^2 & \Lambda_0^3 \\ \Lambda_1^0 & \Lambda_1^1 & \Lambda_1^2 & \Lambda_1^3 \\ \Lambda_2^0 & \Lambda_2^1 & \Lambda_2^2 & \Lambda_2^3 \\ \Lambda_3^0 & \Lambda_3^1 & \Lambda_3^2 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix}$$

M 上所有 Lorentz 变换组成了群 $L(4)$ [有时记成 $O(1, 3)$], 称为 **Lorentz 群 (Lorentz group)**。这实际上是称为 **Poincare 群 (Poincare group)** P 的子群, 除了 Lorentz 变换之外, 它还包括 Minkowski 空间中所有平移的 Abel 子群 $T(4)$ 。

练习 11.1 检验 Lorentz 变换满足群的公理 (参考: 定义 4.1)。

定义 11.2 设 A 是 G 的不变 (正规) Abel 子群, B 是 G 的另一个子群使得 $A \cap B = \{e\}$ (G 中的恒元) 并且每个元素 $g \in G$ 可以写成一个独特的方式写作 $g = ba, b \in B, a \in A$ 则 G 被称为 B 和 A 的**半直积 (semi-direct product)**, 写作: $G = B \otimes_S A$ 。

定理 11.1 Poincare 群 P 是 Lorentz 群 $L(4)$ 和 Minkowski 空间的所有平移的群 $T(4)$ 的半直积, 即

$$P = L(4) \otimes_S T(4) \quad (11.4)$$

练习 11.2 证明定理 11.1。

一个特殊的 $p \in P$ 则一般记为 $p = (\Lambda_\nu^\mu, a^\mu)$ 。在 p 下, $x \in M$ 变换如下

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + a^\mu \quad (11.5)$$

注意, 平移不与 Lorentz 变换对易, 因为 M 的平移向量也可以进行 Lorentz 旋转。

定义的 Lorentz 变换属性 (11.2) 意味着

$$\eta_{\lambda\sigma} x'^\lambda x'^\sigma = \eta_{\lambda\sigma} \Lambda_\mu^\lambda \Lambda_\nu^\sigma x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

因此

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\lambda \eta_{\lambda\sigma} \Lambda_\nu^\sigma = \sum_\sigma \Lambda_\mu^\lambda \eta_{\lambda\sigma} (\Lambda^T)^\sigma_\nu \quad (11.6)$$

矩阵记号下

$$\eta = \Lambda \eta \Lambda^T \quad (11.7)$$

反过来说明

$$\det(\eta) = \det(\Lambda) \det(\eta) \det(\Lambda^T) = \det(\eta) (\det(\Lambda))^2$$

(对于行列式性质的讨论见下面的 Chapter 16)。因此我们得到了 Lorentz 变换的很重要的一

个性质:

$$\det(\Lambda) = \pm 1, \quad \Lambda \in L(4) \quad (11.8)$$

(和 Chapter 1 中讨论的正交矩阵情况比较)。

所有满足 $\det(\Lambda) = +1(-1)$ 的 $\Lambda \in L(4)$ 称为 **proper(improper)Lorentz 变换 (proper(improper) Lorentz transformations)**。这些类似于 $O(3)$ 中的纯旋转 [$\det(a) = +1$] 和旋转-反转 [$\det(a) = -1$] 组合。很有趣的是 η 本身是一个非特征 Lorentz 变换。物理上, 它对应于时间反转。

在 M 上的任意矩阵表示, Lorentz 变换中的元素 Λ_0^0 扮演着一个特殊角色。从 (11.6) 和 (8.3) 得

$$\eta_{00} = -1 = \Lambda_0^\lambda \eta_{\lambda\sigma} \Lambda_0^\sigma = -(\Lambda_0^0)^2 + \sum_i (\Lambda_0^i)^2 \quad (11.9)$$

因为对于任意 $\Lambda_\mu^\nu \in \mathbb{R}$ (实数)

$$(\Lambda_0^0)^2 \geq 1 \quad (11.10)$$

即就是 $\Lambda_0^0 \geq 1$ 或者 ≤ -1 。

基于性质 (11.8) 和 (11.10), Lorentz 群 $L(4)$ 看起来像是四个不相关分量的组合:

- 1) $L_0[SO(1, 3)^\uparrow$ 或者 $L_+^\uparrow$](proper orthochronous), $\det(\Lambda) = +1, \Lambda_0^0 \geq 1$,
- 2) $sL_0(L_-^\uparrow)$ (improper orthochronous), $\det(\Lambda) = -1, \Lambda_0^0 \geq 1$,
- 3) $tL_0(L_-^\downarrow)$ (improper non-orthochronous), $\det(\Lambda) = -1, \Lambda_0^0 \leq -1$,
- 4) $stL_0(L_+^\downarrow)$ (proper non-orthochronous), $\det(\Lambda) = 1, \Lambda_0^0 \leq -1$,

其中,

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (11.11)$$

并且

$$t = \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11.12)$$

分别是空间和时间反转。

任意 $\Lambda \in L(4)$ 可以这四种形式变换的乘积。由于它们都是从 L_0 中派生的, $L(4)$ 的群参数 [群流形的局域坐标 (见 Chapter 30)] 是 L_0 的群参数。我们将会在下面看到 $L(4)$ 是一个既不连通也不紧致的可微流形。这一拓扑事实对于 Lorentz 群的表示理论有着深刻影响, 详细研究超出本文的范围。

练习 11.3 说明 $SO(1, 3)^\uparrow$ 是 $O(1, 3)$ 的一个正规子群并且

$$\frac{O(1, 3)}{SO(1, 3)^\uparrow} = \{SO(1, 3)^\uparrow, L_-^\uparrow, L_-^\downarrow, L_+^\downarrow\}$$

事实说明, Lorentz 群 $L(4)$ 的性质可以通过它和 $SL(2, \mathbb{C})$ 的关系来给出, $SL(2, \mathbb{C})$ 是具有复

元素的 2×2 矩阵的特殊 (非模, 行列式 $= +1$) 线性群。我们现在来研究这种关系。

开始, 我们考虑由 2×2 hermitian 矩阵构成的集合 H_2 , 其中一般的元素可以写成 [参考 (10.25)]

$$h = \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C} \quad (11.13)$$

通过下式, 我们给出了 H_2 与 Minkowski 空间 M 之间的同构 $f: M \rightarrow H_2$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \in H_2 \quad (11.14)$$

其中, $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in M$ 。

练习 11.4 说明上面给出的 $f(x)$ 确实是一个具有如下逆 $f^{-1}: H_2 \rightarrow M$ 的双射

$$x^0 = \frac{1}{2} \text{Tr}(h) = \frac{1}{2}(a+b), x^1 = \frac{1}{2}(c+\bar{c}), x^2 = \frac{1}{2i}(c-\bar{c}), x^3 = \frac{1}{2}(a-b) \quad (11.15)$$

在 f 下, M 中的单位向量映射到单位 (2×2) 矩阵 e 和 **Pauli 自旋矩阵 (Pauli spin matrices)** σ_i :

$$\begin{aligned} e_0 = (1, 0, 0, 0) &\longrightarrow \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e \\ e_1 = (0, 1, 0, 0) &\longrightarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_2 = (0, 0, 1, 0) &\longrightarrow \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ e_3 = (0, 0, 0, 1) &\longrightarrow \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11.16)$$

因此, H_2 具有实向量空间结构 (四维), 其中 $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 是一组基, 并且任意 $h \in H_2$ 可以写成

$$h = x^\mu \sigma_\mu, \quad x^\mu \in \mathbb{R}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (11.17)$$

同时有

$$\det(f(x)) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = -\|x\|^2 \quad (11.18)$$

练习 11.5 验证下面 Pauli 自旋矩阵的重要性质

$$\sigma_i = \sigma_i^\dagger$$

$$\text{Tr } \sigma_i = 0$$

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$$

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jk}^l \sigma_l$$

并且因此

$$\begin{aligned}\sigma_j \sigma_k &= \delta_{jk} + i \varepsilon_{jk}^l \sigma_l \\ (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}\end{aligned}$$

还有

$$e^{i\theta\sigma_j} = \cos \theta + i \sin \theta \sigma_j$$

现在定义群同态，如下所示（关系见 Figure 11.1）。对于任意 $g \in SL(2, \mathbb{C})$ ，和 $x \in M$

$$\phi(g)(x) \equiv f^{-1}(gf(x)g^\dagger) \quad (11.19)$$

$$\begin{array}{ccc} H_2 & \xleftarrow{f} & M \\ \downarrow & \xrightarrow{\phi} & \downarrow \\ SL(2, \mathbb{C}) \ni g & \xrightarrow{\quad} & \phi(g) \in L(4) \\ \downarrow & \xrightarrow{f^{-1}} & \downarrow \\ H_2 & \xrightarrow{\quad} & M \end{array}$$

Figure 11.1

为了验证这个定义有意义，我们必须说明 i) 对于 $h \in H_2$ 和 $g \in SL(2, \mathbb{C})$ ， $ghg^\dagger \in H_2$ ，ii) $\phi(g)$ 确实在 $L(4)$ 中，并且 iii) ϕ 确实是一个群同态（保持群乘法）。i) 的有效性十分明显 [从 (10.6) 和 (10.8)]。从 (11.18) 和 (11.19)，我们有

$$\begin{aligned}\|\phi(g)(x)\|^2 &= -\det(f(\phi(g)(x))) = -\det(gf(x)g^\dagger) = \det(g)\det(f(x))\det(g^\dagger) \\ &= -\det(g)\overline{\det(g)}\det(f(x)) = -\det(f(x)) = \|x\|^2\end{aligned} \quad (11.20)$$

其中，我们已经用了一些行列式的基本性质（参考 Chapter 16），事实便是，对于 $g \in SL(2, \mathbb{C})$ ， $\det(g)$ 被定义等于 1。因此， $\phi(g) \in L(4)$ 。为了建立 ϕ 是同态，我们必须说明：对于任意 $g_1, g_2 \in SL(2, \mathbb{C})$ ，有

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1) \phi(g_2) \quad (11.21)$$

实际上，通过 (11.19)，对于任意 $x \in M$

$$\begin{aligned}\phi(g_1 g_2)(x) &= f^{-1}(g_1 g_2 f(x) g_2^\dagger g_1^\dagger) = f^{-1}(g_1 f(\phi(g_2)(x)) g_1^\dagger) \\ &= f^{-1} f(\phi(g_1) \phi(g_2)(x)) = \phi(g_1) \phi(g_2)(x)\end{aligned} \quad (11.22)$$

同态 $\phi: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow L(4)$ 有非常重要的性质为二对一（见 Figure 11.2）：

$$\phi(g) = \phi(-g) \quad (11.23)$$

实际上，对于任意 $x \in M$

$$\phi(g)(x) = f^{-1}(gf(x)g^\dagger) = f^{-1}((-g)f(x)(-g)^\dagger) = \phi(-g)(x) \quad (11.24)$$

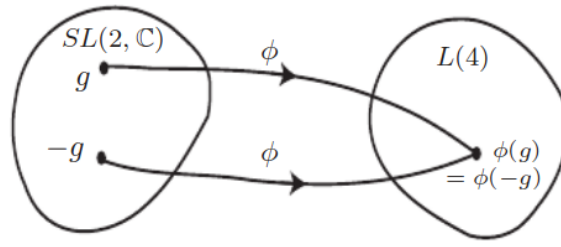


Figure 11.2

现在我们考虑 $SL(2, \mathbb{C})$ 的子群 $SU(2)$ 。通过定义, $g \in SU(2)$ 意味着 g 是一个复 2×2 矩阵使得 $gg^\dagger = g^\dagger g = e$ 并且 $\det(g) = 1$ 。很容易看到: 如果 $g \in SU(2)$, 则 $\phi(g)(e_0) = e_0$, 其中 $e_0 = (1, 0, 0, 0)$ 是 Minkowski 空间沿着时间轴的单位向量。事实上, 通过 (11.19)

$$\phi(g)(e_0) = f^{-1}(gf(e_0)g^\dagger) = f^{-1}(geg^\dagger) = f^{-1}(gg^{-1}) = f^{-1}(e) = e_0 \quad (11.25)$$

因此, $Im(\phi|_{SU(2)}) \subset L(4)$ 中的 Lorentz 变换使得时间轴 (由 e_0 生成的 M 中的子空间) 保持不变。 $\phi|_{SU(2)}$ 记号意味着 ϕ 仅限于 $SU(2)$ 。令 $e_0^\perp$ 为时间轴的正交子空间:

$$e_0^\perp = \{x \in M | \eta_{\mu\nu} x^\mu (e_0)^\nu = 0\} \quad (11.26)$$

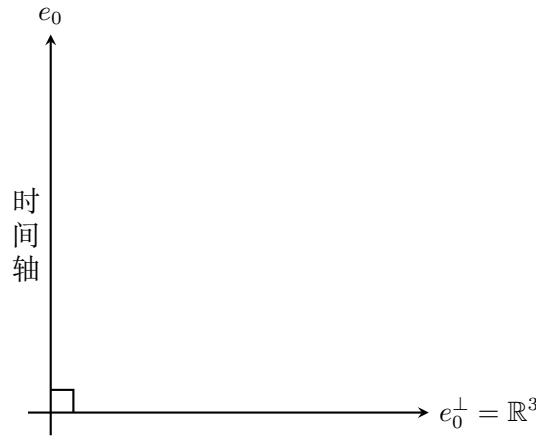


Figure 11.3

$e_0^\perp$ 由形如 $(0, x^1, x^2, x^3)$ 的向量组成 (Figure 11.3)。我们将说明 $Im(\phi|_{SU(2)})$ 也保持 $e_0^\perp$ 不变。事实上, 对于 $g \in SU(2)$, 并且 $x \in e_0^\perp$

$$f(x) = x^i \sigma_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (11.27)$$

下面从 (11.17); 所以

$$\phi(g)(x) = f^{-1}(gx^i \sigma_i g^\dagger) = x^i f^{-1}(g \sigma_i g^\dagger) \quad (11.28)$$

但是

$$\text{Tr}(g \sigma_i g^\dagger) = \text{Tr}(g g^\dagger \sigma_i) = \text{Tr}(\sigma_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (11.29)$$

其中, 最后的方程来自于 (11.16) 给出的 σ_i 的显式形式。第一个方程 (11.15) 则说明了向量 $f^{-1}(g\sigma_i g^\dagger)$ 的第一个分量 (时间) 消失。因此 $\phi(g)(x) \in e_0^\perp$ 。

上面的表明 $ae_0 (a \in \mathbb{R})$ 和 $e_0^\perp$ 都是 $\text{Im}(\phi|_{SU(2)})$ 中 Lorentz 变换的不变子空间。实际上, 这些变换在 ae_0 中 (时间轴) 表现为单位算符并且在 $e_0^\perp = \mathbb{R}^3$ 中 (具有 Euclidean 度规 $\eta_{ij} = \delta_{ij}$) 保持 Euclidean 长度。因此, 我们已经建立 ϕ 的重要约束同态:

$$\phi|_{SU(2)} : SU(2) \longrightarrow O(3) \subset L(4) \quad (11.30)$$

很显然, 这种约束同态依旧是二对一, 因为 $g \in SU(2)$ 表明 $-g \in SU(2)$ 同时有 (Figure 11.4)。

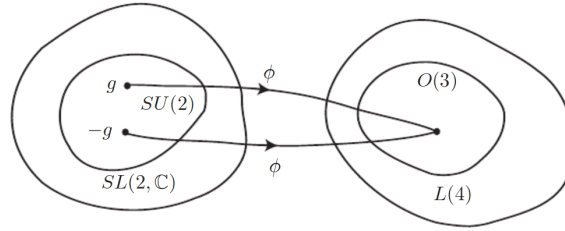


Figure 11.4

让我们考虑 $SU(2)$ 特定单参数子群。先看由下式给出的 $g \in SU(2)$

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (11.31)$$

并显式计算 $\phi(g(\theta))$ 对 $x \in M$ 的效果。回忆 (11.14) 和 (11.19) 我们有

$$\begin{aligned} g(\theta)f(x)(g(\theta))^\dagger &= \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & e^{-2i\theta}(x^1 - ix^2) \\ e^{2i\theta}(x^1 + ix^2) & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11.32)$$

这表明 $x^1 x^2$ -平面中的向量在 x^3 -轴的正向旋转, 角度为 2θ , $\phi(g(\theta))$ 关于 x^0 和 x^3 不变。因此, 在 Chapter 6 的定义下 [参考 (6.25)]

$$\phi(g(\theta)) = R_3(2\theta) \quad (11.33)$$

我们同时记做

$$-g(\theta) = \begin{pmatrix} -e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i(\theta+\pi)} & 0 \\ 0 & e^{i(\theta+\pi)} \end{pmatrix} = g(\theta + \pi) \quad (11.34)$$

因此

$$\phi(-g(\theta)) = R_3(2\theta + 2\pi) = R_3(2\theta) = \phi(g(\theta)) \quad (11.35)$$

这将进一步验证限制在 $g(\theta)$ 所属子群 $\phi|_{SU(2)}$ 中的二对一的性质。

接下来考虑 $SU(2)$ 的另一个单参数子群，它的元素有如下形式

$$g'(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (11.36)$$

[这是我们在本书中遇到的第一个矩阵 {参考 (1.6)}]。注意到

$$(g'(\alpha))^\dagger = g'(-\alpha) \quad (11.37)$$

$\phi(g'(\alpha))$ 作用在任意 $x \in M$ 上的效果为

$$g'(\alpha)f(x)(g'(\alpha))^\dagger = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 + ix^2 \\ x^1 - ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (11.38)$$

让我们在 $x = e_2 = (0, 0, 1, 0)$ 上试试。回忆 [参考 (11.16)] $f(e_2) = \sigma_2$ ，方程 (11.38) 得到

$$g'(\alpha)f(e_2)(g'(\alpha))^\dagger = \sigma_2 \quad (11.39)$$

练习 11.6 验证上述方程。

因此

$$\phi(g'(\alpha))(e_2) = f^{-1}(\sigma_2) = e_2 \quad (11.40)$$

说明 $\phi(g'(\alpha))$ 一定是关于 x^2 -轴的旋转。为了看旋转角度，我们将 (11.38) 应用到 $x = e_3 = (0, 0, 0, 1)$ 上。运用 $f(e_3) = \sigma_3$ ，直接得到说明

$$\begin{aligned} g'(\alpha)f(e_3)(g'(\alpha))^\dagger &= g'(\alpha)\sigma_3(g'(\alpha))^\dagger = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \\ &= f((0, \sin 2\alpha, 0, \cos 2\alpha)) \end{aligned} \quad (11.41)$$

练习 11.7 验证上述方程。

我们从 (11.40) 和 (11.41) 得到结论 $\phi(g'(\alpha))$ 是一个绕 x^2 -轴旋转 2α 角的旋转：

$$\phi(g'(\alpha)) = R_2(2\alpha) \quad (11.42)$$

我们现在转而考虑 $g \in SL(2, \mathbb{C})$ ，而不是在 $SU(2)$ 。特别地，我们考虑

$$g''(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} = (g''(\gamma))^\dagger, \gamma \in \mathbb{R} \quad (11.43)$$

为确定其在 $x \in M$ 上的行为, 我们和前面相同步骤计算

$$\begin{aligned} g''(\gamma)f(x)(g''(\gamma))^\dagger &= \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2(x^0 + x^3) & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & \frac{1}{\gamma^2}(x^0 - x^3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11.44)$$

因此, $\phi(g''(\gamma))$ 关于 x^1 和 x^2 不变, 同时 x^0 和 x^3 变换根据

$$x'^0 + x'^3 = \gamma^2(x^0 + x^3), \quad x'^0 - x'^3 = \frac{1}{\gamma^2}(x^0 - x^3) \quad (11.45)$$

求解它们, 我们有

$$\begin{aligned} x'^0 &= \frac{1}{2} \left(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) x^0 + \frac{1}{2} \left(\gamma^2 - \frac{1}{\gamma^2} \right) x^3 \\ x'^3 &= \frac{1}{2} \left(\gamma^2 - \frac{1}{\gamma^2} \right) x^0 + \frac{1}{2} \left(\gamma^2 + \frac{1}{\gamma^2} \right) x^3 \\ x^1 &= x^1, \quad x^2 = x^2 \end{aligned} \quad (11.46)$$

令 $|\gamma| = e^\eta$, 上面的方程可以写成

$$\begin{aligned} x'^0 &= (\cosh 2\eta)x^0 + (\sinh 2\eta)x^3 \\ x'^3 &= (\sinh 2\eta)x^0 + (\cosh 2\eta)x^3 \\ x'^1 &= x^1, \quad x'^2 = x^2 \end{aligned} \quad (11.47)$$

因此, Lorentz 变换 $\phi(g'')$ 由下式给出

$$\phi(g''(\gamma)) = \Lambda_\mu^\nu(\eta) = \begin{pmatrix} \cosh 2\eta & 0 & 0 & \sinh 2\eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh 2\eta & 0 & 0 & \cosh 2\eta \end{pmatrix} \quad (11.48)$$

被认为是 $B_3(v)$ 沿着 x^3 -方向的 **Lorentz boost**, 速度 v 决定于

$$\cosh 2\eta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sinh 2\eta = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (11.49)$$

其中, c 是光速。我们因此有

$$\phi(g''(\gamma)) = B_3(v) \quad (11.50)$$

注意到因为 $\eta \in \mathbb{R}$ 位于 $(-\infty, +\infty)$ 范围内, Lorentz 群不紧致。

我们已经看到同态 $\phi: SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow L(4)$ 不是单射的 (是二对一)。将表明它不满足。实际上, 只有 proper orthochronous Lorentz 群 $L(4)$ 的四个连通分量中的一个, 即

$$\text{Im}(\phi) = L_0 = L_+^\uparrow \quad (11.51)$$

这将通过以下系列步骤确定 (在适当时候证明)。

1. 观察到任何元素 $g \in SL(2, \mathbb{C})$ 都可以通过 $SL(2, \mathbb{C})$ 中的连续曲线连接到恒元。
2. 只有 L_0 中的元素可以通过连续曲线连接到 $L(4)$ 中恒元, 该曲线必须完全在 L_0 。
3. 因为在 $L(4)$ 中 $\phi(e) = \text{恒元}$, ϕ 的范围, $\text{Im}(\phi)$ 必须在 $L(4)$ 的一个子集中, 其所有元素通过连续曲线连接到 $[L(4)]$ 横元, 即: $\text{Im}(\phi) \subset L_0$ 。
4. 运用下面的引理。

引理 11.1 任何 *proper orthochronous Lorentz* 群 L_0 中的元素可以被表示成

$$\Lambda = RB_3R' \quad (11.52)$$

其中, R 和 R' 为 $\mathbb{R}^3$ 中的纯旋转, B_3 是沿着 x^3 -方向的 *Lorentz boost*。

5. 回忆 Euler 定理 (定理 6.3) 中每个 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转 R 可以写成一个乘积

$$R = R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi) \quad (11.53)$$

6. 所有 R_3, R_2 和 $B_3 \in L_0$ 都有在 ϕ 下的 $SL(2, \mathbb{C})$ 的原像 (如本章前面所示):

$$\phi^{-1}(B_3(v)) = \pm \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix} \quad (11.54)$$

其中, v 和 γ 通过 $|\gamma| = e^\eta$ 和 (11.49) 联系起来

$$\phi^{-1}(R_2(\theta)) = \pm \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \pm \exp \left(-i \frac{\theta}{2} \sigma_2 \right) \quad (11.55)$$

$$\phi^{-1}(R_3(\psi)) = \pm \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\psi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\psi}{2}) \end{pmatrix} = \pm \exp \left(-i \frac{\psi}{2} \sigma_3 \right) \quad (11.56)$$

记住 $(\pm)$ 结果来自于 ϕ 的二对一性质。因此 $L_0 \subset \text{Im}(\phi)$ 。同第 3 步的结果, 我们得出结论: ϕ 确实将 $SL(2, \mathbb{C})$ 映射到 L_0 。

练习 11.8 通过练习 11.5 的结论验证 (11.55) 和 (11.56) 中的第二个等式。

练习 11.9 说明

$$\phi^{-1}(R_n(\theta)) = \pm \exp \left(-i \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \quad (11.57)$$

其中, $\mathbf{n}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位向量。[与 (4.21) 相比]。

上面发展出的最终结果是下面有趣的图, 将本章中考虑的不同群关联起来。

$$\begin{array}{ccc} \phi|_{SU(2)} : SU(2) & \xrightarrow{\text{二对一映射到}} & SO(3) \subset O(3) \\ \cap & & \cap \quad \cap \\ \phi : SL(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{二对一映射到}} & SO(1, 3)^\dagger \subset O(1, 3) \end{array}$$

让我们现在来证明上面步骤中的不同断言。证明：(1) 任意 $A \in SL(2, \mathbb{C})$ 与 $SL(2, \mathbb{C})$ 中的上对角矩阵相似 (共轭)，即：对于某些 2×2 可逆矩阵 B ,

$$A = B \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} B^{-1}, \quad a, b \in \mathbb{C} \quad (11.58)$$

这是线性代数中标准结果的特例 (这里不再证明)。当然，在复平面上存在连续曲线 $a(t)$ 和 $b(t)$, $0 \leq t \leq 1$, 使得 $a(0) = 1$ 和 $b(0) = 0$, $b(1) = b$ 。(任意复数都可以通过复平面上的连续路径连通到 0 或 1)。考虑 $SL(2, \mathbb{C})$ 中的矩阵族：

$$A(t) = B \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & \frac{1}{a(t)} \end{pmatrix} B^{-1}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (11.59)$$

它们满足 $A(0) = e$ 和 $A(1) = A$ ；因此描述的是 $SL(2, \mathbb{C})$ 中的连续曲线，它连通到恒元和 A 。

□ 证明：(2) 首先注意，恒元在 L_0 中，并且由于 L_0 是 $L(4)$ 的连通分量，因此 L_0 中的所有元素都连通到恒元。接下来，我们展示满足 $\det(\Lambda) = -1$ 的任意 $\Lambda \in L(4)$ 都不能连通到恒元。这包括陪集中的所有元素 $stL_0 = L_-^\uparrow$ (improper orthochronous) 和 $tL_0 = L_-^\downarrow$ (improper non-orthochronous)。实际上，反向假设，在 $L(4)$ 中确实存在连续曲线 $\Lambda(t)$ ，其将恒元与元素 Λ' 连通，其中 $\det(\Lambda') = -1$ ，使得 $\Lambda(0) = e$ 和 $\Lambda(1) = \Lambda'$ 。因为 $\det(\Lambda(t))$ 是 t 的连续函数，所以必须存在 $t', 0 < t' < 1$ ，使得 $\det(\Lambda(t')) = 0$ 。但由于 (11.8)，这是不可能的。

这使得元素处于 $stL_0 = L_+^\downarrow$ ，其中行列式为 $+1$ ，但 $\Lambda_0^0 \leq -1$ 。回想一下 Minkowski 空间 M 中类空 ($\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu > 0$)，类光 ($\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = 0$) 和类时 ($\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu < 0$) 向量的区别 [参考：下面讨论 (8.4)]。(见 Figure 11.5)。

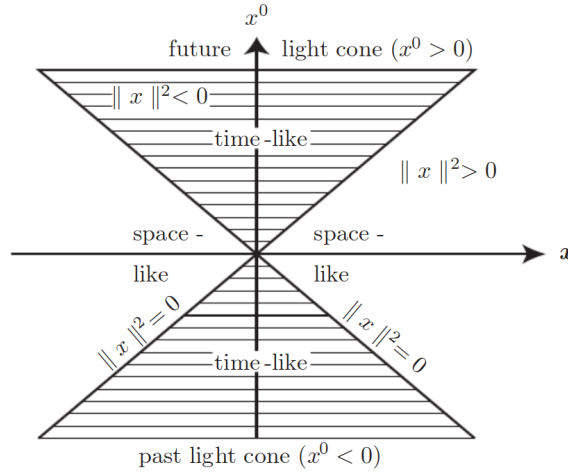


Figure 11.5

我们将使用以下引理 (下面证明)。

引理 11.2 可以通过连续曲线连通到恒元的任意 $\Lambda \in L(4)$ 保留每个半锥形的类时向量，即：这样的 Λ 将未来的光锥向量映射到未来的光锥矢量同时过去的光锥矢量映射到过去的光锥向量。

陪集 stL_0 中的元素可以写为 $ts\Lambda$, $\Lambda \in L_0$ 。由于 Λ 连通到恒元，因此引理 11.2 暗示它

和 $s\Lambda$ 一起将未来光锥中的向量 x 映射到同一半锥中的另一个向量。因此 $ts\Lambda$ 将 x 映射到过去光锥中的向量，因为 t 是时间反转。再次通过引理 11.2, tsL_0 中的元素无法连通到恒元。□
证明：很明显 (见 Figure 11.6)。□

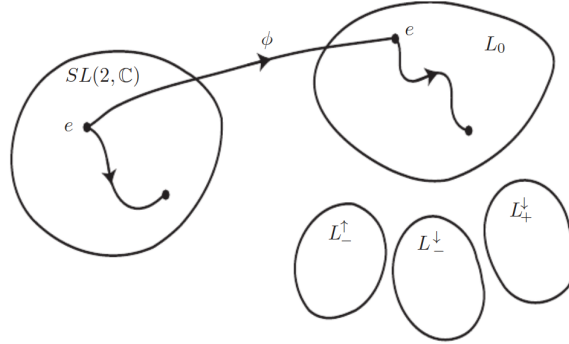


Figure 11.6

我们现在将提供引理 11.1 和 11.2 的证明。证明：假设 $\Lambda \in L_0$ 并且

$$\Lambda e_0 = (x^0, \mathbf{x}) \quad (11.60)$$

其中, $e_0 = (1, 0, 0, 0)$ 和 $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ 。

现在 $\|e_0\|^2 = -1$ 。因此

$$|\mathbf{x}|^2 - (x^0)^2 = -1 \quad (11.61)$$

因为所有 Lorentz 变换都保留了模。在上面的方程中

$$|\mathbf{x}|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad (11.62)$$

是 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ 的范数 (使用 Euclidean 度规)。由于 $SO(3)$ 对 S^2 (the 2-sphere) 的作用是可传递的 [参考：定义 6.7.]，必须有一个旋转 R 将 $\mathbf{x}$ 旋转到 x^3 -轴的方向：

$$R\Lambda e_0 = (x^0, 0, 0, |\mathbf{x}|) \quad (11.63)$$

通过 (11.14)，则有

$$f(R\Lambda e_0) = \begin{pmatrix} x^0 + |\mathbf{x}| & 0 \\ 0 & x^0 - |\mathbf{x}| \end{pmatrix} \quad (11.64)$$

为此，我们将使用 $g''(\gamma)[(11.43)]$ ，其中

$$\gamma^2 = \frac{1}{x^0 + |\mathbf{x}|} = x^0 - |\mathbf{x}| \quad (11.65)$$

[第二个方程从 (11.61) 开始]。 $x^0 + |\mathbf{x}|$ 确保是正的，因为 Λe_0 并且因此 $R\Lambda e_0$ 都在未来光锥里，凭借事实 $\Lambda \in L_0$ 因此保持未来的光锥。方程 (11.43) 和 (11.64) 则给出

$$g''(\gamma)f(R\Lambda e_0)(g''(\gamma))^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(e_0) \quad (11.66)$$

因此

$$\phi(g''(\gamma)) R\Lambda(e_0) = e_0 \quad (11.67)$$

或者通过 (11.50)

$$B'_3 R\Lambda(e_0) = e_0 \quad (11.68)$$

其中, B'_3 是沿 x^3 -轴的 Lorentz boost。由于 $B'_3, R \in L_0$ 并通过假设 $\Lambda \in L_0$, 因此 $\det(B'_3 R\Lambda) = +1$ 。最后一个事实与 (11.68) 一起说明 $B'_3 R\Lambda$ 是 $e_0^\perp = \mathbb{R}^3$ 中的旋转。用 R' 表示这种旋转。由此得出 $B'_3 R\Lambda = R'$, 或 $\Lambda = R^{-1}(B'_3)^{-1}R'$ 。由于 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转的逆是 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转, 并且 Lorentz boost 的逆是 Lorentz boost, 得到了 (11.52) 和随后的引理。□ 证明: 设存在一个 $\Lambda \in L(4)$, 它将未来光锥中的 x 映射到过去光锥中的某个 x' , 并通过连续曲线 $\Lambda(t), 0 \leq t \leq 1$ 连通到恒元, 使得 $\Lambda(0) = e$ 和 $\Lambda(1) = \Lambda$ 。通过连续性, 必须存在 at' , 使得 $\Lambda(t')x = x''$, 其中 x'' 是在类空空间的区域 (Figure 11.5)。但这是不可能的, 因为 Lorentz 变换的定义的性质是它是保持范数的, 并且没有 $\Lambda \in L(4)$ 可以将类时向量映射到类空向量 (反之亦然)。□

我们现在将更详细地考虑 ϕ 下 $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 之间的关系, 以便阐明它们作为流形的拓扑性质。每个 $g \in SU(2)$ 都可以写成

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C} \quad (11.69)$$

其中, 定义性质 $\det(g) = 1$ 要求 $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 。复数量 a 和 b 称为 **Cayley-Klein 参数 (Cayley-Klein parameters)**。设 $a = x^1 - ix^2, b = x^3 - ix^4, x^1, x^2, x^3, x^4 \in \mathbb{R}$ 。上述条件意味着

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1 \quad (11.70)$$

这是嵌入在 $\mathbb{R}^4$ 中的单位 3-球的方程 (在 Euclidean 度规下)。因此 $SU(2)$ 与 S^3 同胚:

$$SU(2) \sim S^3 \quad (11.71)$$

实际上, 在下面的映射

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \xrightarrow{h} (x^1, x^2, x^3, x^4) \quad (11.72)$$

g 和 $-g$ 对应于 S^3 上的对映点 (antipodal points)。拓扑中有一个定理, 即: $n > 2$ 的 S^n 是 **单连通 (simply connected)**。[基本群 $\Pi_1(S^n)$, $n \leq 2$ (关于基本群的讨论和相关的同伦的拓扑概念, 见 Chapter 38)]。因此, $SU(2)$ 作为拓扑流形单连通。我们将证明 $SO(3)$ 不共享这个性质

考虑闭合曲线 $R_3(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 在 $SO(3)$ 中。在 $\phi|_{SU(2)}, g(\theta)$ 下的该曲线的原像, 使得 $g(0) = e$, 由 [参考 (11.56)] 给出

$$g(\theta) = + \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix} \quad (11.73)$$

其中, $g(0)$ 上的上述条件要求上面所有都是 + 符号。根据 (11.72) 给出的映射

$$g(\theta) \xrightarrow{h} \left(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, 0, 0 \right) \quad (11.74)$$

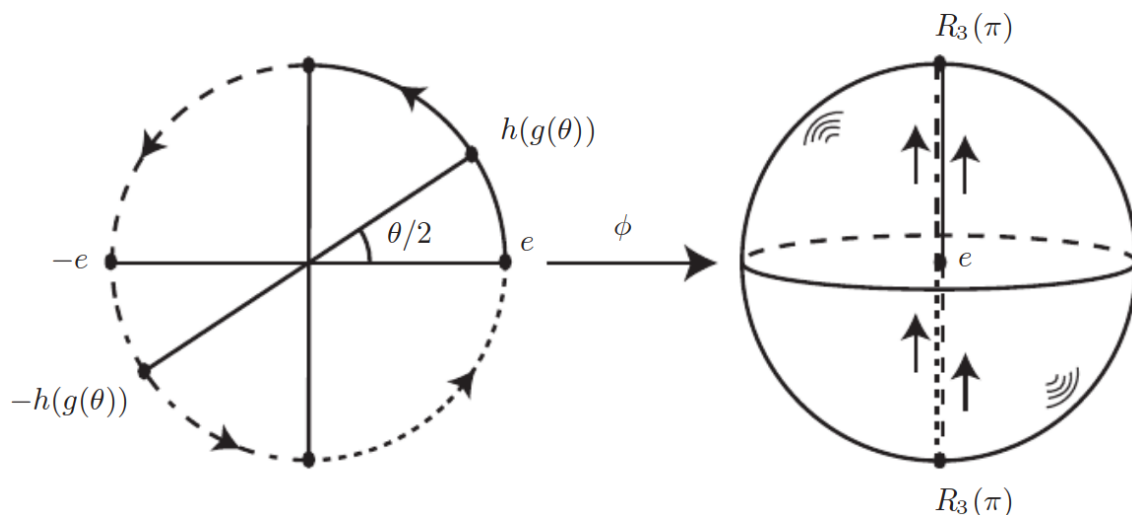


Figure 11.7

当 θ 在 0 到 2π 之间变化时, $h(g(\theta))$ 描绘出半圆 $x^3 = x^4 = 0, x^1 = \cos(\theta/2)$ 对应于单位 3-球面 S^3 在 $\mathbb{R}^4$ 的 x^1x^2 -平面上的投影, 终点对应于 $g(2\pi) = -e$ (见 Figure 11.7, 这也说明 $SO(3)$ 中 $g(\theta)$ 的 ϕ 下的像)。这显然不对应于 $SU(2)$ 中的闭合曲线。因此, 在 $\phi|_{SU(2)}$ 下相应的闭合曲线 $R_3(\theta)$ 在 $SO(3), 0 \leq \theta \leq 2\pi$, (Figure 11.8) 不能收缩到 $SO(3)$ 中的点。

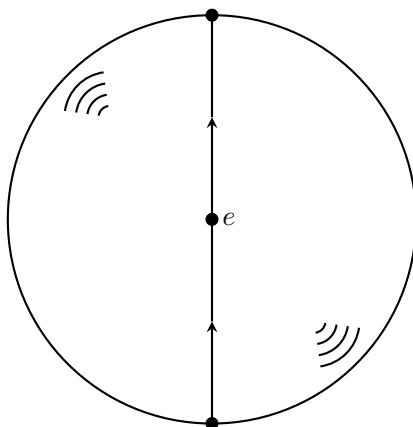


Figure 11.8. 这个闭合曲线在 $SO(3)$ 中不能收缩到一个点

然而, 在 $\phi|_{SU(2)}$ 下 $SO(3)$ (如 Figure 11.9 所示) 中的双环的原像是 $SU(2)$ 中的闭合路径, 对应于 $\mathbb{R}^4$ 中的 x^1x^2 -平面上的整圆 (Figure 11.7)。由于 S^3 是单连通的, 所以 $SU(2)$ 中的闭合路径可以收缩到一点 (在 $SU(2)$ 中)。因此, 在 $SO(3)$ 中, Figure 11.9 的双环也可以缩小到一点。这可以在 Figure 11.10 所示的 $SO(3)$ 中的双环变形序列中以图形方式看出。

作为流形的 $SO(3)$ 是双连通的。 $SU(2)$ 被称为 $SO(3)$ 的泛覆叠群。泛覆叠群的一般定义如下。

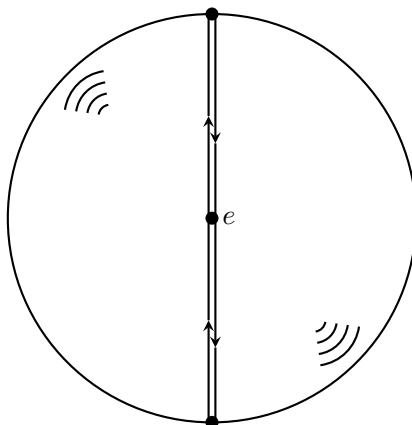


Figure 11.9. 这个闭合曲线在 $SO(3)$ 中能够收缩到一个点

定义 11.3 连通拓扑群 G 的泛覆盖群 (*universal covering group*) 是单连通 (*simply connected*) 的拓扑群 G_{UC} , 使得存在连续同态 $\rho: G_{UC} \rightarrow G$, 其是局部一对一的。(见 Figure 11.11)

每个连通的拓扑组 (特别是每个连接的 Lie 群) 都存在一个泛覆盖群, 并且在同构中是唯一的。

更多地 (这里省略了证明)

$$\frac{G_{UC}}{\ker(\rho)} \sim G \quad (11.75)$$

其中, $\ker(\rho)$ 是映射 ρ 的核由下式给定

$$\ker(\rho) = \{g \in G_{UC} | \rho(g) = e \in G\} \quad (11.76)$$

我们在本章前面的讨论实际上表明 $SL(2, \mathbb{C})$ 是 proper orthochronous Lorentz 群 $SO(1, 3)^\uparrow$ (或者 L_0) 的通用覆盖群。

$SL(2, \mathbb{C})$ 的物理意义在于基本粒子根据它们的表示变换。对于自旋等于 $\frac{1}{2}$ 的奇数倍的粒子, 例如电子 (自旋 $\frac{1}{2}$), 这些被称为物理学中的旋量表示 (*spinor representation*)。

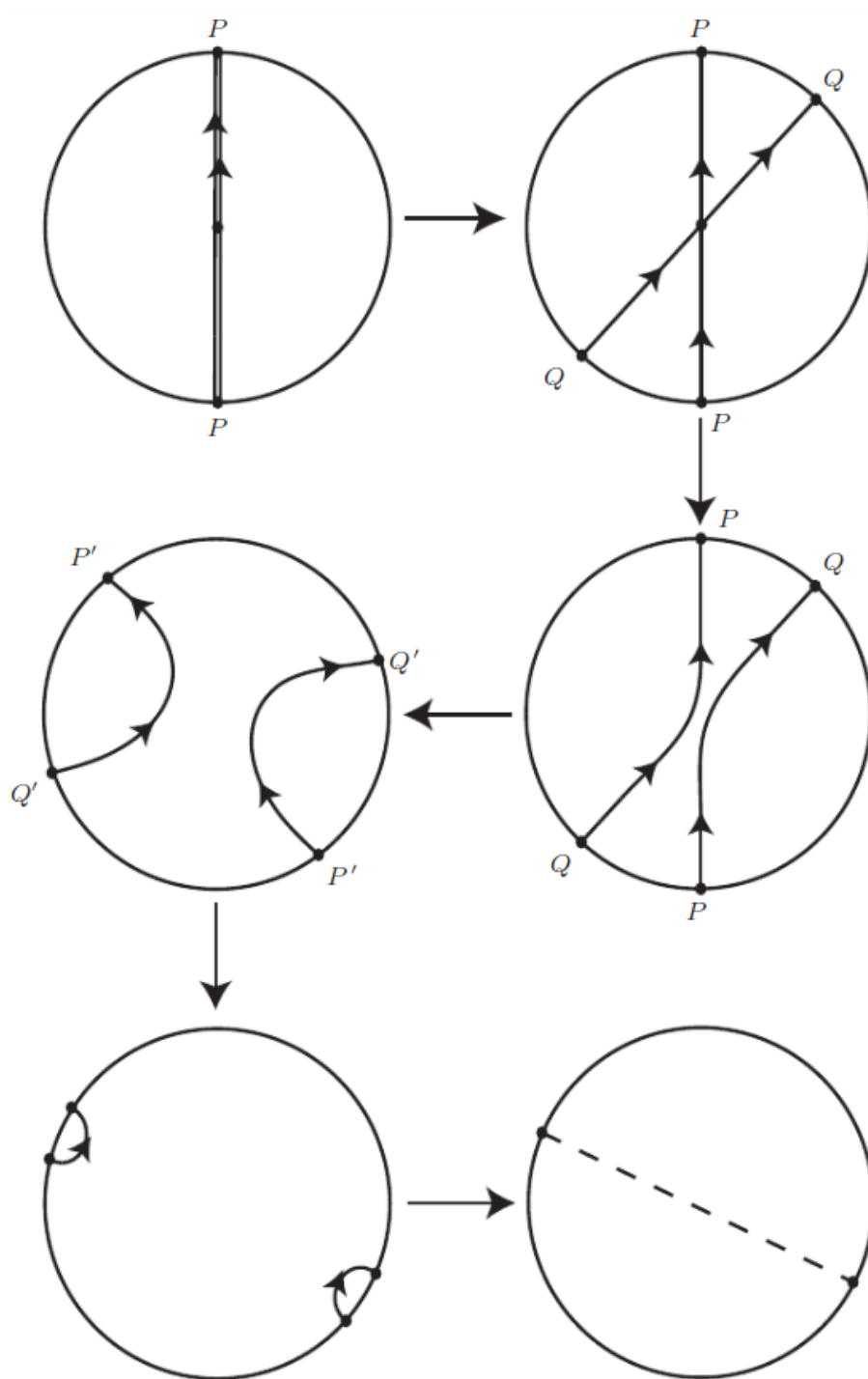


Figure 11.10

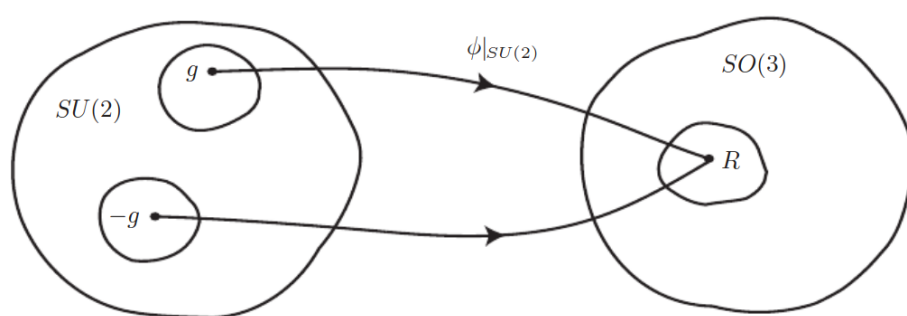


Figure 11.11

12. 量子理论中的 Dirac 括号记号

Dirac 符号在 Chapter 8 中进行了简要介绍。由于它在物理学文献中的几乎普遍存在及其优雅，我们想详细阐述它的用法。

在量子力学中，我们感兴趣的向量空间通常是无限维的，称为 Hilbert 空间。这里我们不会关注由于这些空间的无限维度而产生的技术上的复杂性。到目前为止所引入的所有向量空间概念都没有明确提及空间的维数，以及许多重要的事实，推广到 Hilbert 空间的情况。

给定一个有限维的么正空间 V 及其对偶空间 V^* ， V 中定义的内积可以得到共轭同构 $G: V \rightarrow V^*$ [参考 (8.26b)]。将这个事实推广到无限维 Hilbert 空间被称为 **Riesz 定理 (Riesz Theorem)**。Dirac 括号记号本质上是一种非常方便的符号体系，它编码该定理的数学内容。

定理 12.1 — Riesz 定理. 令 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间， $\mathcal{H}^*$ 是它的对偶。则 hermitian 内积 $(\cdot, \cdot)$ [满足 (8.27) 和 (8.28)] 得到一个共轭同构 $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ ：

$$G(\psi) = \psi^* \in \mathcal{H}^* \quad (12.1)$$

使得

$$\text{对于任意 } \phi \in \mathcal{H}, \quad \psi^*(\phi) = \langle \phi, \psi^* \rangle = (\phi, \psi) \quad (12.2)$$

并且

$$G(\alpha\psi) = \bar{\alpha}\psi^*, \quad \alpha \in \mathbb{C} \quad (12.3)$$

证明：我们首先注意到 (12.3) 定义的 ψ^* 是 $\mathcal{H}$ 上的连续线性函数。事实上，对于任何 $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\psi^*(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = (\alpha\phi_1 + \beta\phi_2, \psi) = \alpha(\phi_1, \psi) + \beta(\phi_2, \psi) = \alpha\psi^*(\phi_1) + \beta\psi^*(\phi_2)$$

其中, 第二个方程来自 (8.28a)。 ψ^* 的连续性来自

$$|\psi^*(\phi)| = |(\phi, \psi)| \leq (\phi, \phi)(\psi, \psi)$$

现在选择任意非零 $\psi^* \in \mathcal{H}^*$ 。我们希望证明存在唯一的 $\psi \in \mathcal{H}$, 使得对于任意的 $\phi \in \mathcal{H}$, 有 $\psi^*(\phi) = (\phi, \psi)$ 。

设 $\ker(\psi^*) \subset \mathcal{H}$ 是 ψ^* 的核:

$$\ker(\psi^*) = \{\phi \in \mathcal{H} | \psi^*(\phi) = 0\}$$

集合 $\ker(\psi^*)$ 是 $\mathcal{H}$ 的封闭子空间。实际上, 考虑序列 $\{\phi_n\} \subset \ker(\psi^*)$ 。因此对于任意 n , $\psi^*(\phi_n) = 0$ 。如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi$, 那么 ψ^* 的连续性意味着 $\psi^*(\phi) = 0$ 。

现在存在一个非零 $\phi_0 \in (\ker(\psi^*))^\perp$ [ϕ_0 是 $\ker(\psi^*)$ 的正交分量]。否则 $(\ker(\psi^*))^\perp = \{0\}$, 说明 $\ker(\psi^*) = \mathcal{H}$ 。但这是不可能的, 因为通过假设 ψ^* 不为零。由于 $\psi^*(\phi_0) \neq 0$, 我们可以在不失一般性的情况下令 $\psi^*(\phi_0) = 1$ [通过将 ϕ_0 替换为 $\phi_0/\psi^*(\phi_0)$]。则

$$\text{对于任意 } \phi \in \mathcal{H}, \quad \psi^*(\phi - \psi^*(\phi)\phi_0) = 0$$

这意味着

$$\phi' \equiv \phi - \psi^*(\phi)\phi_0 \in \ker(\psi^*)$$

因此我们有: 对于任意的 $\phi \in \mathcal{H}$, 有正交分解

$$\phi = \phi' + \psi^*(\phi)\phi_0; \quad \phi' \in \ker(\psi^*), \phi_0 \in (\ker(\psi^*))^\perp$$

使用 hermitian 内积 (ϕ, ϕ_0) , 我们有

$$(\phi, \phi_0) = (\phi', \phi_0) + \psi^*(\phi)(\phi_0, \phi_0) = \psi^*(\phi)(\phi_0, \phi_0)$$

所寻找的 $\psi \in \mathcal{H}$ 由下面给出

$$\psi = \frac{\phi_0}{(\phi_0, \phi_0)}$$

实际上, (12.2) 来自

$$\psi^*(\phi) = \frac{(\phi, \phi_0)}{(\phi_0, \phi_0)} = (\phi, \psi)$$

ψ 的唯一性可以如下建立。假设存在一个 $\psi^* \neq \psi$, 使得

$$\text{对于任意 } \phi \in \mathcal{H}, \quad (\phi, \psi) = (\phi, \psi')$$

则

$$\text{对于任意 } \phi \in \mathcal{H}, \quad (\phi, \psi - \psi') = 0$$

选择 $\phi = \psi - \psi'$, 我们有

$$(\psi - \psi', \psi - \psi') = 0$$

这说明了 $\psi = \psi'$ 。

最后, (8.28b) 意味着: 对于任意 $\phi \in \mathcal{H}$, 有

$$G(\alpha\psi)(\phi) = (\phi, \alpha\psi) = \overline{\alpha}(\phi, \psi) = \overline{\alpha}\psi^*(\phi) = \overline{\alpha}G(\psi)(\phi)$$

因此得到 (12.3)。 $\square$

在 Dirac 符号中, 向量 $\psi \in \mathcal{H}$ 标记为 $|\psi\rangle$, 称为 **ket 向量 (ket vector)**, 或简称为 **ket**。Dirac 也通过 $\langle\psi|$ 标记 ψ^* , 并将其称为 **bra 向量 (bra vector)**, 或简称为 **bra**。内积 $(\phi, \psi) = \langle\phi, \psi^*\rangle$ 则用 $\langle\psi|\phi\rangle$ 表示, 即

$$\langle\psi|\phi\rangle \equiv (\phi, \psi) \quad (12.4)$$

如前所述, 乘积中的顺序从使用普通括号的数学符号转换为 Dirac 符号。再次注意, $\langle\psi|\phi\rangle$ 通常是复数, $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ 和 $\langle\psi| \in \mathcal{H}^*$ 。则方程 (8.28a) 和 (8.28b) 可以用 Dirac 符号分别表示为

$$\langle\phi|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\rangle = \alpha_1 \langle\phi|\psi_1\rangle + \alpha_2 \langle\phi|\psi_2\rangle \quad (12.5a)$$

和

$$\langle\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2|\phi\rangle = \overline{\alpha_1} \langle\psi_1|\phi\rangle + \overline{\alpha_2} \langle\psi_2|\phi\rangle \quad (12.5b)$$

这些条件分别称为内积相对于 ket 和 bra 的线性条件。共轭同构 G 的**共轭线性 (conjugate linearity)** 的性质表示为

$$|\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2\rangle \mapsto \overline{\alpha_1} \langle\psi_1| + \overline{\alpha_2} \langle\psi_2| \quad (12.6)$$

内积的 **hermitian 对称性 (hermitian symmetry)**[参考 (8.27)] 的性质可以写成

$$\langle\phi|\psi\rangle = \overline{\langle\psi|\phi\rangle} \quad (12.7)$$

如果向量 $|\psi\rangle$ 表示**物理状态 (physical state)**, 则范数 $\langle\psi|\psi\rangle$ 被解释为量子理论中的概率, 因此必须大于或等于零:

$$\text{对于物理状态} \quad \langle\psi|\psi\rangle \geq 0$$

然而, 在量子场论中, ghost 态可能进入数学形式。这些状态具有负范数:

$$\text{对于 ghost 状态} \quad \langle\psi|\psi\rangle < 0$$

设 $\{e_i\}, i = 1, 2, \dots, \infty$, 是 $\mathcal{H}$ 的一组标准正交基。则任意 $\psi \in \mathcal{H}$ 可以写成

$$\psi = \psi^i e_i \quad (12.8)$$

其中

$$\psi^i = \langle\psi, e^{*i}\rangle = (\psi, e_i) \quad (12.9)$$

并且 $\{e^{*i}\}$ 是 $\{e_i\}$ 在 $\mathcal{H}^*$ 中的对偶基。注意 $\{e_i\}$ 的标准正交性保证 $G^{-1}(e^{*i}) = e_i$, [见前面

的讨论 (10.20)]。在 Dirac 记号中, 方程 (12.8) 和 (12.9) 可以组合:

$$|\psi\rangle = \sum_i \langle e_i | \psi \rangle |e_i\rangle \quad (12.10)$$

或者等价地

$$|\psi\rangle = \sum_i |e_i\rangle \langle e_i | \psi \rangle \quad (12.11)$$

由于 $|\psi\rangle$ 总是可以写成 $1 \cdot |\psi\rangle$, 其中 1 表示单位算符, 我们可以形式上写为

$$\sum_i |e_i\rangle \langle e_i| = 1 \quad (12.12)$$

或者等价地

$$\sum_i P_i = 1 \quad (12.13)$$

其中

$$P_i \equiv |e_i\rangle \langle e_i| \quad (12.14)$$

是由 $|e_i\rangle$ 生成子空间的**投影算子 (projection operator)**。方程 (12.12) 被称为标准正交基 $\{e_i\}$ 的**完备性条件 (completeness condition)**。投影算子 P_i 是**幂等 (idempotent)**:

$$(P_i)^2 = P_i$$

实际上

$$(P_i)^2 = |e_i\rangle \langle e_i | e_i \rangle \langle e_i| = |e_i\rangle \langle e_i| = P_i \quad (12.15)$$

可以很容易地看出它是 hermitian[见下面 (12.30)]。通过标准正交基 $\{e_i\}$ 给出的有限子集 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 生成的有限维子空间上的投影由下式给出

$$P = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle \langle e_i| \quad (12.16)$$

方程 (12.22)(完备性条件) 在量子力学计算中非常有用。请注意, $|\phi\rangle\langle\psi|$ 的表达方式, 其中 $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$, 表示线性算符, 但在 $|\phi\rangle \neq |\psi\rangle$ 时不是投影算符。

现在考虑一个任意的线性算符 A 。它作用在 $\text{ket}|\psi\rangle$ 上写成 $A|\psi\rangle$ 。则内积 $(A\psi, \phi)$ 在 Dirac 符号中为 $\langle\phi|A|\psi\rangle$:

$$\langle\phi|A|\psi\rangle \equiv (A\psi, \phi) \quad (12.17)$$

这种记号说明, 在“三明治”位置, A 也可以认为是向左作用。实际上, 通过 (10.1),

$$\langle\phi|A|\psi\rangle = (A\psi, \phi) = (\psi, A^\dagger\phi) = \langle A^\dagger\phi|\psi\rangle \quad (12.18)$$

因此

$$\langle\phi|A = \langle A^\dagger\phi| \quad (12.19)$$

是 bra 向量共轭于 $|A^\dagger\phi\rangle$, 或 $\mathcal{H}^*$ 中的对偶向量通过共轭同构 G 映射到作用在 $|A^\dagger\phi\rangle$ 。它遵

循

$$\langle \phi | A^\dagger = \langle A\phi | \quad (12.20)$$

或者, 在 G 下,

$$A|\phi\rangle \mapsto \langle \phi | A^\dagger \quad (12.21)$$

现在, (12.20) 说明: 对于任意 $|\psi\rangle$, 有

$$\langle \phi | A^\dagger | \psi \rangle = \langle A\phi | \psi \rangle \quad (12.22)$$

因此, 通过 (12.7)

$$\overline{\langle \psi | A | \phi \rangle} = \langle \phi | A^\dagger | \psi \rangle \quad (12.23)$$

依赖于标准正交基 $\{e_i\}$ 选择的 A 的矩阵表示是什么? 类似于 (1.16), 我们用 Dirac 符号写

$$A|e_i\rangle = a_i^k |e_k\rangle \quad (12.24)$$

通过给左边“乘” $\langle e_j|$, 我们有

$$\langle e_j | A | e_i \rangle = a_i^k \langle e_j | e_k \rangle = \delta_{jk} a_i^k \quad (12.25)$$

因此

$$a_i^j = \langle e_j | A | e_i \rangle \quad (12.26)$$

练习 12.1 通过对单位算符使用完备性条件 (12.12), 以使单位算符作用在 $A|e_i\rangle$, 获得上述等式 [(12.26)]。

练习 12.2 设 $A|\psi\rangle = |\phi\rangle$, 并如下所示展开 $|\psi\rangle$ 和 $|\phi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \psi^i |e_i\rangle \quad (12.27)$$

$$|\phi\rangle = \phi^i |e_i\rangle \quad (12.28)$$

运用完备性条件 (12.12) 来说明

$$\phi^i = a_j^i \psi^j \quad (12.29)$$

其中, a_i^j 通过 (12.26) 给出。

练习 12.3 从对于任意 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}$ 的 $\langle \alpha | (|\phi\rangle\langle\psi|)^\dagger | \beta \rangle$ 的表达式开始, 运用 (12.7) 和 (12.23) 来说明: 对于任意 $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$, 有

$$(|\phi\rangle\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle\langle\phi| \quad (12.30)$$

13. 量子力学中的简谐振子

毫无疑问，量子力学简谐振子是所有理论物理学中最基本和最深远的例子之一。Dirac 的解决方案也体现了极致的优雅。

对于质量为 m 且频率为 ω 的一维振子，Hamilton 量 (算符) 由下式给出

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad (13.1)$$

其中， p 是线动量 (算符)[参考 (4.4)]， x 是振子的坐标 (算符)。通过定义无量纲坐标 Q 和无量纲动量 P 将会很方便

$$\begin{cases} Q \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \\ P \equiv \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p \end{cases} \quad (13.2)$$

则 (8.1) 中的 Hamilton 量由下式给出

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (P^2 + Q^2) \quad (13.3)$$

练习 13.1 验证 (13.3)

现在定义下面一组算符：

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) \quad (13.4)$$

和它的 hermitian 伴随：

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) \quad (13.5)$$

事实上，(13.5) 的等式右边是 (13.4) 的等式右边的 hermitian 伴随，这是因为 Q 和 P 都是

hermitian, 以及方程 (10.4) 和 (10.5)。用 a 和 $a^\dagger$ 来求解 Q 和 P , 我们有

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad P = \frac{-i}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger) \quad (13.6)$$

从那以后

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger), \quad p = \sqrt{m\hbar\omega} \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)(a - a^\dagger) \quad (13.7)$$

关键条件是算符 x 和 p 被要求满足量子对易关系 (4.12):

$$[x, p] = i\hbar \quad (13.8)$$

也就意味着

$$[Q, P] = i \quad (13.9)$$

因此

$$[a, a^\dagger] = \frac{1}{2}[Q + iP, Q - iP] = \frac{i}{2}([P, Q] - [Q, P]) = \frac{i}{2}(-i - (-i)) = 1 \quad (13.10)$$

其中由 $\{P, Q, \mathbb{I}\}$ 或 $\{a, a^\dagger, \mathbb{I}\}$ 生成一个集合, 其中 $\mathbb{I}$ 是单位算符, 构成一个复 Lie 代数, 称为 **Heisenberg 代数 (Heisenberg algebra)**。对于 Euclidean 位置坐标 x^i 和动量 p^i , 对应于算符 a^i 和 $(a^i)^\dagger$ 。从 (4.12) 开始, 对于这些更广义的对易关系是:

$$\begin{aligned} [a^i, (a^j)^\dagger] &= \delta^{ij} \\ [a^i, a^j] &= [(a^i)^\dagger, (a^j)^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (13.11)$$

回到一维振子, 很容易看出

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \quad (13.12)$$

练习 13.2 通过运用 (13.3) 和对易关系 (13.9) 或 (13.11) 验证 (13.12)。

练习 13.3 验证 (13.12) 中给出的 H 是 hermitian 的。

我们问题的解决方案归结为找到 H 的**频谱 (spectrum)** 的数学问题, 即找到所有向量 (在描述振子的向量的 Hilbert 空间中) $|\phi_n\rangle$ 和所有实数 E_n 使得

$$H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle \quad (13.13)$$

所有 E_n 的集合称为 H 的频谱。每个 E_n 称为算符 H 的**本征值 (eigenvalue)**, 并且 $|\phi_n\rangle$ 称为属于本征值 E_n 的**本征向量 (eigenvector)** 或本征态。

让我们一起讨论所谓的**本征值问题 (eigenvalue problem)**, 这将在 Chapter 17 中详细介绍。

H 的所有能量本征值都是实的, 因为 H 是 hermitian。事实上, hermitian 算符的本征值

总是实的。简单的证明如下。假设对于 $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$, ($|\phi\rangle \neq 0$), 有 $A = A^\dagger$ 和 $A|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle$ 。则

$$\langle\phi|A|\phi\rangle = \overline{\langle\phi|A^\dagger|\phi\rangle} = \overline{\langle\phi|A|\phi\rangle} \quad (13.14)$$

其中第一个等号来自于 (12.23), 第二个等号来自于 $A = A^\dagger$ 的事实。因此说明了

$$\lambda\langle\phi|\phi\rangle = \bar{\lambda}\overline{\langle\phi|\phi\rangle} = \bar{\lambda}\langle\phi|\phi\rangle \quad (13.15)$$

并且由此, 因为 $\langle\phi|\phi\rangle \neq 0$, $\lambda = \bar{\lambda}$ 。

关于 hermitian 算符的另一个重要事实是属于 hermitian 算符的不同本征值的本征向量彼此正交。这种说法的证明也很简单。假设 $A = A^\dagger$ 和

$$A|\phi_1\rangle = \lambda_1|\phi_1\rangle, \quad A|\phi_2\rangle = \lambda_2|\phi_2\rangle, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (13.16)$$

因为 A 是 hermitian 的, 我们从上面知道 λ_1 和 λ_2 都是实的。因此

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\phi_1|A|\phi_2\rangle - \overline{\langle\phi_2|A|\phi_1\rangle} = \lambda_2\langle\phi_1|\phi_2\rangle - \lambda_1\overline{\langle\phi_2|\phi_1\rangle} \\ &= \lambda_2\langle\phi_1|\phi_2\rangle - \lambda_1\langle\phi_1|\phi_2\rangle = (\lambda_2 - \lambda_1)\langle\phi_1|\phi_2\rangle \end{aligned} \quad (13.17)$$

因为通过假设 $\lambda_2 \neq \lambda_1$, $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0$, 即: $|\phi_1\rangle$ 和 $|\phi_2\rangle$ 正交。

通常, 不同的本征向量可以属于一个线性算符的相同本征值。在这种情况下, 我们可以说是**退化本征值 (degenerate eigenvalue)**。

我们现在将回到简谐振子问题的解上。这个问题中相关的 Hilbert 空间是**平方可积函数 (square integrable functions)** $\psi(x)$ 的无限维向量空间:

$$\mathcal{H} = \left\{ \psi(x) \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 < \infty \right. \right\} \quad (13.18)$$

通过著名的 Fischer-Riesz 定理 (见 J. von Neumann 1955) $\mathcal{H}$ 与复数的无限元的集合 $(z_1, z_2, z_3, \dots)$ 同构, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ 是有限的。换句话说

$$\mathcal{H} \sim \mathcal{H}' = \left\{ (z_1, z_2, \dots) \left| z_i \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 < \infty \right. \right\} \quad (13.19)$$

如果我们分别定义 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 中的 hermitian 内积:

$$\langle\phi(x)|\psi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \bar{\phi}(x)\psi(x) \quad (13.20)$$

$$\langle w|z\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_n z_n \quad (13.21)$$

同构实际上是**等距同构 (isometry)**(保持范数)。换句话说, 如果在同构下 $\psi(x) \leftrightarrow (z_1, z_2, \dots)$, 则 $\|\psi(x)\|^2 = \|z\|^2$ 或

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \quad (13.22)$$

我们不会直接对 $\mathcal{H}$ 进行操作，而是操作 $\mathcal{H}'$ 。

让我们为 $\mathcal{H}'$ 选择标准基 (standard basis):

$$\left\{ \begin{array}{l} |e_1\rangle = (1, 0, 0, \dots) \equiv |0\rangle \\ |e_2\rangle = (0, 1, 0, \dots) \equiv |1\rangle \\ \vdots \\ |e_i\rangle = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \equiv |i-1\rangle \\ \vdots \end{array} \right. \quad (13.23)$$

在 $|e_i\rangle$ 的方程中，数字 1 出现在无限行数字的第 i 个条目中。显然是一组标准正交基。我们声明，就此基而言，

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} \quad (13.24)$$

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix} = a^T \quad (13.25)$$

这两个方程说明

$$a^\dagger a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} \quad (13.26)$$

因此

$$a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (13.27)$$

其中， $|n\rangle = |e_{n+1}\rangle$ 是定义在 (13.23) 中的基的状态 (basis state)。因此， $|n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots$ 是本征值为 n 的 $a^\dagger a$ 的本征态。由于这个原因， $a^\dagger a$ 称为**粒子数算符 (number operator)**。方程 (13.12) 则给出

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 7 & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} \quad (13.28)$$

这说明

$$H|n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13.29)$$

所以能量本征值为

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13.30)$$

状态 $|0\rangle$ 称为**基态 (ground state)**。注意，它不是 $\mathcal{H}'$ 中的零向量 $(0, 0, 0, \dots)$ (全为零)。方程 (13.29) 表明简谐振子的所有能量本征值都是**非简并 (non-degenerate)**。在物理学文献中，归一化的本征态 $|n\rangle$ 被称为**粒子数状态 (number state)**， $a^\dagger a$ 的本征值 n 被称为**占据数 (occupation number)**，而由 $|n\rangle$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$ 生成的 Hilbert 空间被称为 **Fock 空间 (Fock space)**。显然， n 的物理解释是某种量子或激发粒子的数量。

运用 (12.29)， a 和 $a^\dagger$ 作用在 $|n\rangle$ 上的效果可以表示成矩阵乘法：

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{n}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \end{aligned} \quad (13.31)$$

其中，在第一个方程的等式右边的行矩阵中，1 出现在第 $(n+1)$ 个条目中，而在第二个等号的等式右边的行矩阵中，1 出现在第 n 个条目中。因此

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13.32)$$

$$a|0\rangle = 0 \quad (13.33)$$

类似地，我们可以看到

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13.34)$$

基于上面的方程，算符 a 和 $a^\dagger$ 分别称为**湮灭 (annihilation)** 和**产生算符 (creation operator)**。开始于基态 $|0\rangle$ 并且反复运用 (13.34)，我们可以得到

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13.35)$$

练习 13.4 运用 (13.23) 和 (13.25) 去验证 (13.34)

练习 13.5 通过运用 (13.34) 去验证 (13.35)

认识到描述产生和湮灭算符的作用 [(13.32) 到 (13.34)] 和方程 (13.35) 方程很重要，它们展示了如何从基态构造归一化的 n 粒子状态 (也称为**真空状态 (vacuum state)**)，因为其占据

数(为零), 都是对易关系 (13.11) 的直接结果。特别是 (13.35) 表明量子态有可能使占据数 n 等于任何非负整数, 只要对应的产生和湮灭算符产生满足通过 (13.11) 给出的乘法规则 (对易关系) 的代数。产生和湮灭算符满足 (13.11) 的对易规则的粒子 (或任何基本激发) 称为**玻色子 (boson)**。玻色子是自旋整数倍的粒子, 并且满足所谓的 **Bose-Einstein 统计 (Bose-Einstein statistic)**, 这是狭义相对论的结果。

另一类粒子被称为**费米子 (fermion)**, 这是一个令人惊奇的自然事实, 正如我们所知, 世界只有玻色子和费米子, 而不是其他东西。同样, 由于狭义相对论的要求, 费米子是自旋半整数倍的粒子, 并且满足所谓的 **Fermi-Dirac 统计 (Fermi-Dirac statistic)**。后者的结果之一是 **Pauli 不相容原理 (Pauli exclusion principle)**, 该原则规定费米子量子态的占据数为 0 或 1, 与玻色子情况相反, 其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ 。费米子产生和湮灭算符满足与 (13.11) 乘法规则不同的运算规则。我们对费米子采用**反对易 (anti-commutation)** 规则, 而不是玻色子的对易规则:

$$\begin{aligned} \{a^i, (a^j)^\dagger\} &= \delta^{ij} \\ \{a^i, a^j\} &= \{(a^i)^\dagger, (a^j)^\dagger\} = 0 \end{aligned} \quad (13.36)$$

其中, $\{A, B\} \equiv AB + BA$ 。第二个方程直接说明了 $(a^\dagger)^2 = 0$ 。对于费米子, 我们仍然有

$$a|0\rangle = 0, \quad a|1\rangle = |0\rangle, \quad a^\dagger|0\rangle = |1\rangle \quad (13.37)$$

练习 13.6 验证 (13.37) 是否和 (13.36) 一致。

方程 (13.36) 称为费米子产生和湮灭算符的反对易关系 (anticommutation relation)(见 Chapter 27)。

根据**标准模型 (standard model)**, 世界由**夸克 (quark)** 和**轻子 (lepton)** 组成, 它们都是费米子, 还有**规范玻色子 (gauge boson)**, 它们负责基本力。例如, **光子 (photon)** 是负责电磁力的规范玻色子, 最著名的轻子是电子。

在相对论量子电动力学中, 我们有所谓的光子**纵向模式 (longitudinal mode)**, 由产生和湮灭算符 $(a)^\dagger$ 和 a^0 的类时分量描述 (记得在狭义相对论中, 上标 0 指的是时间分量)。**横向模式 (transverse mode)** 由 $(a^i)^\dagger$ 和 $a^i, i = 1, 2, 3$ 描述。不同于 (13.11), 我们有

$$\begin{aligned} [a^\mu, (a^\nu)^\dagger] &= \eta^{\mu\nu} \\ [a^\mu, a^\nu] &= [(a^\mu)^\dagger, (a^\nu)^\dagger] = 0 \end{aligned} \quad (13.38)$$

其中, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, 并且 $\eta^{\mu\nu}$ = Lorentz 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 的逆 = $\eta_{\mu\nu}$ 。[参考 (2.20) 和 (8.3)]。

纵向光子有一个特点。由于 $\eta^{00} = \eta_{00} = -1$, $[a^0, (a^0)^\dagger] = -1$, 说明了

$$a^0 (a^0)^\dagger = -1 + (a^0)^\dagger a^0 \quad (13.39)$$

因此, 单光子态 $(a^0)^\dagger |0\rangle$ 由 $\langle 0 | a^0 (a^0)^\dagger | 0 \rangle$ 给出的范数是 -1。如前所述, 这些非物理负范数状态称为 **ghost 状态 (ghost state)**。在 Lorentz 不变场论的量子化中, 必须非常小心地处理它们: 这些状态不会对物理可观测量产生任何影响。

14. Fourier 级数和 Fourier 变换, Dirac Delta 函数, C

理论物理中一个特别重要的 Hilbert 空间是具有 hermitian 内积分段连续函数的周期性空间

$$\langle g|f\rangle = \int_a^b dx \, \bar{g}(x)f(x) \quad (14.1)$$

其中, $[a, b]$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的一个函数周期:

$$f(x) = f(x + n(b - a)), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14.2)$$

所有 $f \in \mathcal{H}$ 都应该是实变量的复值函数 ($f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$)。我们今后将假设 $[a, b] = [0, 2\pi]$, 一般区间可通过线性变换得到

$$x \in [0, 2\pi] \mapsto a + x \left(\frac{b - a}{2\pi} \right) \in [a, b] \quad (14.3)$$

最重要的例子是 $\sin nx$ 和 $\cos nx, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

让我们考虑标准正交集合

$$|e_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14.4)$$

这个集合的标准正交性可以被很容易地验证。实际上, 根据 (14.1)

$$\langle e_m|e_n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \, e^{-imx} e^{inx} = \delta_{mn} \quad (14.5)$$

Fourier 级数理论的重要事实 (我们在这里不会证明) 是 (14.4) 中规定的标准正交集合是完整

的。在 Dirac 符号中, 这个条件表示为 [见 (12.12)]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |e_n\rangle \langle e_n| = 1 \quad (14.6)$$

因此, 任何 $|f\rangle = f(x) \in \mathcal{H}$, 可以展开成

$$f(x) = |f\rangle = 1 \cdot |f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e_n\rangle \langle e_n|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle e_n|f\rangle |e_n\rangle$$

或者

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \quad (14.7)$$

其中, **Fourier 系数 (Fourier coefficient)** f_n 由下式给出

$$f_n \equiv \langle e_n|f\rangle$$

或者

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} dx e^{-inx} f(x) \quad (14.8)$$

严格来说, (14.7) 中的等式并不意味着逐点相等 (在每个点 x 都相等)。它仅在点 x 处成立, 其中 $f(x)$ 是连续的。总的来说, 我们有**范数收敛 (norm convergence)** 上的等式:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f(x) - S_N(x)\| = 0 \quad (14.9)$$

其中

$$S_N = \sum_{m=-N}^N f_m \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} \quad (14.10)$$

并且从 (14.1), 函数 $g(x) \in \mathcal{H}$ 的范数 $\|g\|$ 由下式给出

$$\|g\|^2 = \int_0^{2\pi} dx |g(x)|^2 \quad (14.11)$$

方程 (14.7) 和 (14.8) 给出的 Fourier 级数的结果是前一章提到的 Fischer-Riesz 定理的一个特例。

运用 $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$, 复 Fourier 级数 (14.7) 可以写成 $\sin$ 和 $\cos$ 的形式。让我们进一步假设 $f(x)$ 是实函数。则从 (14.7)

$$\begin{aligned} \overline{f(x)} &= \overline{f_0} + \overline{f_1} \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}} + \cdots + \overline{f_n} \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} + \cdots + \overline{f_{-1}} \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}} + \cdots + \overline{f_{-n}} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} + \cdots \\ &= f(x) \\ &= f_0 + f_1 \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}} + \cdots + f_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} + \cdots + f_{-1} \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}} + \cdots + f_{-n} \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} + \cdots \end{aligned} \quad (14.12)$$

由于集合 $\{|e_n\rangle\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 是线性无关的, 我们可令对于 (14.12) 中的每个

n 的 $|e_n\rangle$ 的系数都相等, 并因此得到

$$f_0 = \overline{f_0}, f_{-1} = \overline{f_1}, \dots, f_{-n} = \overline{f_n}, \dots \quad (14.13)$$

因此, 具有周期 $[0, 2\pi]$ 的实际周期函数可以展开为

$$f(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} + \text{c.c.} \right) \quad (14.14)$$

其中 c.c. 表示复共轭。记作

$$f_n = c_n - id_n \quad (14.15)$$

其中, c_n, d_n 是实数, $f(x)$ 可以在经典的 Fourier 展开中进行投影

$$f(x) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (14.16)$$

其中, $a_n = \frac{2c_n}{\sqrt{2\pi}}, b_n = \frac{2d_n}{\sqrt{2\pi}}$ 和 f_0 都是实数。运用方程 (14.8) 和 (14.15), Fourier 系数 a_n 和 b_n 由下式给出

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos nx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin nx \quad (14.17)$$

练习 14.1 找到见 Figure 14.1 所示的周期函数的形如 (14.16) 的 Fourier 展开。

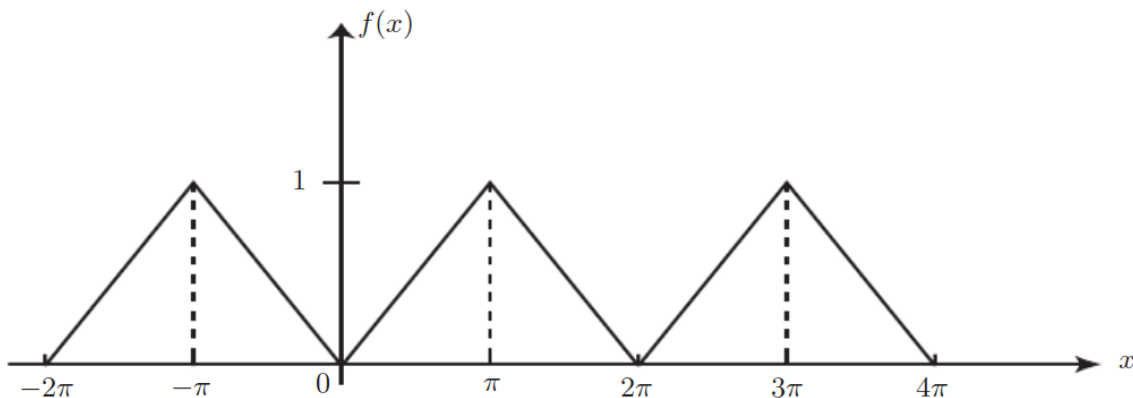


Figure 14.1

从 (14.17) 可以清楚地看出, 如果 $f(x)$ 对于 $x = \pi$ 是偶数, 则 $b_n = 0$, 并且对于 $x = \pi$, 如果 $f(x)$ 是奇数, 则 $a_n = f_0 = 0$ 。因此

$$f(x) = \begin{cases} f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx & , \quad f(x) \text{ 为偶数, 依赖于 } x = \pi \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx & , \quad f(x) \text{ 为奇数, 依赖于 } x = \pi \end{cases} \quad (14.18)$$

在变成连续极限时, Fourier 级数 (14.7) 被 **Fourier 积分 (Fourier integral)** 代替, (14.7) 和 (14.8) 分别被替换为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx} \quad (14.19)$$

并且

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \quad (14.20)$$

函数 $f(x)$ 和 $F(k)$ 被称为彼此的 **Fourier 变换 (Fourier transform)**。当 $f(x)$ 不是 x 的周期函数时, 或者等价地, 当周期 $[0, 2\pi] \rightarrow (-\infty, \infty)$ 时, 使用公式 (14.19) 代替 (14.7)。 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $F(k)$ 可以看作波数为 k 的谐波振荡的振幅。

Fourier 变换在解微分方程时非常重要。例如, 对具有常系数的常微分方程使用变换, 将微分方程转化为代数方程。为了了解这是如何处理的, 让我们考虑一下有如下形式的二阶方程

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \alpha \frac{df(x)}{dx} + \beta f(x) = h(x) \quad (14.21)$$

其中, α 和 β 是常数。对方程两边进行 Fourier 变换, 我们得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) \frac{d^2}{dx^2} e^{ikx} + \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) \frac{d}{dx} e^{ikx} \\ + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk F(k) e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk H(k) e^{ikx} \end{aligned} \quad (14.22)$$

$F(k)$ 和 $H(k)$ 分别是 $f(x)$ 和 $h(x)$ 的 Fourier 变换。注意到, 我们已经交换了微分和积分的运算顺序。(这一步的合理性将不在此处证明)。接下来得到

$$(ik)^2 F(k) + \alpha(ik)F(k) + \beta F(k) = H(k)$$

或者

$$F(k) = H(k)G(k) \quad (14.23)$$

其中, $G(k)$ 称为 k -域中的 **Green 函数 (Green's function)**, 由下式给出

$$G(k) = \frac{-1}{k^2 - i\alpha k - \beta} = \frac{-1}{(k - k_1)(k - k_2)} \quad (14.24)$$

其中有

$$k_{1,2} \equiv \frac{i\alpha \pm \sqrt{-\alpha^2 + 4\beta}}{2} \quad (14.25)$$

然后通过将 $F(k)$ Fourier 变换回 $f(x)$ 来得到 (9.21) 的所谓的特定解, 即:

$$f_p(x) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikx} H(k)}{(k - k_1)(k - k_2)} \quad (14.26)$$

其中, 下标 p 表示“特定解决方案 (particular solution)”。这种积分最容易通过轮廓积分来估计 (见 Chapter 40)。

我们现在将介绍一种非常重要的理论物理数学工具, 称为 **Dirac delta 函数 (Dirac delta function)**。同样, 我们在数学上不会严谨, 而是使用物理学家习惯性的方式将物理直

觉与形式操作结合起来。将 (14.20) 直接代入 (14.19)，我们发现

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ik(x-x')} \right) \end{aligned} \quad (14.27)$$

我们已经假设了积分顺序交换的合理性。正式定义 Dirac delta 函数如下：

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} = \delta(-x) \quad (14.28)$$

我们可以将 (14.27) 写成

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x') \delta(x' - x) \quad (14.29)$$

上述方程可以直观地理解如下。“函数” $\delta(x' - x)$ 就像一个带有无限窄且无限高的切口的蒙皮，它覆盖除 x 点以外的所有 x' 值，因此过滤掉函数 $f(x')$ 的所有值除了值 $f(x)$ 。当然，这里假设 $f(x')$ 本身在 $x' = x$ 时表现良好。(见 Figure 14.2)

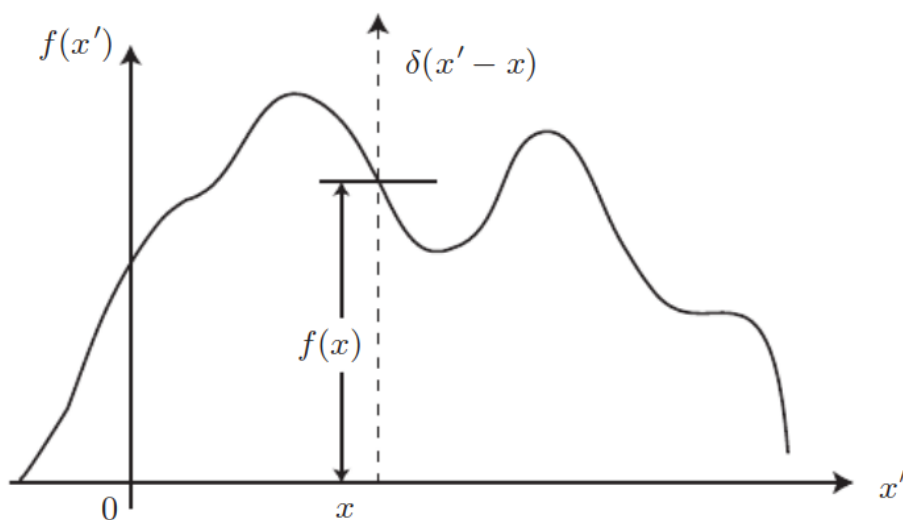


Figure 14.2

方程 (14.28) 给出了 Dirac delta 函数的所谓**积分表示 (integral representation)**。[对于 $\delta(x)$ 还有许多其它表示，我们将在后面看到，例如，由 (14.45) 和 (14.46) 给出的那些。] 将 $f(x) = 1$ 代入 (14.29) 并交换 $x \leftrightarrow x'$ ，我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x') = 1 \quad (14.30)$$

实际上，改变积分变量： $x - x' \rightarrow x$ ，我们进一步有

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) = 1 \quad (14.31)$$

(14.29) 的另一个推论是通过令 $x = 0$ 得到:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x) \quad (14.32)$$

现在, 根据 (14.28), 很清楚可以看到 $\delta(x)$ 除了在 $x = 0$ 处其它位置都消失, 此时 $\delta(x) \rightarrow \infty$. 直观地, $\delta(x)$ 可以被描绘为在 $x = 0$ 处的无限尖锐且无限高的尖峰, 其在全部 $\mathbb{R}$ 上的积分, 并且实际上, 在覆盖 $x = 0$ 的 $\mathbb{R}$ 中的任何开区间等于 1! 物理学家稍微滥用数学符号来松散地 (loosely) 描述这种情况, 记做如下

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq 0 \\ \infty & , \quad x = 0 \end{cases} \quad (14.33)$$

$\delta(x)$ 当然不是数学上的好 (bona-fide) 的函数。事实上, 它是从 well-behaved 的函数 $f(x)$ 空间 (在某些特定意义上我们将不会说明) 到 $\mathbb{R}$ (或 $\mathbb{C}$) (实数 (或复数) 的集合) 的映射。这样的对象称为 **分布 (distribution)** 或 **广义函数 (generalized function)**。

现在让我们现在回到 (14.24) 中介绍的 Green 函数 $G(k)$ 。除了作为解微分方程的极其有用的工具之外, 它还具有非常重要的物理解释。为了看到这一点, 我们重写 (14.26) 如下:

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} H(k) G(k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} G(k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} h(x') \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' h(x') \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk G(k) e^{ik(x-x')} \right) \end{aligned} \quad (14.34)$$

其中, 在第二个等号的右边, 我们已经对 $H(k)$ 使用 (14.20)。在认识到括号中的量实际上是 $G(k)$ 的 Fourier 变换时, 我们将用 $g(x - x')$ 表示:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} G(k) \quad (14.35)$$

我们可以写成

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' h(x') g(x - x') \quad (14.36)$$

$g(x)$ 被称为与微分方程 (14.21) 相关联的 **Green 函数 (Green function)** (在 x 域中)。方程 (14.36) 给出了 (14.21) 的特定解, 便是所谓的 **关联函数 (correlation function)** 或 **卷积 (convolution product)**, 有时写成

$$h(x) * g(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' h(x') g(x - x') \quad (14.37)$$

因此, 根据 (14.36) 和 (14.34) 的第一个等式, 卷积乘积 $h(x) * g(x)$ 的 Fourier 变换是 $h(x)$ 和 $g(x)$ 的 Fourier 变换的普通乘积。(反之亦然):

$$h(x) * g(x) \xrightarrow{F.T.} H(k)G(k) \quad (14.38)$$

现在假设微分方程 (14.21) 的等式右边上的非均匀项 (inhomogeneous term) ("驱动力") 由 Dirac delta 函数 $\delta(x)$ 给出。则 (14.36), 在 (9.29) 的帮助下说明

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x') g(x-x') = \frac{g(x)}{\sqrt{2\pi}} \quad (14.39)$$

因此, 当非均匀项 (或"驱动力") 是无限尖锐的 $\delta(x)$ 时 (作用在 $x=0$ 处), Green 函数 $g(x)$ (除以 $\sqrt{2\pi}$) 是微分方程 (14.21) 的特定解 (或响应 (response))。

如果我们用 (14.35) 估计 $g(x)$ 和用 (14.24) 给出的 $G(k)$ 的表达式, 将可以看出, 对于 $\alpha > 0$ 和 $\beta > 0$, 对于 $x < 0$

$$g(x) = 0 \quad (14.40)$$

然后, 特定解 (或响应函数 (response function)) 的积分表达式的上限则可以限制在 x :

$$f_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x dx' h(x') g(x-x') \quad (14.41)$$

如果 x 是时间变量, 则上述等式表示时间 x 处的响应 $f_p(x)$, 仅取决于比 x 早 x' 倍的驱动力 $h(x')$ 。这实际上是关于物理的因果关系原理 (principle of causality) 的陈述。

最令人惊奇和有趣的数学事实是, $g(x)$ 上的因果关系条件 (14.40) 被编在其 Fourier 变换 $G(k)$ 的某些分析性质 (analytic property) 中, 而后者被视为复变量 k 的函数。我们不会在这里研究这些性质。

$\delta(x)$ 的积分表示 [(14.28)] 也引导到所谓的 Parseval 定理 (Parseval's Theorem):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \overline{f(x)} h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \overline{F(k)} H(k) \quad (14.42)$$

其中, $(f(x), F(k))$ 和 $(h(x), H(k))$ 是 Fourier 变换对。

练习 14.2 验证 (14.42)。

特别地, 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk \quad (14.43)$$

假设 $f(x)$ 表示某个信号的场的强度是 x 位置处的函数。则 $|f(x)|^2$ 与作为位置函数的信号功率成比例。因此 (14.43) 具有重要的物理解释, 即: 空间上的积分功率与 Fourier 分量 $F(k)$ 在波数 k 上的积分功率相同。

我们将在这里收集一些 Dirac delta 函数最常用的表示:

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-x_0)} \quad (14.44)$$

$$\delta(x-x_0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{(x-x_0)^2 + \epsilon^2} \quad (14.45)$$

$$\delta(x-x_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\theta(x-x_0+\eta) - \theta(x-x_0)}{\eta} = \frac{d}{dx} \theta(x-x_0) \quad (14.46)$$

其中, $\theta(x-x_0)$ 是 Figure 14.3 所示的阶跃函数 (step function)。

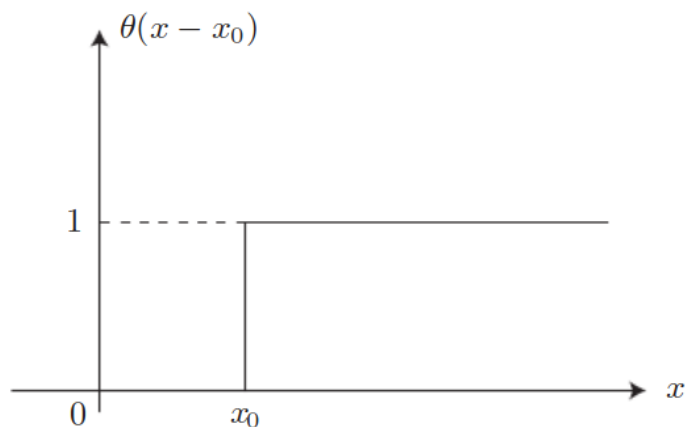


Figure 14.3

我们还说明了 Dirac delta 函数的以下常用属性供参考：

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad (14.47)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad , \quad a \in \mathbb{R} \quad (14.48)$$

$$x\delta(x) = 0 \quad (14.49)$$

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n) \quad (14.50)$$

其中， x_n 是 $f'(x_n) \neq 0$ 时方程 $f(x) = 0$ 的根。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{d^n \delta(x)}{dx^n} = (-1)^n \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=0} \quad (14.51)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - a - nb) = \frac{1}{b} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi m(x-a)/b} \quad (14.52)$$

最后一个公式称为 **Poisson 求和规则 (Poisson's sum rule)**。

15. 连续光谱和不可归一化状态

在 Chapter 13 中，我们介绍了 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 平方可积函数 [(13.18)]。这些函数也称为归一化函数，因为对于一个 $\psi(x) \in \mathcal{H}$ ，它经常通过定义 $\psi(x)$ 的**范数 (norm)**(长度模方)

$$\|\psi(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \|\psi(x)\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle \quad (15.1)$$

在量子力学中归一化波函数描述物理系统的**束缚态 (bound state)**，并且通常作为属于 hermitian(自伴) 算符的离散本征值的本征态出现。例子是原子和分子的束缚态，核子的束缚态和核子的束缚夸克态。术语“束缚”意味着该系统在空间上是局域的，因此 (15.1) 的等式右边的积分不能发散。Chapter 13 研究的谐振子提供了一个 hermitian 算符的例子-Hamilton 量 H -拥有一个完全离散且非简并的谱，其本征态构成一个完整的集合。

在许多情况下，连续光谱也会自然产生。试想一个自由移动的电子，其**位形空间 (configuration space)** 有无限的体积。则可能的能量本征值构成整个区间 $[0, \infty)$ 。我们将看到相应的本征态必然是不可归一化的。

现在让我们在 $\mathcal{H}$ 中引入位置算符 Q ，其对任何可归一化波函数 $\psi(x) \in \mathcal{H}$ 的作用由下式给出

$$Q\psi(x) = x\psi(x) \quad (15.2)$$

练习 15.1 证明 Q 是一个 hermitian 算符，即：证明对于任意 $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ，则有

$$\langle \phi | Q | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | Q | \phi \rangle} \quad (15.3)$$

Q 的本征值和本征函数是什么？通过

$$Q\phi(x) = x\phi(x) = \lambda\phi(x) \quad (15.4)$$

其中, $\lambda \in \mathbb{R}$ 是一个常数, 我们看到一个形式解是 Dirac delta 函数

$$\phi(x) = \delta(x - \lambda) \quad (15.5)$$

因此, 我们有这样一个情况本征函数 $\phi(x)$ 不属于 $\mathcal{H}$ 。它甚至不是一个函数, 更不用说平方可积函数了。在数学文献中, 它更合适称为一个**分布 (distribution)**。然而, Dirac 仍认为它是 Q 的合理本征态, 并将其标记为 $\text{ket}|\lambda\rangle$: 属于位置算符 Q 的本征值 λ 的本征态。因此他写为

$$Q|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \quad (15.6)$$

从这之后

$$\langle\lambda'|Q|\lambda\rangle = \lambda\langle\lambda'|\lambda\rangle \quad (15.7)$$

另一方面

$$\begin{aligned} \langle\lambda'|Q|\lambda\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - \lambda') \lambda \delta(x - \lambda) \\ &= \lambda \delta(\lambda' - \lambda) \end{aligned} \quad (15.8)$$

对比 (15.7) 和 (15.8), 我们有

$$\langle\lambda'|\lambda\rangle = \delta(\lambda' - \lambda) \quad (15.9)$$

因此, 状态 $|\lambda\rangle$ 绝对不可归一化, 因为 $\langle\lambda|\lambda\rangle = \delta(0) = \infty$ 。我们有时会说状态 $|\lambda\rangle$ 属于连续谱, 归一化为 delta 函数。

Dirac 对量子力学数学形式的研究方法是将这些无穷范数的向量纳入理论中, 从而将可归一化函数的 Hilbert 空间扩展到所谓的**装备 Hilbert 空间 (rigged Hilbert space)**。由于 Dirac bracket 符号的方便性和优雅性, 他的方法几乎被物理学家普遍采用。另一种方法是在 Hilbert 空间中使用 hermitian 算符的**谱定理 (spectral theorem)**, 并在处理谱的连续部分时根据**投影算符 (projection operator)** 形成量子理论。后一种方法是由 von-Neumann 开创的 (参见 J. von Neumann 1955); 其严格形式实际上先于装备 Hilbert 空间。我们将只考虑 Dirac 的方法。

利用 delta 函数性质 (14.29), 我们可以计算位置本征 $\text{ket}|\lambda\rangle$ 的内积和任意 $|\psi\rangle$:

$$\langle\lambda|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - \lambda) \psi(x) = \psi(\lambda) \quad (15.10)$$

因此, 波函数 $\psi(x)$ 以 Dirac 符号给出

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \quad (15.11)$$

称为状态 $|\psi\rangle$ 的**坐标表示 (coordinate representation)**。

现在考虑"投影算子" $|x\rangle\langle x|$ 关于 x 的形式积分, 即:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle\langle x| \quad (15.12)$$

对于任意 $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$, 我们有

$$\left\langle \phi \left| \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x| \right) \right| \psi \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle \phi | x \rangle \langle x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \overline{\phi(x)} \psi(x) = \langle \phi | \psi \rangle \quad (15.13)$$

因此, 我们有 $|x\rangle, x \in \mathbb{R}$ 完备性条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x| = 1 \quad (15.14)$$

将其与 (12.12) 进行比较, 给出了 $\mathcal{H}$ 的可数标准正交基集合的完备性条件。

方程 (15.10) 与我们的理解一致, 对应于 $|\lambda\rangle$ 波函数是 $\delta(x - \lambda)$, 因为通过 (15.9) 和 (15.11),

$$\langle x | \lambda \rangle = \delta(x - \lambda) \quad (15.15)$$

则 $|\lambda\rangle$ 可以被解释为一个状态, 描述位于 $x = \lambda$ 确定位置的粒子。

现在我们知道在量子力学中, **平面波 (plane-wave)** 函数描述了一个具有确定动量 $\hbar k$ 的粒子

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad (15.16)$$

因此, 类似于位置状态 $|\lambda\rangle, -\infty < \lambda < \infty$, 我们可以引入一组完整的动量状态 $|k\rangle, -\infty < k < \infty$, 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk |k\rangle \langle k| = 1 \quad (15.17)$$

并且

$$\psi_k(x) = \langle x | k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad (15.18)$$

运用表达式很容易验证

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (15.19)$$

[c.f. (4.4)] 对于线动量算符

$$p\psi_k(x) = \hbar k\psi_k(x) \quad (15.20)$$

上面的方程是抽象表述的**坐标表示 (coordinate representation)**

$$p|k\rangle = \hbar k|k\rangle \quad (15.21)$$

这是对于线动量算符关于 (15.6) 的类比。

参考 (15.11), 现在让我们考虑量

$$\psi(k) = \langle k | \psi \rangle \quad (15.22)$$

这是状态 $|\psi\rangle$ 的**动量表示 (momentum representation)**。我们使用完备性条件 (15.14):

$$\psi(k) = \langle k | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle k | x \rangle \langle x | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \overline{\langle x | k \rangle} \langle x | \psi \rangle$$

或者

$$\psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \psi(x) \quad (15.23)$$

反过来, 运用 (15.17)

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk \langle x|k\rangle \langle k|\psi\rangle$$

或者

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \psi(k) \quad (15.24)$$

因此, 我们得到了重要的结果: $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$ 和 $\langle k|\psi\rangle = \psi(k)$, 状态 $|\psi\rangle$ 的坐标和动量表示分别是彼此的 Fourier 变换。

练习 15.2 从事实 $\langle x|\lambda\rangle = \delta(x-\lambda)$ 开始, 并对于 delta 函数 $\delta(x-\lambda)$ 使用积分表示 (14.28):

$$\delta(x-\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-\lambda)} \quad (15.25)$$

对于 $|k\rangle$ 推导出的完备性条件 (15.17)。

练习 15.3 从方程 (15.21) 开始:

$$p|k\rangle = \hbar k|k\rangle$$

试说明

$$\langle x|p|k\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi_k(x) \quad (15.26)$$

并且由此说明 (15.20) 的合理性。

练习 15.4 从方程 (15.6) 开始:

$$Q|x\rangle = x|x\rangle \quad (15.27)$$

试说明

$$\langle k|Q|x\rangle = i \frac{d}{dk} \langle k|x\rangle \quad (15.28)$$

并且因此

$$i \frac{d}{dk} \langle k|x\rangle = x \langle k|x\rangle \quad (15.29)$$

由于 $\langle k|x\rangle = \psi_x(k)$ 可以解释为确定位置 x 的状态 $|x\rangle$ 的动量表示, (15.29) 意味着由 (15.6) 定义的位置算符 Q 替换为

$$Q \longrightarrow i \frac{d}{dk} \quad (15.30)$$

当作用于动量表示中的波函数时, 正如动量算符替换为

$$p \longrightarrow -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (15.31)$$

当作用于坐标表示中的波函数时。

通过说明 Dirac 符号的能力和优雅, 让我们再次证明应用于任意 $\psi(x)$ [而不仅仅是 $\psi_k(x)$]

的基本量子原理 (15.31)。我们有

$$\begin{aligned}\langle x|p|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \langle x|k\rangle \langle k|p|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \hbar k \langle k|\psi\rangle \\ &= -i\hbar \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \psi(k) \right) = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x)\end{aligned}\quad (15.32)$$

练习 15.5 重复上述步骤，通过计算 $\langle k|Q|\psi\rangle$ 验证 (15.30)。

$\psi(x)$ 和 $\psi(k)$ 是彼此的 Fourier 变换的事实与量子力学中的不确定性原理密切相关。

练习 15.6 使用 Gauss 积分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (15.33)$$

计算归一化 Gauss 型波函数的 Fourier 变换 $\psi(k)$

$$\psi(x) = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-ax^2} \quad (15.34)$$

其中

$$a = \left(\frac{1}{2\Delta x} \right)^2 \quad (15.35)$$

Δx 是 $|\psi(x)|^2$ 的宽度。(见 Figure 15.1)。说明 $\psi(k)$ 也是 Gauss 型，并且 $|\psi(k)|^2$ 的宽度 Δk 满足

$$(\Delta x)(\Delta k) = \frac{1}{2} \quad (15.36)$$

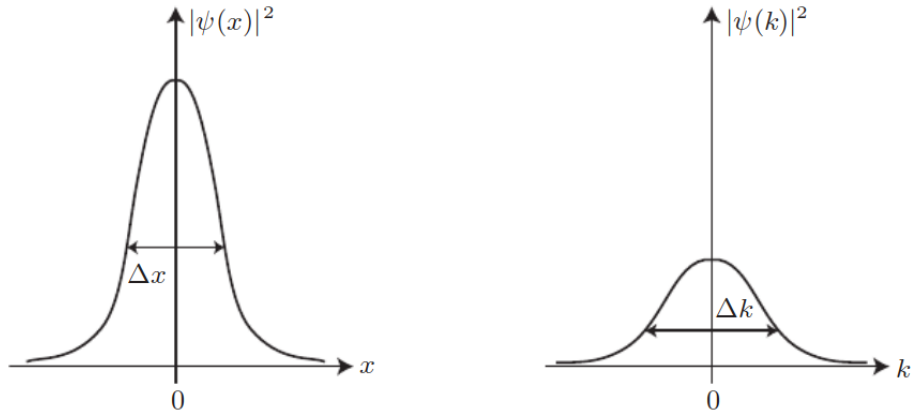


Figure 15.1

Gauss 型 $\psi(x)$ 实际上是最小不确定性波包 (minimum uncertainty wave packet)。所有其它波函数都满足

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2} \quad (15.37)$$

这是 Heisenberg 不确定性原理 (Heisenberg's uncertainty principle) 的表述。

16. 反对称张量和行列式

在这一章中，我们开始发展一些代数工具来研究反对称张量 - 或者**外代数** (exterior algebra)。该主题是所谓的**微分形式的外微分** (exterior differential calculus of differential forms) 的基础，这是理解流形的拓扑和几何的宝贵工具。事实证明，物理学的许多基本定律都是在拓扑和几何概念方面得到最好的表述和理解；张量分析和微分形式为研究它们提供了强大而互补的分析工具。存在于三维 Euclidean 流形上的向量场的向量分析是一个外微分的特殊情况；我们将在后面 (在 Chapter 31) 看到适用于任意类型和维数流形的微分形式的技术如何完全包含传统向量微分。

令 V 是一个向量空间并且 V^* 是它的对偶空间。张量乘法

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ 次}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s \text{ 次}} = T_s^r(V) \quad (16.1)$$

本身是一个向量空间，名义上，是 (r, s) -型张量的空间。特别地，让我们考虑

$$T^r(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ 次}} \quad (16.2)$$

并且

$$T^r(V^*) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r \text{ 次}} \quad (16.3)$$

它们是彼此的对偶空间，它们之间的配对给出了

$$\langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_r, v^{*1} \otimes \cdots \otimes v^{*r} \rangle = \langle v_1, v^{*1} \rangle \cdots \langle v_r, v^{*r} \rangle \quad (16.4)$$

其中， $v_i \in V$ 并且 $v^{*i} \in V^*, i = 1, \dots, r$ 。

为了表征非混合型张量的**对称性质** (symmetry property), 我们需要引入所谓的**对称群** (symmetric group)(或**置换群** (permutation group)) $\mathcal{S}(r)$ 。它只是 r 个数 $\{1, 2, \dots, r\}$ 的集合的排列组成的群。它有 $r!$ 个元素。元素 $\sigma \in \mathcal{S}(r)$ 通常表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & r \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(r) \end{pmatrix} \quad (16.5)$$

例如, 在 $\mathcal{S}(4)$ 中, 我们有以下排列:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (16.6)$$

恒元 $e \in \mathcal{S}(4)$ 当然是

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

将两个元素 $\sigma, \rho \in \mathcal{S}(r)$ 的群乘法定义为复合 (composition)

$$(\sigma\rho)(i) = (\sigma \circ \rho)(i) = \sigma(\rho(i)), \quad i = 1, \dots, r \quad (16.7)$$

例如, 如果 σ 由 (16.6) 给出并且

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (16.8)$$

则

$$\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (16.9)$$

σ 的逆 σ^{-1} 简单地说是排除 σ 的效果的排列。对于由 (16.6) 给出的 σ , σ^{-1} 将是

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (16.10)$$

我们注意到 $\mathcal{S}(r)$ 对于任意 $r > 2$, 是非 Abel 群。

练习 16.1 对于由 (16.6) 和 (16.8) 给出的 σ 和 ρ , 分别表示 $\sigma\rho \neq \rho\sigma$ 。

R $\mathcal{S}(r)$ 的群表示理论是 r 个全同粒子系统的量子力学表述中极为重要的问题 (见 Chapter 20)。

任意元素 $\sigma \in \mathcal{S}(r)$ 决定一个向量空间 $T^r(V)$ [和 $T^r(V^*)$] 的自同构。假设 $x \in T^r(V)$ 。则 x 是 $T^r(V^*)$ 上的一个 r 线性函数。 r 线性函数 $\sigma x \in T^r(V)$ 定义为

$$(\sigma x)(v^{*1}, \dots, v^{*r}) = x(v^{*\sigma(1)}, \dots, v^{*\sigma(r)}) \quad (16.11)$$

其中, $v^{*i} \in V^*$ 。

练习 16.2 说明如果 x 是一个自同构, 即就是: 如果

$$x = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r, \quad v_1, \dots, v_r \in V \quad (16.12)$$

则

$$\sigma x = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(r)} \quad (16.13)$$

说明这相当于置换向量 $v_1, \dots, v_r$ 的位置。

定义 16.1 假设 $x \in T^r(V)$ 。如果对于任意 $\sigma \in \mathcal{S}(r)$ 我们有

$$\sigma x = x \quad (16.14)$$

则 x 称为一个秩 r 的对称逆变张量 (*symmetric contravariant tensor of rank r*), 或称为对称 $(r, 0)$ -型张量。如果对于任意 $\sigma \in \mathcal{S}(r)$ 我们有

$$\sigma x = \text{sgn } \sigma \cdot x \quad (16.15)$$

其中, $\text{sgn } \sigma$ 表示排列 σ 的符号:

$$\text{sgn } \sigma = \begin{cases} +1 & \text{如果 } \sigma \text{ 是一个偶排列 (even permutation)} \\ -1 & \text{如果 } \sigma \text{ 是一个奇排列 (odd permutation)} \end{cases} \quad (16.16)$$

则 x 称为一个秩为 r 的反对称 (或者交错) 逆变张量 (*skew-symmetric (or alternating) contravariant tensor*)

不同于通过上述定义 (数学家喜欢的) 来观察张量的对称性质, 物理学家更习惯于在其指数的排列下观察张量分量的对称性质。由于以下定理, 这是可能的。

定理 16.1 假设 $x \in T^r(V)$ 或者 $[T^r(V^*)]$ 。当且仅当依赖于指标的任意排列的 x 的全部分量是对称的 (反对称的), x 是一个对称 (反对称) 张量。

证明: 选择一组 V 的基并且有

$$x = x^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \quad (16.17)$$

使得

$$x^{i_1 \dots i_r} = x(e^{*i_1}, \dots, e^{*i_r}) \quad (16.18)$$

假设 $x \in T^r(V)$ 是对称的。则: 对于任意 $\sigma \in \mathcal{S}(r)$, 有

$$\begin{aligned} x^{i_1 \dots i_r} &= x(e^{*i_1}, \dots, e^{*i_r}) = \sigma x(e^{*i_1}, \dots, e^{*i_r}) \\ &= x(e^{*i_{\sigma(1)}}, \dots, e^{*i_{\sigma(r)}}) = x^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}} \end{aligned} \quad (16.19)$$

另一方面, 如果 $x \in T(V)$ 是反对称的, 则: 对于任意 $\sigma \in \mathcal{S}(r)$, 有

$$\begin{aligned} x^{i_1 \dots i_r} &= x(e^{*i_1}, \dots, e^{*i_r}) = (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma x(e^{*i_1}, \dots, e^{*i_r}) \\ &= (\operatorname{sgn} \sigma) x(e^{*i_{\sigma(1)}}, \dots, e^{*i_{\sigma(r)}}) = (\operatorname{sgn} \sigma) x^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}} \end{aligned} \quad (16.20)$$

练习 16.3 证明表述, 即:

- (i) 如果对于任意 $\mathcal{S}(r)$ 有 $x^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}} = x^{i_1 \dots i_r}$, 则 x 是对称的。并且,
- (ii) 如果 $x^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}} = (\operatorname{sgn} \sigma) x^{i_1 \dots i_r}$, 则 x 是反对称的。

对于 $x \in T^r(V^*)$ 的情况完全相似。 $\square$

注意到任意排列 $\sigma \in \mathcal{S}(r)$ 可以被表示成确定数量 n 对交换的乘积。如果 n 是偶数 (奇数), 则 σ 被称为一个偶 (奇) 排列。(16.19) 或 (16.20) 中的每个指标从 i_1 到 i_r 可以在 1 到 n 的范围内, 其中 $n = \dim(V)$ (V 的维数), 因此可以重复一些指标的值。很明显, 如果 x 是反对称的, 则只要任何一对指标具有相同的值, 则 $x^{i_1, \dots, i_r} = 0$ 。

练习 16.4 分别由 (16.6) 和 (16.8) 给出的 σ 和 ρ 确定 $\operatorname{sgn} \sigma$ 和 $\operatorname{sgn} \rho$ 。

用 $P^r(V)$ 表示所有对称 $x \in T^r(V)$ 的子集, 用 $\Lambda^r(V)$ 表示所有反对称 $x \in T^r(V)$ 的子集。因为

- a) 两个对称 (反对称) 张量的求和依旧是对称 (反对称);
- b) 通过 $\alpha \in \mathbb{F}$ 的 $x \in T^r(V)$ 的标量乘法并不能改变 x 的对称性质; 并且
- c) 零向量 $0 \in T^r(V)$ 既是对称也是反对称,

$P^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V)$ 都是 $T^r(V)$ 的向量子空间。实际上, 它们可以从 $T^r(V)$ 分别通过**对称映射 (symmetrizing map)** S_r 和**交代映射 (alternating map)** A_r 得到。这些通过下面定义: 对于任意 $x \in T^r(V)$

$$S_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} \sigma x \quad (16.21)$$

$$A_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} (\operatorname{sgn} \sigma) \sigma x \quad (16.22)$$

上面两个方程中的求和遍历所有 $\mathcal{S}(r)$ 中的排列。我们有下面的有用的定理, 将只表述而不予证明。

定理 16.2

$$P^r(V) = S_r(T^r(V)) \quad (16.23)$$

$$\Lambda^r(V) = A_r(T^r(V)) \quad (16.24)$$

作为一个简单但是重要的例子, 考虑选定基 $\{e_1, e_2\}$ 的二维向量空间 V , 则任意 $x \in T^2(V)$ 可以被写成

$$x = x^{i_1 i_2} e_{i_1} \otimes e_{i_2} = x^{11} e_1 \otimes e_1 + x^{12} e_1 \otimes e_2 + x^{21} e_2 \otimes e_1 + x^{22} e_2 \otimes e_2 \quad (16.25)$$

一般性地, x 的四个分量 x^{11}, x^{12}, x^{21} 和 x^{22} 相互之间没有任何关系。现在对称群 $\mathcal{S}(2)$ 只有

两个元素：恒元

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

并且单一的交换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

后者的逆 σ^{-1} 等于 σ 。应用 (16.13)，则我们有

$$S_2(e_1 \otimes e_1) = \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_1) = e_1 \otimes e_1 \quad (16.26)$$

$$S_2(e_1 \otimes e_2) = \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) = S_2(e_2 \otimes e_1) \quad (16.27)$$

$$S_2(e_2 \otimes e_2) = e_2 \otimes e_2 \quad (16.28)$$

$$A_2(e_1 \otimes e_1) = \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_1) = 0 = A_2(e_2 \otimes e_2) \quad (16.29)$$

$$A_2(e_1 \otimes e_2) = \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \quad (16.30)$$

$$A_2(e_2 \otimes e_1) = \frac{1}{2}(e_2 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2) = -A_2(e_1 \otimes e_2) \quad (16.31)$$

因此

$$S_2(x) = x^{11}e_1 \otimes e_1 + x^{22}e_2 \otimes e_2 + \frac{1}{2}(x^{12} + x^{21})(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) \quad (16.32)$$

$$A_2(x) = \frac{1}{2}(x^{12} - x^{21})(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \quad (16.33)$$

因此，我们看到 $P^2(V)$ 是一个三维的（具有一组可能的基的集合 $\{e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_2, e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1\}$ ），并且 $\Lambda^2(V)$ 是一维的（具有一组可能的基 $\{e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1\}$ ）。在这种情况下

$$T^2(V) = P^2(V) \oplus \Lambda^2(V) \quad (16.34)$$

即：四维的 $T^2(V)$ 是三维的 $P^2(V)$ 和一维的 $\Lambda^2(V)$ 的直和 (direct sum)。

R 当 $r > 2$ 时， $T^r(V)$ 不能分解成类似于 (16.34) 的直和。

这一切与物理学有什么关系？让我们只考虑一个例子：一个具有两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的全同粒子，比如两个电子。设 e_1 和 e_2 分别表示所谓的“自旋向上”和“自旋向下”状态。运用 Dirac 符号，我们可以写

$$e_1 = |\uparrow\rangle \quad (16.35)$$

$$e_2 = |\downarrow\rangle \quad (16.36)$$

$$e_1 \otimes e_1 = |\uparrow\uparrow\rangle \quad (16.37)$$

$$e_2 \otimes e_2 = |\downarrow\downarrow\rangle \quad (16.38)$$

$$e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 = |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \quad (16.39)$$

$$e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 = |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \quad (16.40)$$

集合 $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\}$ 是对称两粒子状态 (在交换粒子下) 的三维空间的基, 同时 $\{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\}$ 是反对称两粒子状态 (在交换粒子下) 的一维空间的基。单粒子 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 经常被假设为归一化的, 则有

$$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1 \quad (16.41)$$

则生成 $P^2(V)$ 的归一对称状态的三态 (triplet) 为

$$|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (16.42)$$

则生成 $\Lambda^2(V)$ 的归一反对称状态的单态 (singlet) 为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (16.43)$$

你将经常在物理文献中遇到像 (16.42) 和 (16.43) 的表达形式。空间 $P^2(V)$ 和 $\Lambda^2(V)$ 为在旋转群 $SO(3)$ 下 $T^2(V)$ 的每一个不变子群 (invariant subspace)。换句话说, 它们为 $SO(3)$ 提供了不可约表示空间 (irreducible representation space)。这一事实对于理解量子力学中角动量的叠加非常重要。

练习 16.5 验证 (16.32) 和 (16.33) 可以被写成

$$S_2(x) = \left(\frac{x^{ij} + x^{ji}}{2} \right) e_i \otimes e_j \quad (16.44)$$

$$A_2(x) = \left(\frac{x^{ij} - x^{ji}}{2} \right) e_i \otimes e_j \quad (16.45)$$

在上述发展中, $\sigma \in \mathcal{S}(r)$ 对 $x \in T^r(V)$ 的作用是根据 x 和 σx 对 $T^r(V^*)(T^r(V)$ 的对偶空间) 中一些元素的作用来定义的。然而, 物理学家喜欢处理张量的分量。再次从 (16.17) 开始:

$$x = x^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}$$

通过 (16.13), 我们有

$$\sigma x = x^{i_1 \dots i_r} \sigma(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}) = x^{i_1 \dots i_r} e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}(r)}} \quad (16.46)$$

或者

$$\sigma x = x^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \quad (16.47)$$

因此, 后面得到

$$S_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} x^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \quad (16.48)$$

$$A_r(x) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} (\text{sgn} \sigma) x^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \quad (16.49)$$

方程 (16.44) 和 (16.45) 仅仅是 (16.48) 和 (16.49) 的特例, 它们以分量形式给出 $S_r(x)$ 和

$A_r(x)$ 。

练习 16.6 设 $\{e_1, e_2\}$ 是二维向量空间 V 的一组基, 并且 $x \in T^3(V)$ 由 $x = x^{i_1 i_2 i_3} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3}$, $i_1, i_2, i_3 = 1, 2$ 给出。运用 (16.48) 和 (16.49) 写出 $S_3(x)$ 和 $A_3(x)$ 的确切表达式。

如果 V 是由 $\{e_1 = |\uparrow\rangle, e_2 = |\downarrow\rangle\}$ 生成的, 则 $S_r(x)$ 和 $A_r(x)$ 表示 r 个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的全同粒子可能的自旋状态, 比如 r -电子的原子的自旋状态。

反对称张量的空间 $\Lambda^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V^*)$ 将稍后 (在 Chapter 28) 被用于构造外代数 (exterior algebra), 其中乘法规则称为**外积 (exterior product)**(用 $\wedge$ 表示, 也称为**楔积 (wedge product)**), 它是普通向量 (叉) 乘积的推广。楔积是微分形式的基本运算。

现在让我们注意两个事实, 其证明将推迟到我们系统地研究外积之后:

- i) 如果 $r > \dim(V)$, $\Lambda^r(V)$ (同时也有 $\Lambda^r(V^*)$)=0;
- ii) 如果 $\dim(V) = n$, $\Lambda^r(V)$ (同时也有 $\Lambda^r(V^*)$) 是一个一维向量空间。

上面第二个事实得到 V 上线性变换 A 的一个最重要的不变性, 称为 A 的**行列式 (determinant)**, 并记为 $\det(A)$ 。术语"不变"意味着 $\det(A)$ 独立于 V 的基的选取。

行列式函数在如下的某些绕路中出现。对应于一个线性变换 $A: V \rightarrow V, \dim(V) = n$, 存在一个诱导映射, 称为 A 的**拉回 (pullback)** 并且表示为

$$A^*: \Lambda^n(V^*) \longrightarrow \Lambda^n(V^*) \quad (16.50)$$

定义如下。对于任意 $x \in \Lambda^n(V^*)$ 和任意 $v_1, \dots, v_n \in V$

$$(A^*x)(v_1, \dots, v_n) = x(Av_1, \dots, Av_n) \quad (16.51)$$

因为 $\Lambda^n(V^*)$ 是一维的, A^* 对 x 的作用等价于一个标量乘 x 。 A 的行列式则定义为

$$A^*x = (\det(A))x \quad (16.52)$$

其中, 参考上面 $\det(A)$ 是标量。在接触表示 A 的矩阵的行列式的更基本的定义之前, 我们将使用 (16.51) 来推导出一些熟悉的行列式函数的形式。

定理 16.3 如果线性算符 A 是一个标量相乘, 即: 对于任意 $v \in V$, $Av = \alpha v$, 其中, α 是标量, 并且如果 $\dim(V) = n$, 则 $\det(A) = \alpha^n$ 。

证明: 对于 $x \in \Lambda^n(V^*)$, 通过 (16.51), 我们有

$$(A^*x)(v_1, \dots, v_n) = x(Av_1, \dots, Av_n) = x(\alpha v_1, \dots, \alpha v_n) = \alpha^n x(v_1, \dots, v_n) \quad (16.53)$$

其中, 最后一个不等式来自 x 的 n -线性的性质。 $\square$

作为上面定理的特殊情况我们有下面:

$$\det(0) = 0, \quad \det(1) = 1 \quad (16.54)$$

其中, 等式左边的量"0"和"1"分别表示 V 上零算符和单位算符; 同时类似地, 等式右边的量分别意味着数字零和一。

定理 16.4 如果 A 和 B 是向量空间上的线性算符, 则

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) \quad (16.55)$$

证明: 令 $C = AB$ 。则: 对于任意 $x \in \Lambda^n(V^*)$ 和 $v_1, \dots, v_n \in V$, 有

$$\begin{aligned} (C^*x)(v_1, \dots, v_n) &= x(Cv_1, \dots, Cv_n) = x(ABv_1, \dots, ABv_n) \\ &= (A^*x)(Bv_1, \dots, Bv_n) = (B^*A^*x)(v_1, \dots, v_n) \end{aligned} \quad (16.56)$$

因此

$$C^* = B^*A^* \quad (16.57)$$

但是

$$C^*x = \det(C)x = \det(AB)x \quad (16.58)$$

并且

$$B^*A^*x = \det(B)A^*x = \det(A) \det(B)x \quad (16.59)$$

则该定理来自于上述两个方程。 $\square$

$\det(A)$ 的值提供关于 A 的可逆性的关键信息。这将由下面的定理给出。

定理 16.5 一个向量空间中的线性算符 A 是**可逆** (*invertible*) 的 (即: A^{-1} 存在, 或者 A 是**非特异** (*non-singular*)) 当且仅当 $\det(A) \neq 0$ 。

证明: 如果 A^{-1} 存在, 从 (16.54) 和 (16.55)

$$1 = \det(1) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) \quad (16.60)$$

接下来是 $\det(A) \neq 0$ 。上面的方程也意味着: 如果 A^{-1} 存在, 则

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} \quad (16.61)$$

反过来的证明有点困难。我们需要证明: 如果 $\det(A) \neq 0$, 则 A^{-1} 存在。令 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 为 V 的一组基, 并且 $x \in \Lambda^n(V^*), x \neq 0$ 。如果我们写

$$x = x_{i_1 \dots i_n} e^{*i_1} \otimes \dots \otimes e^{*i_n} \quad (16.62)$$

则

$$x(e_1, \dots, e_n) = x_{123 \dots n} \neq 0 \quad (16.63)$$

事实上, 如果 $x_{123 \dots n}$ 确实消失了, 通过定理 16.1, 我们将有

$$0 = x_{123 \dots n} = -x_{213 \dots n} \quad (16.64)$$

这意味着

$$x_{213 \dots n} = 0 = x_{123 \dots n} \quad (16.65)$$

最后一个表述与 $x \in \Lambda^n(V^*)$ 的假设相矛盾，即： x 是反对称张量（再次由定理 16.1）。与 $\det(A) \neq 0$ 假设一起，方程 (16.63) 意味着

$$\det(A) \cdot x(e_1, \dots, e_n) \neq 0 \quad (16.66)$$

通过 (16.52)

$$(A^*x)(e_1, \dots, e_n) = x(Ae_1, \dots, Ae_n) \neq 0 \quad (16.67)$$

这意味着 $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ 是线性无关的，基于 $x(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ 意味着 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 线性无关的事实，对于任意 $x \in \Lambda^n(V^*)$ 和 $v_1, \dots, v_n \in V$ 。为了看到最后一个断言的有效性，我们假设 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 是线性相关的。不失一般性，假设

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \quad (16.68)$$

其中， $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 并非全为零。则

$$\begin{aligned} x(v_1, v_2, \dots, v_n) &= x(\alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, v_2, v_3, \dots, v_n) \\ &= \alpha_2 x(v_2, v_2, v_3, \dots, v_n) + \dots + \alpha_n x(v_n, v_2, v_3, \dots, v_n) = 0 \end{aligned} \quad (16.69)$$

其中，最后的等式来自 x 是反对称张量的事实。现在，由于 $\dim(V) = n$ ，刚刚建立为线性无关的 n 个向量集合 $\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ 也必须是 V 的一组基。因此， e_1 必须是可表达为 $Ae_1, \dots, Ae_n$ 的线性组合。我们写

$$e_i = \beta_i^j Ae_j = \beta_i^j a_j^k e_k \quad (16.70)$$

其中， (a_i^j) 是线性算符 A 依赖于 V 的基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 的矩阵表示。另一方面

$$e_i = \delta_i^k e_k \quad (16.71)$$

因此

$$\beta_i^j a_j^k = \delta_i^k \quad (16.72)$$

所以，矩阵 (β_i^j) 实际上是矩阵 (a_i^j) 的逆。由此可见， A 是可逆的。 $\square$

以下定理在实际应用中也非常重要。

定理 16.6 线性算符 A 的行列式在相似变换下是不变的：对于任何可逆线性算子 B ，有

$$\det(A) = \det(B^{-1}AB) \quad (16.73)$$

证明：这是定理 16.4 的直接推论。对于任何可逆 B ，我们都有

$$\begin{aligned} \det(B^{-1}AB) &= \det(B^{-1}) \det(A) \det(B) = \det(B^{-1}B) \det(A) \\ &= \det(1) \det(A) = \det(A) \end{aligned}$$

$\square$

我们回忆：在 V 的基变化下， V 上的线性变换 A 的矩阵表示根据相似变换而变化 [c.f.

(1.42)]。因此, 根据定理 16.6, 当用 A 的特定矩阵表示计算时, $\det(A)$ 与 V 的基的选择无关。[见下面的方程 (16.75) 和 (16.78)]。

我们现在将根据 A 的特定表示 (依赖于 V 的基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 的矩阵元素 a_i^j 得到 $\det(A)$ 的表达式。令 $x \in \Lambda^n(V^*)$ 。则

$$\begin{aligned}
 \det(A)x(e_1, \dots, e_n) &= (A^*x)(e_1, \dots, e_n) = x(Ae_1, \dots, Ae_n) \\
 &= x(a_1^{i_1}e_{i_1}, \dots, a_n^{i_n}e_{i_n}) = a_1^{i_1}a_2^{i_2} \dots a_n^{i_n}x(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} a_1^{\sigma(1)}a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)}x(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} a_1^{\sigma(1)}a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)}(\sigma x)(e_1, \dots, e_n) \\
 &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} a_1^{\sigma(1)}a_2^{\sigma(2)} \dots a_n^{\sigma(n)}(\operatorname{sgn} \sigma)x(e_1, \dots, e_n)
 \end{aligned} \tag{16.74}$$

在第五个等号位置, 我们使用了这样一个事实: 只要任何两个参数相同, $x(e_1, \dots, e_n) = 0$, 这反过来又来自 x 是一个反对称张量。现在 $x(e_1, \dots, e_n) \neq 0$ [参见紧随其后的参数 (16.63)]。方程 (16.74) 则给出了以下结果, 用于根据 A 的特定矩阵表示的矩阵元素计算 $\det(A)$ 。

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} (\operatorname{sgn} \sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)} \tag{16.75}$$

该结果实际上与矩阵的行列式的基本定义相同。我们将对 $n = 3$ 的情况进行验证。方程 (16.75) 得出

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= a_1^1 a_2^2 a_3^3 + a_1^2 a_2^3 a_3^1 + a_1^3 a_2^1 a_3^2 - a_1^1 a_2^3 a_3^2 - a_1^3 a_2^2 a_3^1 - a_1^2 a_2^1 a_3^3 \\
 &= \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{16.76}$$

请注意, 在 (16.75) 中, 矩阵元素的列指标 (上指标) 被置换。事实证明, 可以 $\det(A)$ 被写为类似的表达式, 其中 a_i^j 的行指标 (下指标) 被置换。从 (16.75) 开始, 我们有

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)} = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma^{-1}(1)}^1 a_{\sigma^{-1}(2)}^2 \dots a_{\sigma^{-1}(n)}^n \\
 &= \sum_{\sigma^{-1}} (\operatorname{sgn} \sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)}^1 a_{\sigma^{-1}(2)}^2 \dots a_{\sigma^{-1}(n)}^n
 \end{aligned} \tag{16.77}$$

或者

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(n)} (\operatorname{sgn} \sigma) a_{\sigma(1)}^1 \dots a_{\sigma(n)}^n \tag{16.78}$$

在推导出上述等式时, 我们使用了 $\operatorname{sgn} \sigma^{-1} = \operatorname{sgn} \sigma$ 和 $\sum_{\sigma} = \sum_{\sigma^{-1}}$ 的事实。

练习 16.7 验证对于 $n = 3$ 的情况, (16.78) 给出与 (16.76) 完全相同的结果

在 (16.78) 中用 $(a^T)_i^{\sigma(i)}$ 替换 $a_{\sigma(i)}^i$ 然后与 (16.75) 进行比较, 其中, a^T 是矩阵 a 的转置,

我们看到

$$\det(a) = \det(a^T)$$

一个非常著名的结果。

练习 16.8 说明如果方形矩阵的任意两行或两列互换，则矩阵的行列式改变符号。

令 A_i^j 是通过从 $(n \times n)$ 矩阵 (a_i^j) 中删除第 i 行和第 j 列而获得的 $(n-1) \times (n-1)$ 矩阵。则下面的公式给出了通过沿着矩阵的第 i 行扩展来找到矩阵的行列式的算法。

$$\det(a_i^j) = (-1)^{i+1} a_i^1 \det(A_i^1) + \cdots + (-1)^{i+n} a_i^n \det(A_i^n) \quad (16.79)$$

练习 16.9 从 (16.75) 或 (16.78) 开始推导出上述公式。

最后，我们给出了一个实用算法的公式，用于找到矩阵的逆矩阵（如果存在的话）。如果 $\det(a_i^j) \neq 0$ ，则

$$(a_i^j)^{-1} = \left[\frac{(-1)^{i+j} \det(A_i^j)}{\det(a_i^j)} \right]^T \quad (16.80)$$

练习 16.10 验证 (16.80)。

17. 本征值问题

物理学，工程学和其他科学学科应用线性代数（这里使用的术语与向量空间上的线性变换理论同义）中最常遇到的问题之一是：给定向量空间 V 上的线性变换 A ，找到所有标量 $\lambda \in \mathbb{F}(V \text{ 的域})$ 和向量 $v \in V, v \neq 0$ ，使得

$$Av = \lambda v \quad (17.1)$$

这通常被称为**本征值问题 (eigenvalue problem)**。在我们讨论量子力学谐振子时，我们已经看到了这个例子 [c.f. (13.13)]，其中， V 实际上是无限维 (Hilbert) 空间。在本章中，我们将详细阐述有限维空间本征值问题背后的理论。这个理论本身很重要，因为通常运用在无限维的有限维不变子空间 (在一些对称操作下)。

如 Chapter 13 提到的，线性算符 A 的所有本征值的集合称为 A 的**谱 (spectrum)**。我们从以下事实开始。

定理 17.1 线性算符 A 的谱是所有标量 λ 的集合，其中， $(A - \lambda)$ 是不可逆的。

证明：假设 λ 是 A 的本征值。则存在一个 $v \neq 0$ 使得

$$(A - \lambda)v = 0 \quad (17.2)$$

如果 $(A - \lambda)$ 是可逆的，我们就会有

$$(A - \lambda)^{-1}(A - \lambda)v = 1 \cdot v = v \neq 0 \quad (17.3)$$

另一方面，从 (17.2) 开始，

$$(A - \lambda)^{-1}(A - \lambda)v = (A - \lambda)^{-1} \cdot 0 = 0 \quad (17.4)$$

因此, 我们得到了一个矛盾; 并且 $(A - \lambda)$ 必须是不可逆的。□

从定理 16.5 开始, 可以通过求解方程得到有限维向量空间上的线性算符 A 的谱。

$$p(\lambda) \equiv \det(A - \lambda) = 0 \quad (17.5)$$

如上所定义, 如果 $\dim(V) = n$, 则 $p(\lambda)$ 是 λ 中的 n 次多项式。该多项式称为线性算符 A 的**本征多项式 (characteristic polynomial)**, (17.5) 称为 A 的**本征方程 (characteristic equation)**。 A 的本征值 λ 也称为 A 的**本征根 (characteristic root)**。

如果 V 是实向量空间 ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$), 则 (17.5) 并不总是有根 (在 $\mathbb{R}$ 中)。然而, 根据**代数基本定理 (fundamental theorem of algebra)**, 任何具有 $\mathbb{C}$ 中 (复数域) 系数的多项式将总在 $\mathbb{C}$ 中有根。因此 $\mathbb{C}$ 是代数闭合域; 复向量空间有优美的性质, 即: 它上面的所有线性变换都必然有本征值。在量子理论中, 人们通常处理复向量空间。

定理 17.2 一个线性算符的本征多项式在相似变换下是不变的。

证明: 这是定理 16.6 的直接结果。对于任何可逆算符 B , 我们有

$$B^{-1}(A - \lambda)B = B^{-1}AB - \lambda \quad (17.6)$$

因此, 根据定理 16.6 有

$$\det(B^{-1}AB - \lambda) = \det(B^{-1}(A - \lambda)B) = \det(A - \lambda) \quad (17.7)$$

□ 上述定理直接说明线性算符的谱在相似变换下是不变的。

为了进一步发展理论, 我们需要介绍一些关于线性变换的更基本的概念和事实。

定义 17.1 给定向量空间 V 上的线性算符 A , 集合

$$\{v \in V | A(v) = 0\} \quad (17.8)$$

被称为 A 的**核 (kernel)**, 通常用 $\ker A$ 表示。集合

$$A(v) \subset V \quad (17.9)$$

被称为 A 的**像 (image)**, 通常用 $\operatorname{im} A$ 表示。

很明显 $\ker A$ 和 $\operatorname{im} A$ 都是 V 的向量子空间。

练习 17.1 证明上面的表述。

我们有以下重要定理。

定理 17.3 如果 $A: V \rightarrow W$ 是线性映射, 其中, V 和 W 是相同域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间, 那么

$$\dim(V) = \dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A) \quad (17.10)$$

证明: 显然, $\ker A$ 和 $\operatorname{im} A$ 分别是 V 和 W 的向量子空间。令 $\{v_1, \dots, v_r\}$ 为 $\ker A$ 的一组基, $\{w'_1, \dots, w'_s\}$ 是 $\operatorname{im} A$ 的一组基。对于每个 $i, 1 \leq i \leq s$, 令 v'_i 为 V 中的向量, 使得

$A(v'_i) = w'_i$ 。考虑向量的集合 $\{v_1, \dots, v_r, v'_1, \dots, v'_s\}$ 。我们将证明它构成了 V 的一组基。

设 v 是 V 中的任意向量。则 $A(v) \in \text{im } A$ 。因此我们可以写

$$A(v) = \sum_{i=1}^s c^i w'_i = \sum_{i=1}^s c^i A(v'_i), \quad c^i \in \mathbb{F}$$

从 A 的线性性质来看, 上面的方程说明

$$A\left(v - \sum_{i=1}^s c^i v'_i\right) = 0$$

因此 $v - \sum_{i=1}^s c^i v'_i \in \ker A$, 并且, 由于 $\{v_1, \dots, v_r\}$ 是 $\ker A$ 的一组基, 我们可以写

$$v - \sum_{i=1}^s c^i v'_i = \sum_{i=1}^r d^i v_i, \quad d^i \in \mathbb{F}$$

或者

$$v = \sum_{i=1}^r d^i v_i + \sum_{i=1}^s c^i v'_i$$

即就是说, v 是 $\{v_1, \dots, v_r, v'_1, \dots, v'_s\}$ 的线性组合。接下来假设

$$\sum_{i=1}^r a^i v_i + \sum_{i=1}^s b^i v'_i = 0$$

其中, $a^i, b^j \in \mathbb{F}$ 。则因为 $A(0) = 0$ 有

$$0 = A\left(\sum_{i=1}^r a^i v_i + \sum_{i=1}^s b^i v'_i\right) = \sum_{i=1}^r a^i A(v_i) + \sum_{i=1}^s b^i A(v'_i) = \sum_{i=1}^s b^i w'_i$$

其中第二等号来自于 A 是线性和 $v_i \in \ker A$ 的事实。因为 w'_i 作为 $\text{im } A$ 一组基是线性无关的, $b^i = 0, 1 \leq i \leq s$ 。因此 $\sum_{i=1}^r a^i v_i = 0$ 。集合 $\{v_i\}$ 的线性无关性 (它是 $\ker A$ 的一组基) 则说明 $a^i, 1 \leq i \leq r$ 也消失。这建立了集合 $\{v_1, \dots, v_r, v'_1, \dots, v'_s\}$ 的线性无关性。由于我们也展示它生成 V , 它必须是 V 的一组基。然后该定理遵循这样的事实, 即: 这组基有 $r + s$ 个元素, $r = \dim(\ker A)$, 同时 $s = \dim(\text{im } A)$ 。□

线性算符 A 的核带有关于 A 的重要信息, 如下面的定理所示。

定理 17.4 当且仅当 $\ker A = \{0\}$ 时, 线性算符 $A: V \rightarrow V$ 是单射的 (一对一)。

证明: 由于 A 是线性的, 有

$$A(0) = A(v - v) = A(v) - A(v) = 0$$

则 A 是单射说明 $0 \in V$ 是 $\ker A$ 中唯一的元素, 即: $\ker A = \{0\}$ 。

相反, 假设 $\ker A = \{0\}$, 并且

$$A(v) = A(w), \quad v, w \in V$$

则通过 A 的线性性质, $A(v-w)=0$ 。由于假设 $\ker A = \{0\}$, 因此 $v-w=0$ 。因此 $v=w$, A 是单射。 $\square$

定理 17.3 和 17.4 得到以下推论。

推论 17.1 设 $A: V \rightarrow V$ 是线性算符。那么以下表述是等价的:

1. $\ker A = \{0\}$
2. $\operatorname{im} A = V$
3. A 是同构 (一对一和满射的映射)。

练习 17.2 证明推论 17.1。

定义 17.2 子空间 $\operatorname{im} A \subset V$ 的维度称为线性算符 A 的秩 (*rank*):

$$\operatorname{rank}(A) \equiv \dim(\operatorname{im} A) \quad (17.11)$$

我们知道所有 n 维复向量空间都同构于向量空间 $\mathbb{C}^n$ -所有 n 元组复数的集合。由于复数项的每个 $n \times n$ 矩阵都是 $\mathbb{C}^n$ 上的线性变换, 每个 $n \times n$ 复矩阵表示 n 维复向量空间上的一些线性变换。

定义 17.3 当一个 $n \times n$ 矩阵 (a_i^j) 被认为是 $\mathbb{C}^n$ 上的线性变换时, 该矩阵的秩是线性变换的秩。

考虑 $\mathbb{C}^n$ 的标准基如下:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_i &= (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad 1 \leq i \leq n, \text{ 1在第 } i \text{ 个位置} \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

令 (a_i^j) 是任意 $n \times n$ 复矩阵, 并且 $(z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^n, z^i \in \mathbb{C}, 1 \leq i \leq n$ 。则通过

$$z'^i = a_j^i z^j \in \mathbb{C}^n \quad (17.12)$$

(a_i^j) 作为在 $\mathbb{C}^n$ 上线性算符 A 。此外

$$A(e_i) = (a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^n) \quad (17.13)$$

因此, 回忆 (1.16) 时, (a_i^j) 表示 $\mathbb{C}^n$ 中的标准基。现在对于任何向量空间 V , 任何线性算符 $A: V \rightarrow V$, 并且 V 的任何基 $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\operatorname{im} A$ 是由 $\{A(e_1), \dots, A(e_n)\}$ 的一个**最大线性无关子集 (maximally linearly independent subset)** 生成的。从定义 17.3 和方程 (17.13) 得出, $n \times n$ 矩阵的秩等于矩阵的线性无关行的最大数。

从以上讨论中可以明显看出以下事实。

定理 17.5 线性算符 A 的秩等于表示它的任意矩阵的秩。

定理 17.6 $n \times n$ 矩阵的秩在相似变换下是不变的, 即: 对于任何 $n \times n$ 可逆矩阵 B 有

$$\text{rank}(B^{-1}AB) = \text{rank}(A) \quad (17.14)$$

最后, 根据定理 17.3 和推论 17.1, 我们得到

定理 17.7 (a) 当且仅当 $\text{rank}(A) = n$ 时, 线性算符 $A: V \rightarrow V$ 是可逆的, 其中 $\dim(V) = n$ 。

(b) 当且仅当 $\text{rank}((a_i^j)) = n$ 时, $n \times n$ 矩阵 (a_i^j) 是可逆的。

练习 17.3 补充定理 17.7 的证明的细节。

除了上面的三个定理之外, 我们还有一个关于线性算符秩的重要事实。

定理 17.8 令 A 是内积空间 V 上的线性算符。则

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^\dagger) \quad (17.15)$$

其中, $A^\dagger$ 是 A 的伴随。

证明: 回想一下, 子空间 $M \subset V$ 的**正交补 (orthogonal complement)**, 表示为 $M^\perp$, 是 V 中与 M 中的每个向量正交的所有向量的集合。 $M^\perp$ 本身是 V 的子空间。

练习 17.4 证明上面的表述。

我们将首先证明这一点

$$(\text{im } A)^\perp = \ker(A^\dagger) \quad (17.16)$$

假设 $x \in (\text{im } A)^\perp$ 。则: 对于任意 $y \in V$, 都有

$$(x, Ay) = 0 \quad (17.17)$$

但是对于任意 $y \in V$ 有 $(x, Ay) = (A^\dagger x, y)$ 。因此对于任意 $y \in V$ 有 $(A^\dagger x, y) = 0$ 。这说明 $A^\dagger x = 0$, 因此 $x \in \ker(A^\dagger)$ 。从而

$$(\text{im } A)^\perp \subset \ker(A^\dagger) \quad (17.18)$$

相反, 假设 $x \in \ker(A^\dagger)$ 。则: 对于任意 $y \in V$ 有

$$(y, A^\dagger x) = 0 = (Ay, x) \quad (17.19)$$

其中第二个等号来自 (10.8)。这说明 $x \in (\text{im } A)^\perp$ 。从而

$$\ker(A^\dagger) \subset (\text{im } A)^\perp \quad (17.20)$$

方程 (17.18) 和 (17.20) 则说明 (17.16)。从 (17.16) 和 (17.10), 我们有

$$\begin{aligned}\dim(\ker(A^\dagger)) &= \dim(\operatorname{im} A)^\perp = \dim(V) - \dim(\operatorname{im} A) \\ &= \dim(V) - \operatorname{rank}(A) = \dim(\ker A)\end{aligned}\quad (17.21)$$

上面的第三个等号也可以写成

$$\dim(V) = \operatorname{rank}(A) + \dim(\ker(A^\dagger)) \quad (17.22)$$

同时, (17.10) 可以用在 $A^\dagger$ 域

$$\dim(V) = \operatorname{rank}(A^\dagger) + \dim(\ker(A^\dagger)) \quad (17.23)$$

然后通过比较上述两个等式得出该定理。□

现在让我们回顾一下我们对内积空间中给定基 $\{e_i\}$ 的对偶基 $\{e'_i\}$ 的讨论 [c.f. 关于 (10.18) 的讨论]。我们看到: 如果矩阵 (a_i^j) 表示依赖于 $\{e_i\}$ 的某个线性算符 A , 那么 hermitian 共轭矩阵 $(\overline{a_i^j})^T$ (复共轭矩阵的转置) 表示依赖于 $\{e'_i\}$ 伴随算符 $A^\dagger$ 。让我们称矩阵的线性无关行的最大数量为**行秩 (row rank)**, 并称矩阵的线性无关列的最大数量为**列秩 (column rank)**。根据定理 17.5 和 17.8 有

$$\begin{aligned}(\alpha_i^j) \text{ 的行秩} &= \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^\dagger) = (\overline{a_i^j})^T \text{ 的行秩} \\ &= (\overline{a_i^j}) \text{ 的列秩} = (a_i^j) \text{ 的列秩}\end{aligned}\quad (17.24)$$

我们因此有下面有用的事实。

定理 17.9 方阵的行秩等于其列秩, 并且两者都被称为矩阵的**秩 (rank)**。

在我们以前所有出现“矩阵的秩”的术语的定理中, 我们可以理解它表示行秩或列秩。

我们现在回到研究线性算符的本征值上。

定义 17.4 对于一个任意标量 λ 和线性算符 $A: V \rightarrow V$, 数

$$\dim(\ker(A - \lambda))$$

称为 λ 的**几何重数 (geometric multiplicity)**。换句话说, 它是 V 的子空间的维度, 由本征值为 A 的本征向量组成。

如果 λ 不是 A 的本征值, 则 $\ker(A - \lambda) = \{0\}$, 并且 λ 的几何重数为 0。

定义 17.5 对于一个任意标量 λ 和线性算符 A , λ 的重数作为本征值方程

$$\det(A - \lambda) = 0$$

的一个根称为 λ 的**代数重数 (algebraic multiplicity)**。换句话说, λ 的代数重数是 λ 作为本征方程的根出现的次数。

上述重数的两个概念并不完全相同。关于它们一般的关系, 人们可以做出的最强的表述

是：本征值的几何重数永远不会大于它的代数重数。然而，我们不会关注这种技术上的差异，并且完全处理可以分别这两者的情况。我们除去证明条件而表述如下。

定理 17.10 设 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ 为 n 维线性空间上依赖于几何重数 $m_1, \dots, m_p$ 的线性算符 A 的所有不同本征值。如果

$$\sum_{i=1}^p m_i = n \quad (17.25)$$

则：对于任意 $i = 1, \dots, p$ ，几何重数 m_i 等于代数重数 λ_i 。

从现在开始，我们将两种类型的重数只当作重数。

假设满足定理 17.10 的条件，我们有

$$\det(A - \lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_p - \lambda)^{m_p} \quad (17.26)$$

$$m_1 + \cdots + m_p = \dim(V) \quad (17.27)$$

通过令 $\lambda = 0$ ，我们立刻得到有用的结果

$$\det(A) = \prod_{i=1}^p \lambda_i^{m_i} \quad (17.28)$$

即：线性算符的行列式等于它的本征值重数倍相乘。

考虑一个线性算符 A 的一个矩阵表示 (a_i^j) 。则 $A - \lambda$ 的矩阵表示为 $(a_i^j - \lambda \delta_i^j)$ 。运用 (16.75) 我们有

$$\det(A - \lambda) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) \left(a_1^{\sigma(1)} - \lambda \delta_1^{\sigma(1)} \right) \cdots \left(a_n^{\sigma(n)} - \lambda \delta_n^{\sigma(n)} \right) \quad (17.29)$$

如果我们也写成

$$\det(A - \lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \cdots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \alpha_n \lambda^n \quad (17.30)$$

我们看到

$$\alpha_n = (-1)^n \quad (17.31)$$

$$\alpha_0 = \det(A) \quad (17.32)$$

并且

$$\frac{\alpha_{n-1}}{(-1)^{n-1}} = a_1^1 + a_2^2 + \cdots + a_n^n = \operatorname{Tr}(a_i^j) \quad (17.33)$$

其中，“ Tr ”表示“迹”，即：一个矩阵的对角线元素的和。

练习 17.5 对于 $n = 4$ 的情况验证 (17.33)。

另一方面，从 (17.26)， $\det(A - \lambda)$ 中 λ^{n-1} 的参数 α_{n-1} 也通过下式给出

$$\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} (m_1 \lambda_1 + \cdots + m_p \lambda_p) \quad (17.34)$$

对比 (17.33) 和 (17.34), 我们得到另一个有用的结论:

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(a_i^j) = \sum_{i=1}^p m_i \lambda_i \quad (17.35)$$

注意, 根据定理 17.2, 矩阵的轨迹在相似变换下是不变的, 因此, $\mathrm{Tr}(a_i^j)$ 是 (a_i^j) 表示的线性算符 A 的一个数字本征。行列式和秩是线性算符的两个重要的不变量 (在相似变换下)。

关于线性算符 $A: V \rightarrow V$ 的一个重要问题是: 是否存在 V 的基 $\{e_1, \dots, e_n\}$, 使得 A 的矩阵表示是对角化的? 如果这样一组基存在, 则称 A 是**对角化的 (diagonalizable)**, 并且 (17.26) 的一瞥表明对角矩阵表示的对角元素恰好是 A 的本征值, 包括重数。通过适当排列基向量, 对角矩阵将以下列标准形式出现:

$$(a_i^j) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \quad (17.36)$$

其中, 沿着对角线本征值 λ_1 出现 m_1 次, 本征值 λ_2 出现 m_2 次, $\dots$, 本征值 λ_p 出现 m_p 次。

练习 17.6 说明如果 A 是对角化的, 则对角化矩阵的对角元素都恰好是 A 的本征值, 包括重数。

以下定理我们关于对角化的第一个重要结果。

定理 17.11 如果在 n 维向量空间的线性算符 A 有 n 个不同的非零本征值, 则 A 是可对角化的。

证明: 设 A 有 n 个不同的非零本征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 。则它们对应 n 个不同的非零本征向量 $e_1, \dots, e_n$ 使得

$$A(e_1) = \lambda_1 e_1, \dots, A(e_n) = \lambda_n e_n \quad (17.37)$$

我们将证明 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是线性无关的。实际上, 假设相反成立, 即: $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是线性相关的。我们总可以重新排列这个集合中的向量, 不失一般性, 我们可以写

$$e_n = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i, \quad m < n \quad (17.38)$$

其中, $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 是最大线性无关子集。因此

$$0 = (A - \lambda_n) e_n = \sum_{i=1}^m \alpha_i (A - \lambda_n) e_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) e_i \quad (17.39)$$

因为 $\{e_1, \dots, e_m\}$ 是线性无关的

$$\alpha_i(\lambda_i - \lambda_n) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

但是通过假设, $\lambda_i \neq \lambda_n$ (本征值不同)。因此 $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, m$, 通过 (17.38) 说明 $e_n = 0$ 。这是一个矛盾, 因为 e_n 应该是属于非零本征值 λ_n 的非零本征向量。因此 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 一定是线性无关的。由于 $\dim(V) = n$ 它也一定是 V 的一组基。对比 (17.37) 和 (1.16), 我们看到依赖于基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 的 A 的矩阵表示由属于非零本征值的本征向量组成, 由下面的对角矩阵给出

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

最终得到定理。 □

R 定理 17.11 只给出了一个对于线性算符 A 可对角化的足够但不是必要的条件。

现在, 我们将给出一个线性算子可对角化的充分必要条件 (如定理 17.12)。首先我们给

定义 17.6 V 的子空间 $\ker(A - \lambda_k)$ 对应于线性算符 A 的本征值 λ_k 被称为属于 λ_k 的 A 的本征空间 (*eigenspace*)。

定理 17.12 当且仅当 V 是 A 的所有本征空间的直和, 线性算符 $A: V \rightarrow V$ 是可对角化的。

证明: 首先我们回想一下 V 的两个向量子空间 $H \subset V$ 和 $K \subset V$ 的直和 (**direct sum**), 写成 $H \oplus K$ 。表述 $V = H \oplus K$ 意味着

- i) $H \cap K = \{0\}$ (V 中的零向量);
- ii) 任意 $v \in V$ 可以被唯一的表述成

$$v = h + k, \quad h \in H, k \in K \quad (17.40)$$

现在假设 A 的本征值分别为 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, 分别对应代数重数 $m_1, \dots, m_p$ 。假设

$$V = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p \quad (17.41)$$

其中, $E_i = \ker(A - \lambda_i), i = 1, \dots, p$ 是属于本征值 λ_i 的本征空间。通过定理 17.10, 几何和代数重数实际上是相等的, 并且因此

$$\dim(E_i) = m_i, \quad i = 1, \dots, p \quad (17.42)$$

选择 p 个基:

$$\{e_1^{(1)}, \dots, e_{m_1}^{(1)}\}, \{e_1^{(2)}, \dots, e_{m_2}^{(2)}\}, \dots, \{e_1^{(p)}, \dots, e_{m_p}^{(p)}\}$$

分别对于子空间 $E_1, \dots, E_p$ 。则通过 (17.41) 的属性 p 个集合的组合:

$$\mathcal{B} = \left\{ e_1^{(1)}, \dots, e_{m_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, \dots, e_{m_2}^{(2)}, \dots, e_1^{(p)}, \dots, e_{m_p}^{(p)} \right\}, \quad m_1 + \dots + m_p = n$$

组成了 V 的一组基。我们有

$$A(e_j^{(i)}) = \lambda_i e_j^{(i)}, \quad i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, m_i \quad (17.43)$$

因此, 依赖于基 $\mathcal{B}$, A 是对角化的, 并且它的矩阵表示由 (17.36) 给出。

反过来, 假设 A 是对角化的。则存在一组基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 使得

$$A(e_i) = \gamma_i e_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (17.44)$$

由此 A 得到 A 的本征值方程为

$$(\gamma_1 - \lambda)(\gamma_2 - \lambda) \dots (\gamma_n - \lambda) = 0 \quad (17.45)$$

同样的本征值方程也由下式给出

$$(\lambda_1 - \lambda)^{m_1} (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \dots (\lambda_p - \lambda)^{m_p} = 0 \quad (17.46)$$

然后我们可以排列这些数字 $\gamma_i, i = 1, \dots, n$ 使得

$$\begin{aligned} & (\gamma_1, \dots, \gamma_{m_1}, \gamma_{m_1+1}, \dots, \gamma_{m_1+m_2}, \dots, \gamma_{m_1+\dots+m_{p-1}+1}, \dots, \gamma_{m_1+\dots+m_p}) \\ &= \left(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_2}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p} \right) \end{aligned} \quad (17.47)$$

上面的方程说明第一个 m_1 个 γ 都等于 λ_1 , 下一个 m_2 个 γ 都等于 λ_2 , 依此类推。显然

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{span}\{e_1, \dots, e_{m_1}\} \\ E_2 &= \text{span}\{e_{m_1+1}, \dots, e_{m_1+m_2}\} \\ &\vdots \\ E_p &= \text{span}\{e_{m_1+\dots+m_{p-1}+1}, \dots, e_{m_1+\dots+m_p}\} \end{aligned} \quad (17.48)$$

并且因此

$$V = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$$

□

现在出现了许多物理应用的中心定理。

定理 17.13 在内积空间 (么正空间) 的 hermitian 算符总是对角化的。

证明: 令 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ 为内积空间 V 中 hermitian 算符 A 的非零本征值, 并且令 e_1 为属于 λ_1 的 A 的本征向量。(请记住, 复向量空间上的线性算符保证至少有一个非零本征值)。我们构造 e_1

的正交分量:

$$E_1^\perp \equiv \{x \in V \mid (x, e_1) = 0\} \quad (17.49)$$

在上面的方程中, 内积满足 (8.27) 和 (8.28)。\$E_1^\perp\$ 显然是 \$V\$ 的一个子空间。此外, 它在 \$A\$ 下是不变的。的确, 对于 \$x \in E_1^\perp\$, 有

$$(Ax, e_1) = (x, A^\dagger e_1) = (x, Ae_1) = (x, \lambda_1 e_1) = \lambda_1 (x, e_1) = 0 \quad (17.50)$$

其中, 第二个等号来自 \$A = A^\dagger\$ 的事实, 而第四个等号来自于 \$\lambda_1 \in \mathbb{R}\$ 的事实。\$E_1^\perp\$ 则是 \$A\$ 下 \$V\$ 的不变子空间。令 \$A\$ 到 \$E_1^\perp\$ 的限制表示为 \$A_1\$。\$A_1\$ 则是 \$E_1^\perp\$ 的 hermitian 算符。保证至少有一个非零本征值 \$\lambda_2 \in \mathbb{R}\$ (可能不一定与 \$\lambda_1\$ 不同)。令 \$e_2 \in E_1^\perp\$ 为属于 \$\lambda_2\$ 本征值的 \$A_1\$ 的本征向量:

$$A_1 e_2 = \lambda_2 e_2 = A e_2 \quad (17.51)$$

\$\{e_1, e_2\}\$ 必须是线性无关的, 因为集合中的向量彼此正交。接下来我们构造集合

$$E_2^\perp \equiv \{x \in V \mid (x, e_1) = (x, e_2) = 0\} \quad (17.52)$$

通过与上述相同的讨论, \$E_2^\perp\$ 也是在 \$A\$ 下的 \$V\$ 的不变子空间。将 \$A\$ 到 \$E_2^\perp\$ 的限制表示为 \$A_2\$。\$A_2\$ 则是 \$E_2^\perp\$ 上的 hermitian 算符。保证有一个实的非零本征值 \$\lambda_3\$, 有一个本征向量 \$e_3 \in E_2^\perp\$:

$$A_2 e_3 = \lambda_3 e_3 = A e_3 \quad (17.53)$$

\$\{e_1, e_2, e_3\}\$ 是正交线性无关的集合。以相同的方式继续, 我们可以生成 \$A\$ 的最大线性无关的本征向量的正交集 \$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}\$, 其中 \$n = \dim(V)\$。\$\mathcal{B}\$ 实际上是 \$V\$ 的一组基。很明显, 依赖于这组基, \$A\$ 由对角矩阵表示, 其对角元素是 \$A\$ 的本征值。 \$\square\$

在 Chapter 13 中, 我们看到了一个 hermitian 算符的本征值总是实的。由于物理测量总是得到实数, 因此表示量子力学中的物理可观测量的算符 (例如能量和动量) 通常需要是 hermitian 算符。它们总是可对角化的事实说明由 hermitian 算符的本征向量描述的物理系统总是存在状态, 使得如果一个测量对应于算符作用在系统上, 则可以得到属于算符的实谱的值。

在定理 17.13 的证明中构造的基 \$\mathcal{B}\$ 当然可以归一化: \$(e_i, e_i) = 1, i = 1, \dots, n\$。因此, 定理 17.13 也说明

推论 17.2 么正空间上的 hermitian 算符 \$A\$ 总是可以通过 \$A\$ 的本征向量的标准正交基来对角化。

回想一下, 依赖于标准正交基的 hermitian 算符由 hermitian 矩阵表示:

$$a_i^j = \overline{a_j^i} \quad (17.54)$$

[c.f. 方程 (10.26)]。由于在基的变化下, 线性算符的矩阵表示经历了相似变换 [c.f. 方程 (1.41)], 我们得到以下结果。

推论 17.3 *hermitian* 矩阵总是可以通过相似变换对角化。

由于实对称矩阵只是 *hermitian* 矩阵的特例，我们有：

推论 17.4 实对称矩阵总是可以通过相似变换对角化。

回想一下 Chapter 2 中的讨论，转动惯量张量为实对称矩阵的一个例子。实对称矩阵的对角化是解决涉及经典力学和固态物理中的小振荡的所谓**简正模 (normal mode)** 问题的最重要的数学工具。

当么正空间 V 中的一个线性变换 A 不可对角化时，仍然总是有可能找到 V 的一组合适的基，其中， A 出现在标准 (在某种意义上是最简单的) 形式中，称为 **Jordan 标准型 (Jordan canonical form)**。这背后的理论将不在此处详细介绍；我们只会在没有证明的情况下表达主要事实 (在大多数情况下)。读者将在关于矩阵，以及线性系统的微分方程解的技术理论的书籍中找到关于该主题的详细说明 (参见例如，M. W. Hirsch 和 S. Smale 1974)。

定义 17.7 设 A 是向量空间 V 上的线性变换，并且 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ 分别是具有代数重数 $m_1, \dots, m_p$ 的 A 的本征值。子空间

$$\mathcal{E}_k \equiv \ker (A - \lambda_k)^{m_k}, \quad k = 1, \dots, p \quad (17.55)$$

称为属于 λ_k 的 A 的**广义本征空间 (generalized eigenspace)**。

我们注意到 $\mathcal{E}_k$ 在 A 下是不变的。事实上，令 $x \in \mathcal{E}_k$ ，然后根据定义：

$$(A - \lambda_k)^{m_k} x = 0 \quad (17.56)$$

因此

$$(A - \lambda_k)^{m_k} Ax = A(A - \lambda_k)^{m_k} x = 0$$

我们有以下基本定理。

定理 17.14 — 准素分解定理 (Primary Decomposition Theorem). 设 A 是复空间 V 上的算符。则 V 是 A 的广义本征空间的直和。每个广义本征空间的维数等于对应本征值的代数重数。

定义 17.8 如果存在正整数 m 使得 $N^m = 0$ ，则认为算符 N 是**幂零的 (nilpotent)**。最小的这种整数称为幂零的**指数 (index)**。

下面的定理是定理 17.14 的最重要结果。

定理 17.15 设 A 是复空间 V 上的线性算符。则 A 可以唯一地写为

$$A = S + N \quad (17.57)$$

其中，i) $SN = NS$ ，ii) S 是可对角化的，并且 iii) N 是幂零的。

回想一下，对于 $X \in V$ ，微分方程组的形式解

$$\frac{dX}{dt} = AX \quad (17.58)$$

由下式给出

$$X(t) = X(0)e^{At} \quad (17.59)$$

使用上述定理和 $S = A - N$ 的基是对角化的，可以相对简单地计算指数。因此

$$e^{At} = e^{(S+N)t} = e^{St}e^{Nt} \quad (17.60)$$

在第二个等号位置，我们在定理 17.15 中使用了属性 i)。对角矩阵的指数很容易计算：

$$\exp \begin{pmatrix} s_1 t & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & s_n t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{s_1 t} & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & e^{s_n t} \end{pmatrix} \quad (17.61)$$

而幂零矩阵的指数由下式给出

$$e^{Nt} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(Nt)^k}{k!} \quad (17.62)$$

这是一个有限地求和。

练习 17.7 证明 (17.61)。

准素分解定理的一个有趣结果如下。

定理 17.16 — Cayley-Hamilton 定理 (Cayley-Hamilton Theroem). 设 A 是向量空间 V 上具有如下本征多项式的算符

$$p(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k \quad (17.63)$$

则

$$p(A) = 0 \quad (17.64)$$

即：对于任意 $v \in V$

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k A^k v = 0 \quad (17.65)$$

证明：如果 V 是实空间，我们可以形成 V 的**复化 (complexification)**，这是一个复空间。该过程包括形成 V 的一组基的所有复线性组合，其留下 A 的本征多项式不变。因此，为了证明这个定理，假设 V 是复并没有一般性的损失。

足以说明

$$p(A)x_k = 0 \quad (17.66)$$

其中， $x_k \in \mathcal{E}_k$ (对应于本征值 λ_k 的第 k 个广义本征空间)。由于 $(t - \lambda_k)^{m_p}$ 除以 $p(t)$ ，我们可以写

$$p(t) = q(t)(t - \lambda_k)^{m_p} \quad (17.67)$$

因此，对于 $x_k \in \mathcal{E}_k$ ，我们有

$$p(A)x_k = q(A)(A - \lambda_k)^{m_p} x_k = q(A)(0) = 0 \quad (17.68)$$

□

我们现在将讨论如何进行定理 17.15 的 $S + N$ 分解。令 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ 是复空间 V 上算符 A 的不同本征值, 代数重数分别为 $m_1, \dots, m_p$ 。令 $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_p$ 为相应的广义本征空间。然后按定理 17.4

$$V = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_p \quad (17.69)$$

考虑 A 对广义本征空间的限制:

$$A_k \equiv A|_{\mathcal{E}_k}, \quad k = 1, \dots, p \quad (17.70)$$

复空间 $\mathcal{E}_k$ 上的线性算符 A_k 显然只有一个本征值, 即: λ_k 。根据定义

$$N_k \equiv A_k - \lambda_k$$

是幂零的, 因为 $x \in \mathcal{E}_k$ 说明 $(A_k - \lambda_k)^{m_k} x = 0$ 。因此

$$A_k = \lambda_k + N_k \quad (17.71)$$

其中, $\lambda_k (= \lambda_k 1)$ 是可对角化的 (事实上依赖于 $\mathcal{E}_k$ 中的任何基是对角线的) 并且 N_k 是幂零的。在这一点上, 我们需要引入算符直和的概念。

定义 17.9 假设 $A_1, \dots, A_p$ 分别是 V 的量子空间 $V_1, \dots, V_p$ 的线性算符; 并且

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$$

则算符的直和

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_p \quad (17.72)$$

作用于 V 由下式给出

$$Av = A_1 v_1 + \cdots + A_p v_p \quad (17.73)$$

其中, $v \in V$ 有唯一的分解

$$v = v_1 + \cdots + v_p$$

其中, $v_k \in V_k, k = 1, \dots, p$ 。

然后由 (17.70) 给出 A_k 的限制满足 (17.71) 和 (17.72), 其中, N_k 是幂零的。现在令

$$S = \lambda_1 1 \oplus \cdots \oplus \lambda_p 1 \quad (17.74)$$

$$N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_p \quad (17.75)$$

则

$$A = S + N \quad (17.76)$$

S 显然是对角化的 [依赖于 V 的任何基具有 (17.36) 的形式]; 并且 N 是幂零的, 因为 $N^m = 0$, 其中 $m = \max(m_1, \dots, m_p)$ 。很显然 S 和 N 对易。定理 17.15 则断言上述结构对于 S 和 N

是唯一的。

S 的标准型 (17.36) 将表示为

$$S = \text{diag} \{ \lambda_1(m_1), \dots, \lambda_p(m_p) \} \quad (17.77)$$

也可以构造 N 的标准型。

定义 17.10 基本幂零块 (*elementary nilpotent block*) 是 $n \times n$ 矩阵有如下的形式

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (17.78)$$

其中，在对角线上方为 1，在其它地方为 0。

假设矩阵 (17.78) 表示依赖于基 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 的算符 N 。则

$$N(e_1) = e_2, N(e_2) = e_3, \dots, N(e_{n-1}) = e_n, N(e_n) = 0 \quad (17.79)$$

因此， $N^n(e_k) = 0, k = 1, \dots, n$ ，这说明 $N^n = 0$ 。此外， $N^k \neq 0$ 对于 $0 \leq k \leq n$ ，因为 $N^k e_1 = e_{k+1} \neq 0$ 。因此， N 是指数为 n 的幂零。

定理 17.17 假设 N 是 (实或复) 向量空间 V 上的幂零算符。则存在 V 的一组基，给出 N 的矩阵表示形式如下

$$N = \text{diag} \{ N_1, \dots, N_r \} \quad (17.80)$$

其中

$$r = \dim(\ker N) \quad (17.81)$$

$N_j, j = 1, \dots, r$ 是基本幂零块，并且 N_j 的大小是 j 的非递增函数。块 N_j 由 N 唯一确定。

作为说明，我们可以具有以下排列的幂零块。

$$N = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & & (0) & \\ & & & & (0) \\ & & & & & (0) \end{pmatrix} \quad (17.82)$$

其中, 空的地方全部用 0 填充。形式 (17.80) 称为幂零算符的**幂零标准型 (nilpotent canonical form)**。很明显, 每个 $k \times k$ 个基本幂零块的秩 (独立行或列的最大数量) 是 $k - 1$, 所以

$$\dim(\operatorname{im} N) = n - r \quad (17.83)$$

其中, $r = N$ 中基本幂零块的总数。从定理 17.3 中, 后面有

$$n = \dim(\ker N) + n - r \quad (17.84)$$

这立即说明 (17.81)。

定理 17.18 相同向量空间上的两个幂零算符, 当且仅当它们通过相似变换相关时, 具有相同的标准型。

我们将不会讨论构造幂零标准型的方法, 也不会讨论得到这种形式的基。必要的技术在涉及矩阵的数值工作中是重要的主体, 我们并不直接关注。

将 A (在复向量空间上) 的矩阵表示减少到 Jordan 标准型的最后一步是写下属于不同本征值 $\lambda_k, k = 1, \dots, p$ 的 Jordan 矩阵。这是矩阵表示

$$A_k = A|_{\mathcal{E}_k} = \lambda_k 1 + N_k \quad (17.85)$$

依赖于基 $\mathcal{B}_k$, 它给出了 N_k 的幂零标准型。它具有下面的 (17.86) 给出的形式: 矩阵沿着对角线有 λ_k , 并且在对角线的正上方为 1 和 0, 并且其它地方为 0。

$$C_k = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix} & & & \\ & \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix} & & \\ & & \dots & \\ & & & \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (17.86)$$

每个 C_k 是 $(m_k \times m_k), k = 1, \dots, p$ 。构成 C_k 的每个块称为**基本 Jordan 矩阵 (elementary Jordan matrix)** 或**基本 λ -块 (elementary λ -block)**。根据定理 17.14, 基 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_p$ 生成整个 V 。依赖于 $\mathcal{B}$, $A = S + N$ 则表示为如下矩阵

$$C = \operatorname{diag}\{C_1, \dots, C_p\} \quad (17.87)$$

该矩阵称为 A 的**Jordan 标准型 (Jordan canonical form)**。算符 A 确定其 Jordan 标准型, 唯一地由 Jordan 矩阵 C_k (对应于不同的本征值) 出现的顺序确定。

最后, 根据 (17.81), 每个 Jordan 矩阵 C_k 中的基本 λ -块的数量是 $\dim(\ker(A_k - \lambda_k))$ 。

18. 群表示理论

Chapter 4 (定义 4.3) 给出了群表示的一般定义。在本章中，我们将介绍一些与其理论相关的基本概念和技术，特别是对于有限群。物理学中的群表示以及其数学本身的重要性不容小觑。

让我们首先通过总体上考虑群表示理论在量子力学中的相关性来激励我们的研究。回想一下，在量子理论中，物理系统的状态由 Hilbert 空间中的向量 (实际上是一条直线，或着说相互之间共线从而相差一个乘积因子为复数的向量，但我们将在忽略这些细节) 和 Hilbert 空间上的幺正算符，如有限平移，有限旋转和时间演变是非常重要的，因为它们是规范不变的。令 $U : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的**对称群 (symmetry group)** G 的一个幺正算符 [如 $SO(3)$]，其中 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$ 上的幺正变换群。 G 是对称群意味着它使得 Hamilton 量 H 不变：对于任意 $g \in G$ ，有

$$U^\dagger(g) H U(g) = H \quad (18.1)$$

或者

$$U(g) H = H U(g) \quad (18.2)$$

回忆到 $U(g)$ 是一个幺正的意味着 $U^{-1}(g) = U^\dagger(g)$ 。作为 G 的对称性质的结果，任意 $U(g)|\psi\rangle$ 也是如下 Schrödinger 方程的一个解

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (18.3)$$

如果 $|\psi\rangle$ 具有相同本征值 E 。实际上

$$\begin{aligned} H U(g)|\psi\rangle &= U(g) U^\dagger(g) H U(g)|\psi\rangle = U(g) H |\psi\rangle \\ &= U(g) E |\psi\rangle = E (U(g)|\psi\rangle) \end{aligned} \quad (18.4)$$

练习 18.1 说明：对于任意 $g \in G$ ，当且仅当 $[H, U(g)] = 0$ 时，在 $U(g)$ 下，对于一个可观测量 A ，Schrödinger 方程 (18.3) 和 Heisenberg 运动学方程 [(9.16)]

$$\frac{dA}{dt} = \frac{[A, H]}{i\hbar} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

是不变的。

一般来说，一个能量本征值可能是简并的。对于一个特定的 E ，如果 $\mathcal{H}$ 中的 r 个向量 $\{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_r\rangle\}$ 的集合生成本征空间 V_E 称为 r -重简并。上面的讨论说明：对于任意 $g \in G$ ，如果 $|\psi\rangle \in V_E$ ，则也有 $U(g)|\psi\rangle \in V_E$ 。我们也称 G 的群作用使得任意本征空间不变。

假设 G 作用在 $x \in M$ 上，举个例子， $M = \mathbb{R}^3$ 。使用 Dirac 符号由 $U(g)$ 对 $|\psi\rangle$ 的作用来得到它对波函数 $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ ($|\psi\rangle$ 的坐标表示) 的作用是有趣的。我们稍微概括并考虑在装配 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_R$ (见 Chapter 15) 上而不是 $\mathcal{H}$ 上的 G 的一个幺正表示 $G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_R)$ ，其中，对于可归一化状态 $|\psi\rangle$ ， $U_R(g)|\psi\rangle \equiv U(g)|\psi\rangle$ ，对于不可归一化状态 $|x\rangle$ ， $U_R(g)|x\rangle \equiv |gx\rangle$ 。后一条件满足幺正性，因为对于任意 $x_1, x_2 \in M$ ， $\langle x_1|gx_2\rangle = \langle g^{-1}x_1|x_2\rangle$ 。

假设

$$U(g)|\psi\rangle = |\psi'\rangle \quad (18.5)$$

则

$$\begin{aligned} U(g)\psi(x) &= \psi'(x) = \langle x|\psi'\rangle = \langle x|U(g)|\psi\rangle \\ &= \langle x|U_R(g)|\psi\rangle = \langle U_R^{-1}x|\psi\rangle = \langle g^{-1}x|\psi\rangle = \psi(g^{-1}x) \end{aligned} \quad (18.6)$$

我们已经在 (4.17) 中运用了此结果。

练习 18.2 验证群作用

$$U(g)\psi(x) = \psi(g^{-1}x) \quad (18.7)$$

满足群同态要求

$$U(g_1)U(g_2)\psi(x) = U(g_1g_2)\psi(x) \quad (18.8)$$

从我们前面的讨论中，我们得出结论：对于任意 $g \in G$ ，如果 Hamilton 量 H 与 $U(g)$ 对易，则 $U(g)$ 给出 H 的任意本征子空间上 G 的一个幺正表示。因此，如果我们找到了使得 H 不变的群 G 的不等价不可约表示，则我们将找到 H 的所有能量本征值的完全分类，而不用显式求解 Schrödinger 方程。(不久将定义不等价不可约表示的概念)。这种使用群表示理论的分类在原子，分子，凝聚态物质和粒子物理学中得到了重要的应用。

现在让我们定义群表示理论中的等价和不可约概念。

定义 18.1 如果群 G 的两个表示 $D_1 : G \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{V}_1)$ 和 $D_2 : G \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{V}_2)$ 由一个相似变换 [(1.42)] 关联起来：对于任意 $g \in G$ ，有

$$D_2(g) = SD_1(g)S^{-1} \quad (18.9)$$

则称这两个表示为**等价群表示** (equivalent group representation)。其中， S 是从 $\mathbb{V}_1$ 到 $\mathbb{V}_2$ 的可逆线性变换。

定义 18.2 相对于群表示 $D: G \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{V})$, 对于任意 $g \in G$, 如果 $v \in \mathbb{V}_1$ 说明 $D(g)v \in \mathbb{V}_1$, 则子空间 $\mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}$ 被称为是 $\mathbb{V}$ 的一个**不变子空间** (*invariant subspace*)。如果不变子空间不包含任何除自身和 $\{0\}$ 之外的任何不变子空间, 即: 如果它不包含任何非平凡的不变子空间, 则称该不变子空间是**本征的** (*proper*)(或**最小的** (*minimal*))。

定义 18.3 $\mathbb{V}$ 上群 G 的表示 $D: G \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{V})$ 被称为**不可约的** (*irreducible*), 满足: 如果 $\mathbb{V}$ 不包含关于 D 的一个非平凡不变子空间向量空间; 否则, D 被称为**可约的** (*reducible*)。在后一种的情况下, 如果非平凡不变子空间的正交补关于 D 也是不变的, 则 D 被称为是**完全可约的** (*fully reducible*)(或者**可分解的** (*decomposable*))。

表达为一个矩阵 (依赖于 $\mathbb{V}$ 中基向量的一些选择), 可约表示 (相似变换的意义下) 的算符 $D(g)$ 看起来像:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ D'(g) & D_2(g) \end{pmatrix} \quad (18.10)$$

如果表示空间 $\mathbb{V}$ 是 n 维的, 则 $D(g)$ 是一个 $n \times n$ 矩阵。如果非平凡不变子空间 $\mathbb{V}_1$ 是 n_1 维的, $n_1 < n$, 则分块 $D_1(g)$ 是 $n_1 \times n_1$ 矩阵。为了看到 (18.10) 的形式, 我们选择 $\mathbb{V}$ 的一组基 $\{e_1, \dots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \dots, e_n\}$ 使得子集 $\{e_1, \dots, e_{n_1}\}$ 是 $\mathbb{V}_1$ 的一组基。 $\mathbb{V}_1$ 是不变的事实说明了

$$D(g)e_i = (D(g))_i^j e_j, \quad i = 1, \dots, n_1 \quad (18.11)$$

因此

$$(D(g))_i^j = 0, \quad i = 1, \dots, n_1; j = n_1 + 1, \dots, n \quad (18.12)$$

这些恰好是 (18.10) 等式右边右上方的元素。(回忆我们关于矩阵 a_i^j 的约定, i 是行指标, j 是列指标)。

一个完全可约表示矩阵看起来像, 相似变换的意义下

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix} \quad (18.13)$$

在这种情况下, 由 $\{e_{n_1+1}, \dots, e_n\}$ 生成的空间 $\mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_1^\perp$ 也是在 $D(g)$ 下不变的。因此

$$D(g)e_i = (D(g))_i^j e_j \in \mathbb{V}_2, \quad i = n_1 + 1, \dots, n \quad (18.14)$$

这说明了

$$(D(g))_i^j = 0, \quad i = n_1 + 1, \dots, n; j = 1, \dots, n_1 \quad (18.15)$$

这些正是 (18.13) 等式右边左下方分块中的元素。

练习 18.3 考虑

$$(D(\theta))_i^j = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

定义 $\mathbb{R}^2$ 上的单参数群 $SO(2)$ 的表示。说明这个表示在 $\mathbb{R}^2$ 上不可约。然而, 在复 $\mathbb{R}^2$ 上, 即: $\mathbb{C}^2$, 考虑成一个向量空间, 存在 $SO(2)$ 的完全可约表示。令 $\{e_1, e_2\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的一组基。

则它也是 $\mathbb{C}^2$ 的一组基。说明在 $\mathbb{C}^2$ 中的基 $e_i = S_i^j e'_j$ 变化下

$$e_+ = e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + ie_2), \quad e_- = e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - ie_2) \quad (18.16)$$

$(D(\theta))_i^j$ 可以对角化成 $D' = S^\dagger D S$ ，由下式给出

$$(D'(\theta))_i^j = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \quad (18.17)$$

很明显是完全可约的。该表示在物理学中具有非常有用的应用，例如，描述光子的偏振态。

练习 18.4 说明如果群 G 的么正表示是可约的，则它也是完全可约的。

定理 18.1 内积空间上有限群的每个表示等价于一个么正表示。

注：这一重要定理也推广到了紧致 Lie 群（见定理 22.3.）。

证明：令 $D : G \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{V})$ 为一个有限群 G 的一个表示。我们将说明存在一个不可约算符 $S \in \mathcal{T}(\mathbb{V})$ 使得：对于任意 $g \in G$ ，有

$$U(g) = S^{-1} D(g) S \quad (18.18)$$

是么正的。由下式定义算符 S ：对于任意 $v \in \mathbb{V}$ ，有

$$Sv = \sum_{g \in G} D(g)v \quad (18.19)$$

用 (u, v) 表示 $\mathbb{V}$ 中的内积。则

$$\begin{aligned} (U(g)u, U(g)v) &= (S^{-1} D(g) S u, S^{-1} D(g) S v) \\ &= \sum_{g' g''} (S^{-1} D(g) D(g') u, S^{-1} D(g) D(g'') v) = \sum_{h' h''} (S^{-1} D(h') u, S^{-1} D(h'') v) \\ &= (S^{-1} S u, S^{-1} S v) = (u, v) \end{aligned} \quad (18.20)$$

其中， $h' = gg'$ ， $h'' = gg''$ ，并且在第三个等号位置，我们运用了事实：当 g' 遍历整个群时， gg' 对于特定的 g 也是如此。因此， $U(g)$ 是么正的 [c.f. (10.15)]。□

通过练习 18.4 的结论和上面的定理，我们看到：有限群的所有可约表示都是完全可约的。

在本章的其余部分，我们将在有限群的不可约表示理论中发展一些基本和有用的事实。首先，我们介绍一个中心定理，Schur 引理，所有这些事实都是基于这个定理。一些重要的无限群 [如 $SO(3)$ 和 $SU(2)$] 的表示将在后面讨论（见 Chapter 21 和 Chapter 22）。

定理 18.2 — Schur 引理 (Schur's Lemma). 令 $D_1 : G \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{V}_1)$ 和 $D_2 : G \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{V}_2)$ 分别是群 G 在向量空间 $\mathbb{V}_1$ 和 $\mathbb{V}_2$ 上的两个不可约表示。令 $A : \mathbb{V}_1 \rightarrow \mathbb{V}_2$ 是一个线性映射使得

$$\text{对于任意 } g \in G \quad D_2(g)A = AD_1(g) \quad (18.21)$$

则

(1) 如果 D_1 不等价于 D_2 , 则 $A = 0$,

(2) 如果 $D_1 = D_2$ (因此 $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2$), 则 $A = \lambda I$, 其中 λ 是一个标量, I 是单位算符 (在 $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2$ 中)。

证明: 考虑 $\ker(A) = \{v_1 \in \mathbb{V}_1 | Av_1 = 0 \in \mathbb{V}_2\}$ 。对于任意 $g \in G$, 这是 D_1 下 $\mathbb{V}_1$ 的不变子群, 因为, 如果 $v_1 \in \ker(A)$, 则

$$AD_1(g)v_1 = D_2(g)Av_1 = D_2(g)(0) = 0 \in \mathbb{V}_2 \quad (18.22)$$

由于 D_1 根据假设是不可约的, $\mathbb{V}_1$ 不包含非平凡的不变子空间。因此 $\ker(A)$ 要么是 $\mathbb{V}_1$ 全部, 要么是 $\{0\}$ 。在前一种情况, $A = 0$ (零算符), 并且整个定理已经证明 [对于表述 (2) $\lambda = 0$]。假设 $\ker(A) = \{0\}$ 。则通过推论 17.1, A 建立了 $\mathbb{V}_1$ 和 $\mathbb{V}_2$ 间的同构。因此, 条件 (18.21) 可以被重写成

$$\text{对于任意 } g \in G \quad D_2(g)A = AD_1(g) \quad (18.23)$$

说明 D_1 和 D_2 是等价表示。这证明了 (1)。

为了证明表述 (2), 我们假设 $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}$ 是一个复向量空间。则 A 有至少一个本征值 [见 (17.5) 后面的讨论]。令 λ 是 A 的一个本征值, 并且 $\mathbb{V}_\lambda \subset \mathbb{V}$ 是对应 λ 的本征空间。则, 对于任意 $v \in \mathbb{V}_\lambda$, 有

$$Av = \lambda v \quad (18.24)$$

并且

$$AD_1(g)v = D_1(g)Av = \lambda D_1(g)v \quad (18.25)$$

因此 $\mathbb{V}_\lambda$ 是 $\mathbb{V}$ 的不变子空间; 并且因为根据假设 D_1 是不可约的, $\mathbb{V}_\lambda = \mathbb{V}$ 。于是得到 $A = \lambda I$ 。
□

推论 18.1 *Abel 群的不可约表示都是一维的。*

证明: 令 $D: G \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{V})$ 是一个 Abel 群 G 的一个不可约表示。对于确定的 $g' \in G$, G 的 Abel 性质意味着

$$\text{对于任意 } g' \in G, \quad D(g)D(g') = D(g')D(g) \quad (18.26)$$

令 $D(g')$ 扮演上面 Schur 引理表述中 A 的角色。则引理中的表述 (2) 意味着

$$D(g') = \lambda I \quad (18.27)$$

由于 g' 的选择是任意的, $D(g)$ 对于任意 $g \in G$ 是对角化的。由于 D 是不可约的, 矩阵 $D(g)$ 必须是 1×1 , 并且表示因此是一维的。
□

在为有限群的表示提出后面的结果之前, 在此列出与它们相关的各种量并定义一些符号

是极好的:

N_G = 群 G 元素的数量 (群的阶 (order))

$N_{(i)}$ = 第 i 共轭 (等价) 类中元素的数量

N_C = 群中共轭类的数量

N_R = G 的不等价不可约表示的数量

$N_{(\mu)}$ = 第 μ 不可约表示的维度 (只计算不可约表示)

$D_{(\mu)}(g)$ = 第 μ 不可约表示中对应 $g \in G$ 的线性算符

$\chi_{(\mu i)}$ = 第 μ 不可约表示中第 i 共轭类群元素的本征标 (character)

$\equiv \text{Tr} (D_{(\mu)}(g))$, $g \in$ 第 i 类

注意到通过定理 17.2和方程 (17.35), 本征标 $\chi_{(\mu i)}$ 独立于表示或类中的特定表示。我们对表示指标运用希腊字母, 对类指标运用拉丁字母。这些指标都不表示张量, 为了区别将它们放在括号里。括号里的指标求和将被显式给出, 同时 Einstein 求和标准将仅用于重复张量指标。

定理 18.3 — 群表示的正交归一性 (Orthonormality of Group Representations). 对于一个有限群 G

$$\frac{N_{(\mu)}}{N_G} \sum_{g \in G} \left(D_{(\mu)}^{-1}(g) \right)_i^k \left(D_{(\nu)}(g) \right)_l^j = \delta_{\mu\nu} \delta_i^j \delta_l^k \quad (18.28)$$

证明: 令 $\mathcal{M}$ 为一个任意 $N_{(\mu)} \times N_{(\nu)}$ 矩阵。然后定义 $N_{(\mu)} \times N_{(\nu)}$ 矩阵 $A_{\mathcal{M}}$ 如下

$$A_{\mathcal{M}} \equiv \sum_{g' \in G} D_{(\mu)}^{-1}(g') \mathcal{M} D_{(\nu)}(g') \quad (18.29)$$

我们有: 对于任意 $g \in G$, 有

$$\begin{aligned} D_{(\mu)}^{-1}(g) A_{\mathcal{M}} D_{(\nu)}(g) &= \sum_{g'} D_{(\mu)}^{-1}(g) D_{(\mu)}^{-1}(g') \mathcal{M} D_{(\nu)}(g') D_{(\nu)}(g) \\ &= \sum_{g'} \left(D_{(\mu)}(g') D_{(\mu)}(g) \right)^{-1} \mathcal{M} D_{(\nu)}(g') D_{(\nu)}(g) = \sum_{g'} D_{(\mu)}^{-1}(g'g) \mathcal{M} D_{(\nu)}(g'g) \\ &= \sum_{g'} D_{(\mu)}^{-1}(g') \mathcal{M} D_{(\nu)}(g') = A_{\mathcal{M}} \end{aligned} \quad (18.30)$$

因此

$$\text{对于任意 } g \in G, \quad A_{\mathcal{M}} D_{(\nu)}(g) = D_{(\mu)}(g) A_{\mathcal{M}} \quad (18.31)$$

通过 Schur 引理, 无论是 $\mu \neq \nu$, 在这种情况下 $A_{\mathcal{M}}$, 还是 $\mu = \nu$, 在这种情况下 $A_{\mathcal{M}} = \lambda_{\mathcal{M}} I$ 。

现在让我们考虑 $N_{(\mu)} N_{(\nu)}$ 矩阵的集合, $\mathcal{M}_l^k, l = 1, \dots, N_{(\mu)}, k = 1, \dots, N_{(\nu)}$ 。每个都是一个 $N_{(\mu)} \times N_{(\nu)}$ 矩阵, 其中第 (ij) 元素有下式给出

$$\left(\mathcal{M}_l^k \right)_i^j = \delta_l^j \delta_i^k \quad (18.32)$$

令 (18.29) 中的矩阵 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}_l^k$ 中任意一个。相应地, 我们有 A_l^k , 根据 (18.29) 给出

$$\begin{aligned} (A_l^k)_i^j &= \sum_g \left(D_{(\mu)}^{-1}(g) \right)_i^n \left(\mathcal{M}_l^k \right)_n^p \left(D_{(\nu)}(g) \right)_p^j \\ &= \sum_g \left(D_{(\mu)}^{-1}(g) \right)_i^n \delta_l^p \delta_n^k \left(D_{(\nu)}(g) \right)_p^j = \sum_g \left(D_{(\mu)}^{-1}(g) \right)_i^k \left(D_{(\nu)}(g) \right)_l^j \end{aligned} \quad (18.33)$$

我们已经知道如果 $\mu \neq \nu$, A_l^k 必须消失。因此, 我们已经在 $\mu \neq \nu$ 的情况下证明了定理。

当 $\mu = \nu$, $A_l^k = \lambda_l^k I$, 即:

$$(A_l^k)_i^j = \lambda_l^k \delta_i^j \quad (18.34)$$

其中, λ_l^k 是一个标量 ($\in \mathbb{C}$)。因此 (18.33) 产生 (对于 $\mu = \nu$)

$$\lambda_l^k \delta_i^j = \sum_g \left(D_{(\mu)}^{-1}(g) \right)_i^k \left(D_{(\mu)}(g) \right)_l^j \quad (18.35)$$

其中, 所有指标遍历从 1 到 $N_{(\mu)}$ 。取指标 j 为 i (合并一对指标 i 和 j), 我们有

$$\begin{aligned} \lambda_l^k \delta_i^i &= N_{(\mu)} \lambda_l^k = \sum_g \left(D_{(\mu)}(g) \right)_l^i \left(D_{(\mu)}^{-1}(g) \right)_i^k \\ &= \sum_g \left(D_{(\mu)}(g) D_{(\mu)}^{-1}(g) \right)_l^k = \sum_g \delta_l^k = N_G \delta_l^k \end{aligned} \quad (18.36)$$

或者

$$\lambda_l^k = \frac{N_G}{N_{(\mu)}} \delta_l^k \quad (18.37)$$

将这一结果代入 (18.35) 便得到定理。 $\square$

作为一个例子, 考虑两元素循环群 (cyclic group) $C_2 = \{e, a\}$, 其中 $a^2 = e$ (因此 $a^{-1} = a$)。这个群是 Abel 的, 所以根据引理 18.1, 所有不可约表示都是一维的。首先我们有平凡表示: $D_{(1)}(e) = 1, D_{(1)}(a) = 1$ 。其中 $N_{(1)} = 1$ 并且 $N_G = 2$, 这很明显满足 (18.28)。通过令 $\mu = 1$, 正交归一性定理说明了所有其它表示 ($\nu \neq 1$) 必须满足

$$\frac{1}{2} (D_{(\nu)}(e) + D_{(\nu)}(a)) = 0 \quad (18.38)$$

对于任意一维表示, $D_{(\nu)}(e) = 1$ 。因此 $D_{(\nu)}(a) = -1$ 。我们总结: 除了平凡表示 $D_{(1)}$, 还有另一个: $D_{(2)}(e) = 1, D_{(2)}(a) = -1$ 。

下面重要定理补充了正交归一性定理 (定理 18.3)。它将被表述而不证明 (见 W.-K Tung 1985)。

定理 18.4 — 不可约表示的完备性 (Completeness of Irreducible Representations).

$$\sum_{\mu} \frac{N_{(\mu)}}{N_G} \text{Tr} \left(D_{(\mu)}(g) D_{(\mu)}^{-1}(g') \right) = \delta_{gg'} \quad (18.39)$$

上述定理可以立刻得到的结果是, 取 $g = g'$:

$$\sum_{\mu} (N_{(\mu)})^2 = N_G \quad (18.40)$$

这显式说明了有限群的所有不可约表示是有限维的。

下面定理考虑群元素在特定共轭类中的不可约表示的本征标 $\chi_{(\mu i)}$ 。

定理 18.5

$$\sum_{g \in C_i} D_{(\mu)}(g) = \frac{N_{(i)}}{N_{(\mu)}} \chi_{(\mu i)} I \quad (18.41)$$

其中, $C_i \subset G$ 由第 i 共轭类中的元素组成并且 I 是单位算符。

证明: 令

$$A_{(\mu i)} \equiv \sum_{g' \in C_i} D_{(\mu)}(g') \quad (18.42)$$

则: 对于任意 $g \in G$, 有

$$\begin{aligned} D_{(\mu)}(g) A_{(\mu i)} D_{(\mu)}^{-1}(g) &= \sum_{g' \in C_i} D_{(\mu)}(g) D_{(\mu)}(g') D_{(\mu)}^{-1}(g) \\ &= \sum_{g' \in C_i} D_{(\mu)}(gg'g^{-1}) = \sum_{g' \in C_i} D_{(\mu)}(g') = A_{(\mu i)} \end{aligned} \quad (18.43)$$

因此, 通过 Schur 引理

$$A_{(\mu i)} = \lambda_{(\mu i)} I \quad (18.44)$$

为了计算数 $\lambda_{(\mu i)}$, 我们对 (18.42) 两边取迹得到

$$\lambda_{(\mu i)} N_{(\mu)} = N_{(i)} \chi_{(\mu i)} \quad (18.45)$$

将这一结果代入 (18.44) 中的 $\lambda_{(\mu i)}$, 并对 $A_{\mu i}$ 运用 (18.42) 得到该定理。□

定理 18.6 一群本征标的正交归一性和完备性 (Orthonormality and Completeness of Group Characters).

$$\sum_i \frac{N_{(i)}}{N_G} \overline{\chi_{(\mu i)}} \chi_{(\nu i)} = \delta_{\mu\nu} \quad (\text{正交归一性}) \quad (18.46)$$

$$\frac{N_{(i)}}{N_G} \sum_{\mu} \overline{\chi_{(\mu i)}} \chi_{(\mu j)} = \delta_{ij} \quad (\text{完备性}) \quad (18.47)$$

其中, 在 (18.46) 中求和遍历共轭类并且在 (18.47) 中它遍历不等价不可约表示。(两个方程中的 $\overline{}$ 符号意味着取复共轭)。

证明: 合并正交归一性定理 [(18.28)] 指标对 (i, k) 和 (l, j) , 我们有

$$\frac{N_{(\mu)}}{N_G} \sum_{g \in G} \left(D_{(\mu)}^{-1}(g) \right)_i^i \left(D_{(\nu)}(g) \right)_j^j = \delta_{\mu\nu} \delta_i^i = N_{(\mu)} \delta_{\mu\nu} \quad (18.48)$$

因为有限群中每个表示等价于一个么正表示 (定理 18.1), 并且因为矩阵的迹在相似变换下不变 (定理 17.2), 上面的方程可以重写成

$$\frac{1}{N_G} \sum_{g \in G} \left(U_{(\mu)}^\dagger(g) \right)_i^j U_{(\nu)}(g)_j^j = \delta_{\mu\nu} \quad (18.49)$$

其中, $U_{(\mu)}$ 和 $U_{(\nu)}$ 是么正表示, 并且我们已经运用了事实: 对于么正算符, $U^{-1} = U^\dagger$ 。更进一步, 因为

$$\chi_{(\mu i)} = \text{Tr} \left(U_{(\mu)}(g) \right) = \left(U_{(\nu)}(g) \right)_j^j \quad (18.50)$$

只取决于表示和共轭类, 并且

$$\overline{\left(U_{(\mu)}(g) \right)_j^j} = \left(U_{(\mu)}^\dagger(g) \right)_j^j \quad (18.51)$$

直接从 (18.49) 得到正交归一性条件 (18.46)。

为了证明完备性条件, 我们采用 (18.39) 等式左边并操作如下:

$$\begin{aligned} & \sum_{g \in C_i} \sum_{g' \in C_j} \sum_{\mu} \frac{N_{(\mu)}}{N_G} \text{Tr} \left(D_{(\mu)}(g) D_{(\mu)}^{-1}(g') \right) \\ &= \sum_{\mu} \sum_{g \in C_i} \sum_{g' \in C_j} \frac{N_{(\mu)}}{N_G} \text{Tr} \left(U_{(\mu)}(g) U_{(\mu)}^\dagger(g') \right) \\ &= \sum_{\mu} \frac{N_{(\mu)}}{N_G} \frac{N_{(i)}}{N_{(\mu)}} \frac{N_{(j)}}{N_{(\mu)}} \chi_{(\mu i)} \overline{\chi_{(\mu j)}} \text{Tr}(I) = \frac{N_{(i)} N_{(j)}}{N_G} \sum_{\mu} \chi_{(\mu i)} \overline{\chi_{(\mu j)}} \end{aligned} \quad (18.52)$$

其中, 在第二个等号我们已经运用了 (18.41)。通过 (18.39), 上面方程的第一个等号的左边也等于

$$\sum_{g \in C_i} \sum_{g' \in C_j} \delta_{gg'} = N_{(i)} \delta_{ij} \quad (18.53)$$

令 (18.52) 中最后一个等号的右边等于 $N_{(i)} \delta_{ij}$ 并取复共轭, 得到了完备性条件 (18.47)。□

作为定理 18.6 的推论, 我们有下面重要事实。

推论 18.2 任意有限群 G 的不等价不可约表示的数目等于 G 不同共轭类的数目。

证明: 我们令 (18.46) 中 $\mu = \nu$ 并且 (18.47) 中 $i = j$, 我们有

$$\sum_i N_{(i)} \overline{\chi_{(\mu i)}} \chi_{(\mu i)} = 1 \quad (18.54)$$

$$\sum_{\mu} N_{(i)} \overline{\chi_{(\mu i)}} \chi_{(\mu i)} = 1 \quad (18.55)$$

对 (18.54) 中的 μ 求和并且对 (18.55) 中 i 求和, 便得到推论。□

由于推论 18.2, 群 G 的本征标 $\chi_{(\mu i)}$ 可以排列为 $N_C \times N_C$ 矩阵中的项, 其中 N_C 是 G 中不同的共轭类的数目。该矩阵通常称为 G 的本征标表。注意, 对于 Abel 群, 每个群元素本身都在一个共轭类中, 并且在推论 18.1 中, 所有不可约表示都是一维的。因此, 对于 $g \in C_i$, 有 $D_{(\mu)}(g) = \chi_{(\mu i)}$ 。

定理 18.7 在将给定表示 $D(G)$ 简化为其不可约组分时, 不可约表示 $D_{(\mu)}$ 出现的次数 $n_{(\mu)}$ 由下式给出:

$$n_{(\mu)} = \sum_i \frac{N_{(i)}}{N_G} \overline{\chi_{(\mu i)}} \chi_{(i)} \quad (18.56)$$

其中, $\chi_{(i)} \equiv \text{Tr}(D(g)), g \in C_i$ (第 i 共轭类)。

证明: 我们有: 对于 $g \in C_i$

$$\chi_{(i)} = \text{Tr}(D(g)) = \sum_{\nu} n_{(\nu)} \chi_{(\nu i)} \quad (18.57)$$

因此, 两边都乘以 $\frac{N_{(i)}}{N_G} \overline{\chi_{(\mu i)}}$ 并对 i 求和, 我们有

$$\sum_i \frac{N_{(i)}}{N_G} \overline{\chi_{(\mu i)}} \chi_{(i)} = \sum_{\nu} n_{(\nu)} \sum_i \frac{N_{(i)}}{N_G} \overline{\chi_{(\mu i)}} \chi_{(\nu i)} = \sum_{\nu} n_{(\nu)} \delta_{\mu\nu} = n_{(\mu)}$$

其中, 在第二个等号位置我们已经运用了 (18.46)。 $\square$

最终, 关于群本征标, 我们有

定理 18.8 具有本征标 $\chi_{(i)}$ 的群 G 的一个表示是不可约的, 当且仅当

$$\sum_i N_{(i)} |\chi_{(i)}|^2 = N_G \quad (18.58)$$

证明: 我们有

$$\begin{aligned} \sum_i N_{(i)} |\chi_{(i)}|^2 &= \sum_i N_{(i)} \sum_{\mu} n_{(\mu)} \overline{\chi_{(\mu i)}} \sum_{\nu} n_{(\nu)} \chi_{(\nu i)} \\ &= N_G \sum_{\mu, \nu} n_{(\mu)} n_{(\nu)} \delta_{\mu\nu} = N_G \sum_{\mu} n_{(\mu)}^2 \end{aligned} \quad (18.59)$$

如果表示是不可约的, 对于一些 μ 有 $n_{(\mu)} = 1$ 和对于任意 $\nu \neq \mu$ 有 $n_{(\nu)} = 0$ 必须是正确的。因此得到 (18.58)。相反, 假设 (18.58) 成立。则 (18.59) 意味着

$$\sum_{\mu} n_{(\mu)}^2 = 1 \quad (18.60)$$

这反过来说明对于一些 μ 有 $n_{(\mu)} = 1$ 和对于任意 $\nu \neq \mu$ 有 $n_{(\nu)} = 0$ 。表示因此是不可约的。 $\square$

作为上面关于群本征标讨论的说明, 我们将处理二面体群 D_6 的本征标表。这个有限群是由平面上旋转 60° 的所有乘积和这些旋转与一个关于 x -轴的镜面反射的乘积组成。它的 12 个元素列举如下

$$D_6 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ba, ba^2, ba^3, ba^4, ba^5\}$$

其中, a = 逆时针绕 z -轴旋转 60° , 同时 b = 关于 x -轴的镜面反射。它分解为下面六个共轭

类:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{e\}, & \text{所以 } N_{(1)} &= 1 \\
 C_2 &= \{a^3\}, & \text{所以 } N_{(2)} &= 1 \\
 C_3 &= \{a, a^5\}, & \text{所以 } N_{(3)} &= 2 \\
 C_4 &= \{a^2, a^4\}, & \text{所以 } N_{(3)} &= 2 \\
 C_5 &= \{ab, ba, a^3b\}, & \text{所以 } N_{(5)} &= 3 \\
 C_6 &= \{b, ba^2, a^2b\}, & \text{所以 } N_{(6)} &= 3
 \end{aligned}$$

练习 18.5 验证上面给出的 C_i 确实是共轭类。

根据推论 18.2, D_6 则有六个不等价不可约表示, 它们用 $\Gamma_{(i)}, i = 1, 2, \dots, 6$ 标记。从定理 18.4[(18.40)], 我们有

$$N_G = 12 = \sum_{\mu=1}^6 (N_{(\mu)})^2$$

这个方程有唯一的解: $12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2$ 。因此 $\Gamma_{(i)}, i = 1, 2, \dots, 6$ 维度分别为 1, 1, 1, 1, 2, 2。本征标表的 36 项为 $\chi_{(\mu i)}, \mu, i = 1, \dots, 6$ 。这将写成一个矩阵, 其中 μ 是表示的指标 (行指标), i 是类的指标 (列指标)。

令 $\Gamma_{(1)}$ 为 (一维) 恒元表示由对于任意 $g \in D_6$, $\Gamma_{(1)}(g) = 1$ 给出。因此本征标表 (矩阵) 的第一行都是 1。因为 $\Gamma_{(\mu)}(e) = I$ (单位算符), $\chi_{(\mu 1)} = \text{Tr}(I_{N_{(\mu)}}) = N_{(\mu)}$, 其中 $I_{N_{(\mu)}}$ 是一个 $N_{(\mu)} \times N_{(\mu)}$ 的单位矩阵。第一列因此是 1, 1, 1, 1, 2, 2。一维表示 $\Gamma_{(1)}, \Gamma_{(2)}, \Gamma_{(3)}$ 和 $\Gamma_{(4)}$ 的其余本征标相对容易计算出来因为 $\Gamma_{(\mu)}(g, \mu = 1, 2, 3, 4)$ 只是数字, 并且如果 $g \in C_i$, 则 $\Gamma_{(\mu)}(g) = \chi_{(\mu i)}$ 。对于这些 $\Gamma_{(\mu)}(g)$, 我们有

$$\chi_{(\mu i)}\chi_{(\mu j)} = \chi_{(\mu k)}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

其中, k 是群元素 $g_1 g_2 (g_1 \in C_i \text{ 并且 } g_2 \in C_j)$ 的类指标。观察 C_i 成员的显式表达, 并且运用 D_6 的乘法表, 我们有, 举个例子

$$\mu = 2, 3, 4 \quad \begin{cases} \chi_{(\mu 2)}^2 = 1 & \implies \chi_{(\mu 2)} = \pm 1 \\ \chi_{(\mu 4)}\chi_{(\mu 5)} = \chi_{(\mu 5)} & \implies \chi_{(\mu 4)} = 1 \\ \chi_{(\mu 3)}\chi_{(\mu 4)} = \chi_{(\mu 2)} & \implies \chi_{(\mu 2)} = \chi_{(\mu 3)} \end{cases}$$

我们也有

$$\mu = 2, 3, 4 \quad \begin{cases} \chi_{(\mu 5)}^2 = \chi_{(\mu 5)}^2 = 1 & \implies \chi_{(\mu 5)} = \pm 1, \chi_{(\mu 6)}^2 = \pm 1 \\ \chi_{(\mu 3)}\chi_{(\mu 5)} = \chi_{(\mu 6)} & \end{cases}$$

为了确定一维表示所有的 $\chi_{(\mu i)}$, 我们只需要多一个关于 $\chi_{(\mu i)}$ 的线性方程。这可以通过在正交归一性关系 [(18.46)] 中取 $\mu = 1$ 和 $\nu = 2, 3$ 或 4 得到:

$$1 + \chi_{(\nu 2)} + 2\chi_{(\nu 3)} + 2\chi_{(\nu 4)} + 3\chi_{(\nu 5)} + 3\chi_{(\nu 6)} = 0$$

或者, 回忆 $\chi_{(\nu 2)} = \chi_{(\nu 3)}$ 和 $\chi_{(\nu 4)} = 1$

$$1 + \chi_{(\nu 2)} + \chi_{(\nu 5)} + \chi_{(\nu 6)} = 0, \quad \nu = 2, 3, 4$$

上面的取值将对于 $\mu = 1, 2, 3, 4$ 唯一确定所有 $\chi_{(\mu i)}$ 。

练习 18.6 计算 D_6 一维表示的所有本征标 $\chi_{(\mu i)}$ 。(见 Table 18.1)。

两个二维表示 $\Gamma_{(5)}$ 和 $\Gamma_{(6)}$ 之一可以很显然地由下面的旋转矩阵给出

$$\Gamma_{(5)}(a) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

并且镜面反射矩阵 (关于 x -轴)

$$\Gamma_{(5)}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Gamma_{(5)}$ 的所有其它群元素的 2×2 表示矩阵可以简单地通过矩阵乘法来确定。对合适的 2×2 矩阵取迹, 我们发现: $\chi_{(51)} = 2, \chi_{(52)} = -2, \chi_{(53)} = 1, \chi_{(54)} = -1, \chi_{(55)} = \chi_{(56)} = 0$ 。当 $\Gamma_{(6)}$ 剩余的二维表示不明显时, 它的本征标可以通过群本征标的正交归一性和完备性定理 (定理 18.6) 确定。先后在 (18.47) 中令 $i = j = 5$ 和 $i = j = 6$, 我们立刻得到 $\chi_{(65)} = \chi_{(66)} = 0$ 。最后三个本征标 $\chi_{(62)}, \chi_{(63)}, \chi_{(64)}$ 可以从 (18.46) 确定, 举个例子 ($\mu = 1, \nu = 6$), ($\mu = 4, \nu = 6$) 和 ($\mu = 5, \nu = 6$)。因此

$$\chi_{(62)} + 2\chi_{(63)} + 2\chi_{(64)} = -2, \chi_{(62)} + 2\chi_{(63)} - 2\chi_{(64)} = 2, \chi_{(62)} - \chi_{(63)} + \chi_{(64)} = 2$$

这进一步得到结果 $\chi_{(62)} = 2, \chi_{(63)} = -1$ 和 $\chi_{(64)} = -1$ 。

我们最终将 D_6 的本征标表表示如下 (Table 18.1)。在表中, 类名称 C_i 中括号内的数字是该类中元素的数量 $N_{(i)}$ 。

Table 18.1

	$C_1(1)$	$C_2(1)$	$C_3(2)$	$C_4(2)$	$C_5(3)$	$C_6(3)$
$\Gamma_{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$\Gamma_{(2)}$	1	1	1	1	-1	-1
$\Gamma_{(3)}$	1	-1	-1	1	1	-1
$\Gamma_{(4)}$	1	-1	-1	1	-1	1
$\Gamma_{(5)}$	2	-2	1	-1	0	0
$\Gamma_{(6)}$	2	2	-1	-1	0	0

练习 18.7 验证 Table 18.1 中的本征标表满足定理 18.6

给定一个完全可约表示 $D: G \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{V})$, 我们现在想要找到 $D(G)$ 包含的 G 的所有不可约表示。目标是找到投影算符 $P_{(\mu)} \in \mathcal{T}(\mathbb{V})$ 使得对于任意 $v \in \mathbb{V}$, 有 $P_{(\mu)}v \in \mathbb{V}_{(\mu)}$, 其中 $\mathbb{V}_{(\mu)}$ 是第 μ 不等价不可约表示的表示空间。

回忆关于特定表示的 Lie 代数的包络代数的概念 (在 Chapter 7 中介绍)。我们对群有一个类似的概念。在群 G 中, 仅定义群乘法, 所以如果 $g_1 \in G$ 和 $g_2 \in G$, 则 $g_1g_2 \in G$ 。 $\alpha g, \alpha \in \mathbb{C}$ 或者 $g_1 + g_2$ 没有定义。然而, 对于一个给定的表示 $D(G)$, $\alpha D(g)$ 和 $D(g_1) + D(g_2)$ 都被很好地定义了, 因此对于任意 $g \in G$ 有 $D(g)$ 是一个线性算符。 $D(G) \subset \mathcal{T}\mathbb{V}$ 中的所有元素满足一般分配律和结合律的求和和乘积被称为关于表示 D 的 G 的群代数 (group algebra), 用

$A_D(G)$ 表示。考虑算符 $(P_{(\mu)})_i^j \in A_D(G)$ 定义为

$$(P_{(\mu)})_i^j \equiv \frac{N_{(\mu)}}{N_G} \sum_{g \in G} (D_{(\mu)}(g^{-1}))_j^i D(g), \quad i, j = 1, \dots, N_{(\mu)} \quad (18.61)$$

我们有

$$\begin{aligned} (P_{(\mu)})_i^j (P_{(\nu)})_k^l &= \frac{N_{(\mu)} N_{(\nu)}}{N_G^2} \sum_{g_1, g_2 \in G} (D_{(\mu)}(g_1^{-1}))_j^i (D_{(\nu)}(g_2^{-1}))_l^k D(g_1) D(g_2) \\ &= \frac{N_{(\mu)} N_{(\nu)}}{N_G^2} \sum_{g_1, g \in G} (D_{(\mu)}(g_1^{-1}))_j^i (D_{(\nu)}(g^{-1}g_1))_l^k D(g) \\ &= \frac{N_{(\mu)} N_{(\nu)}}{N_G^2} \sum_{g_1, g \in G} (D_{(\mu)}(g_1^{-1}))_j^i \sum_{m=1}^i (D_{(\nu)}(g^{-1}))_l^m (D_{(\nu)}(g_1))_m^k D(g) \\ &= \frac{N_{(\nu)}}{N_G} \sum_{g \in G} \sum_{m=1}^{N_{(\nu)}} (D_{(\nu)}(g^{-1}))_l^m \left(\frac{N_{(\mu)}}{N_G} \sum_{g_1 \in G} (D_{(\mu)}^{-1}(g_1))_j^i (D_{(\nu)}(g_1))_m^k \right) D(g) \\ &= \frac{N_{(\nu)}}{N_G} \sum_{g \in G} \sum_{m=1}^{N_{(\nu)}} (D_{(\nu)}(g^{-1}))_l^m \delta_{\mu\nu} \delta_j^k \delta_m^i D(g) = \delta_{\mu\nu} \delta_j^k \sum_{g \in G} (D_{(\mu)}(g^{-1}))_l^i D(g) \end{aligned} \quad (18.62)$$

在第二个等号位置我们令 $g = g_1 g_2$ ，并在第五个等号位置我们运用了正交归一性定理 [定理 18.3 中 (18.28)]。因此，通过 (18.61) 有

$$(P_{(\mu)})_i^j (P_{(\nu)})_k^l = \delta_{\mu\nu} \delta_j^k (P_{(\mu)})_i^l \quad (18.63)$$

让我们现在来定义

$$P_{(\mu)} \equiv (P_{(\mu)})_i^i = \frac{N_{(\mu)}}{N_G} \sum_{g \in G} \chi_{(\mu)}(g^{-1}) D(g) = \frac{N_{(\mu)}}{N_G} \sum_{i=1}^{N_G} \overline{\chi_{(\mu i)}} \sum_{g \in C_i} D(g) \quad (18.64)$$

其中， $\chi_{(\mu)}$ 是第 μ 表示的本征标。我们将说明这是我们寻找的投影算符。

首先，(18.63) 说明 $P_{(\mu)}$ 是幂等的 (idempotent) (任意投影算符都必须满足的一个性质)：

$$P_{(\mu)} P_{(\nu)} = \delta_{\mu\nu} P_{(\mu)} \quad (18.65)$$

我们也需要证明完备性：

$$\sum_{\mu=1}^{N_R} P_{(\mu)} = I \quad (18.66)$$

其中， I 是单位算符。

由于 $D(G)$ 总是完全可约的，存在一个不可约算符 $T(\mathbb{V})$ 上，使得：对于任意 $g \in G$ 有

$$T^{-1} D(g) T = \begin{pmatrix} \boxed{D_{(1)}(g)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{D_{(N_R)}(g)} \end{pmatrix} \quad (18.67)$$

其中, 第 μ 表示 $D_{(\mu)}(g)$ 出现了 $n_{(\mu)}$ 次 [(18.56)] ($n_{(\mu)}$ 可以是零)。因此

$$T^{-1}A_iT = \begin{pmatrix} \boxed{A_{(1i)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_{(N_R i)}} \end{pmatrix} \quad (18.68)$$

其中

$$A_{(i)} \equiv \sum_{g \in C_i} D(g) \quad (18.69)$$

[回忆 (18.42)]。从定理 18.5 有

$$A_{(\mu i)} = \frac{N_{(i)}}{N_{(\mu)}} \chi_{(\mu i)} I_{N_{(\mu)}} \quad (18.70)$$

其中 $I_{N_{(\mu)}}$ 是 $N_{(\mu)} \times N_{(\mu)}$ 单位矩阵。因此, 通过正交归一群本征标 [定理 18.6 中 (18.46)] 有

$$\frac{N_{(\mu)}}{N_G} \sum_{i=1}^{N_C} \overline{\chi_{(\mu i)}} A_{(\nu i)} = \delta_{\mu\nu} I_{N_{(\mu)}} \quad (18.71)$$

从 (18.64) 得到

$$\begin{aligned} T^{-1} \left(\sum_{\mu} P_{(\mu)} \right) T &= \sum_{\mu} T^{-1} P_{(\mu)} T = \sum_{\mu} \frac{N_{(\mu)}}{N_G} \sum_{i=1}^{N_C} \overline{\chi_{(\mu i)}} \sum_{g \in C_i} T^{-1} D(g) T \\ &= \sum_{\mu} \frac{N_{(\mu)}}{N_G} \sum_{i=1}^{N_C} \overline{\chi_{(\mu i)}} T^{-1} A_{(i)} T = \sum_{\mu} \frac{N_{(\mu)}}{N_G} \sum_{i=1}^{N_C} \overline{\chi_{(\mu i)}} \begin{pmatrix} \boxed{A_{(1i)}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_{(N_R i)}} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\mu} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \delta_{1\mu} & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \delta_{1\mu} \end{matrix}} & & 0 \\ & \cdots & \cdots \\ & \cdots & \cdots \\ & & \boxed{\begin{matrix} \delta_{N_R \mu} & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & \delta_{N_R \mu} \end{matrix}} \end{pmatrix} = I \end{aligned} \quad (18.72)$$

其中, 倒数第二个等号位置的右边, 左上方的分块包含一个 $N_{(1)} \times N_{(1)}$ 子矩阵并且右上方分块包含一个 $N_{(N_R)} \times N_{(N_R)}$ 子矩阵。因此 $\sum_{\mu} P_{(\mu)} = I$ 和完备性建立了。

投影算符 $P_{(\mu)}$ 也满足下面的性质:

1)

$$\text{对于任意 } g \in G \quad [P_{(\mu)}, D(g)] = 0 \quad (18.73)$$

2) 如果 D 是么正的, $P_{(\mu)}$ 是 hermitian。

练习 18.8 证明上面两条性质。

在下一章中，我们将看到在当前发展出的许多结果的应用。

我们将用总体上考虑关于不可约表示积的约化问题来总结本章。这个主题在复合系统的物理学中有重要的应用。

令 $D_{(\mu)} : G \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{V}_{(\mu)})$ 和 $D_{(\nu)} : G \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{V}_{(\nu)})$ 为群 G 的两个不可约表示。维度为 $N_{(\mu)}N_{(\nu)}$ 的**积表示 (product representation)** $D_{(\mu)} \times D_{(\nu)} : G \rightarrow \mathcal{T}(\mathbb{V}_{(\mu)} \otimes \mathbb{V}_{(\nu)})$ 由下式给出

$$((D_{(\mu)} \times D_{(\nu)})(g)) (e_i^{(\mu)} \otimes e_j^{(\nu)}) = (D_{(\mu)}(g)e_i^{(\mu)}) \otimes (D_{(\nu)}(g)e_j^{(\nu)}) \quad (18.74)$$

这个表示一般是可约化的。一般约化写成所谓的 **Clebsch-Gordon 级数 (Clebsch-Gordon series)**：

$$D_{(\mu)} \times D_{(\nu)} = \sum_{\otimes \sigma} n_{(\mu\nu, \sigma)} D_{(\sigma)} \quad (18.75)$$

其中， $n_{(\mu\nu, \sigma)}$ 是第 σ 不可约表示出现在积表示中的次数 [c.f. (18.56)]。方程 (18.74) 说明积表示的本征标和那些不可约表示由下式联系起来

$$\chi_{(\mu \times \nu)}(g) = \chi_{(\mu)}(g) \chi_{(\nu)}(g) \quad (18.76)$$

因此根据 (18.56) 有

$$n_{(\mu\nu, \sigma)} = \frac{1}{N_G} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{(\sigma)}(g)} \chi_{(\mu)}(g) \chi_{(\nu)}(g) \quad (18.77)$$

假设 $\{e_i^{(\mu)}\}$ 和 $\{e_j^{(\nu)}\}$ 分别是不可约表示空间 $\mathbb{V}_{(\mu)}$ 和 $\mathbb{V}_{(\nu)}$ 的标准正交基。我们运用 Dirac 符号将基向量写成 $|(\mu)i\rangle$ 和 $|(\nu)j\rangle$ 。积表示空间的基向量可以因此写成

$$|(\mu)i(\nu)j\rangle \equiv |(\mu)i\rangle \otimes |(\nu)j\rangle \quad (18.78)$$

我们有完备性条件 [c.f. (12.12)]

$$\sum_{ij} |(\mu)i(\nu)j\rangle \langle (\mu)i(\nu)j| = 1 \quad (18.79)$$

Clebsch-Gordon 级数 (18.75) 右边的标准正交基的状态可以用 $|(\sigma)\alpha l\rangle$ 表示，其中， $\alpha = 1, \dots, n_{(\mu\nu, \sigma)}$ 标记 (可能) 多次出现的第 σ 不可约表示，并且 $l = 1, \dots, N_{(\sigma)}$ 。从 (18.79) 得出

$$|(\sigma)\alpha l\rangle = \sum_{ij} |(\mu)i(\nu)j\rangle \langle (\mu)i(\nu)j | (\sigma)\alpha l \rangle \quad (18.80)$$

矩阵元素 $\langle (\mu)i(\nu)j | (\sigma)\alpha l \rangle$ 称为 **Clebsch-Gordon 系数 (Clebsch-Gordon coefficients)**。它们很明显满足下面一对正交归一性和完备性条件：

$$\sum_{ij} \langle (\sigma') \alpha' l' | (\mu)i(\nu)j \rangle \langle (\mu)i(\nu)j | (\sigma)\alpha l \rangle = \delta_{\sigma'\sigma} \delta_{\alpha'\alpha} \delta_{l'l} \quad (18.81)$$

$$\sum_{\sigma\alpha l} \langle (\mu)i'(\nu)j' | (\sigma)\alpha l \rangle \langle (\sigma)\alpha l | (\mu)i(\nu)j \rangle = \delta_{i'i} \delta_{j'j} \quad (18.82)$$

方程 (18.81) 是 $\{ |(\mu)i(\nu)j\rangle \}$ (对于确定的 μ 和 ν) 完备性和 $\{ |(\sigma)\alpha l\rangle \}$ 的正交归一性的结果, 同时 (18.82) 是 $\{ |(\sigma)\alpha l\rangle \}$ 完备性和 $\{ |(\mu)i(\nu)j\rangle \}$ (对于确定的 μ 和 ν) 的正交归一性的结果。

下面的张量关系是 Clebsch-Gordon 级数 (18.75) 在应用中也十分有用。我们有: 对于任意 $g \in G$, 有

$$(D_{(\mu)}(g))_i^k (D_{(\nu)}(g))_j^m = \sum_{\sigma \alpha l l'} \langle (\mu)k(\nu)m | (\sigma)\alpha l' \rangle (D_{(\sigma)}(g))_l^{l'} \langle (\sigma)\alpha l | (\mu)i(\nu)j \rangle \quad (18.83)$$

$$\delta_{\sigma'\sigma} \delta_{\alpha'\alpha} (D_{(\sigma)}(g))_l^{l'} = \sum_{ijkm} \langle (\sigma')\alpha'l' | (\mu)k(\nu)m \rangle (D_{(\mu)}(g))_i^k (D_{(\nu)}(g))_j^m \langle (\mu)i(\nu)j | (\sigma)\alpha l \rangle \quad (18.84)$$

练习 18.9 证明上面两个方程。

19. 二面体群 D_6 和苯 (Benzene) 分子

在本章中，我们将展示有限群表示理论的一个有趣的量子力学应用。我们将研究苯分子 C_6H_6 的电子能级，其具有如 Figure 19.1所示的六边形环结构。碳的原子序数 Z 是 6。在与每个碳原子相关的 6 个电子中，2 个在 K -层中 (主量子数 $n = 1$)，4 个在 L -层 ($n = 2$) 中。四个价电子中的三个与六边形环平面中的轴对称轨道 (沿着 $C - C$ 和 $C - H$ 轴) 形成杂化的 σ -键 (Figure 19.2)。它们与碳核相对紧密结合。第四价电子是 π -电子，其轨道垂直于环平面

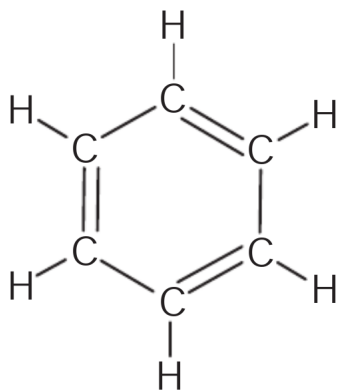


Figure 19.1

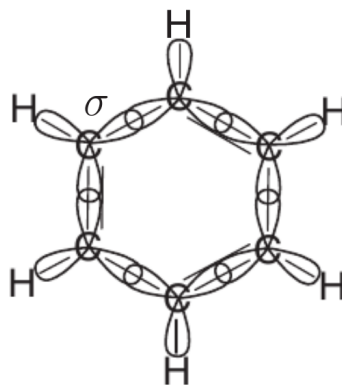


Figure 19.2

(p_z -轨道)(Figure 19.3)。

每个 π -电子都可以被描绘成在环周围“漫游”，因此它的波函数 (ψ 分子轨道) 是局域 p_z 轨道的线性叠加，由下式给出：

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^6 a^i \phi_i(\mathbf{r}) \quad (19.1)$$

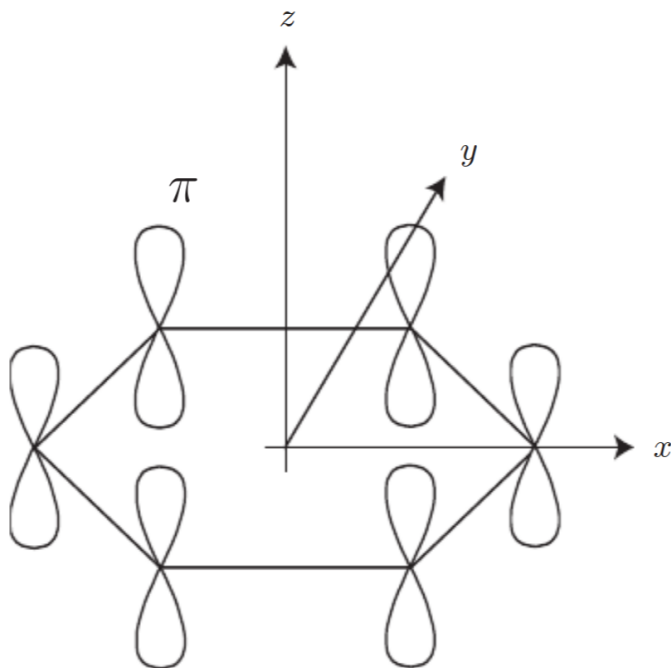


Figure 19.3

其中, $\phi_i(\mathbf{r})$ 是以第 i 个碳核位点 $\mathbf{R}_i$ 为中心的局域 p_z 轨道 (见 Figure 19.4), 由下式给出:

$$\phi_i(\mathbf{r}) \equiv \phi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i) = \beta |\mathbf{r} - \mathbf{R}_i| \cos \theta \exp \{-\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|\} \quad (19.2)$$

其中, α 和 β 是常数。

我们必须求解 Schrödinger 方程

$$H\psi = E\psi \quad (19.3)$$

其中单电子的 Hamilton 量由下式给出

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \sum_{i=1}^6 \frac{Ze^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_i|} \quad (19.4)$$

其中仅包括电子和碳核子间的 Coulomb 相互作用。假设

$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle \equiv \int d^3r \overline{\phi_i(\mathbf{r})} \phi_j(\mathbf{r}) = \delta_{ij} \quad (19.5)$$

(即: 在所有原子核位置的局域原子轨道都被归一化, 并且 $i \neq j$ 的交叠积分全部消失), Schrödinger 方程 (19.3) 等价于

$$H_j^i a^j = E a^i, \quad i = 1, \dots, 6 \quad (19.6)$$

其中 [c.f. (12.26)]

$$H_j^i \equiv \langle \phi_i | H | \phi_j \rangle = \int d^3r \overline{\phi_i(\mathbf{r})} H \phi_j(\mathbf{r}) \quad (19.7)$$

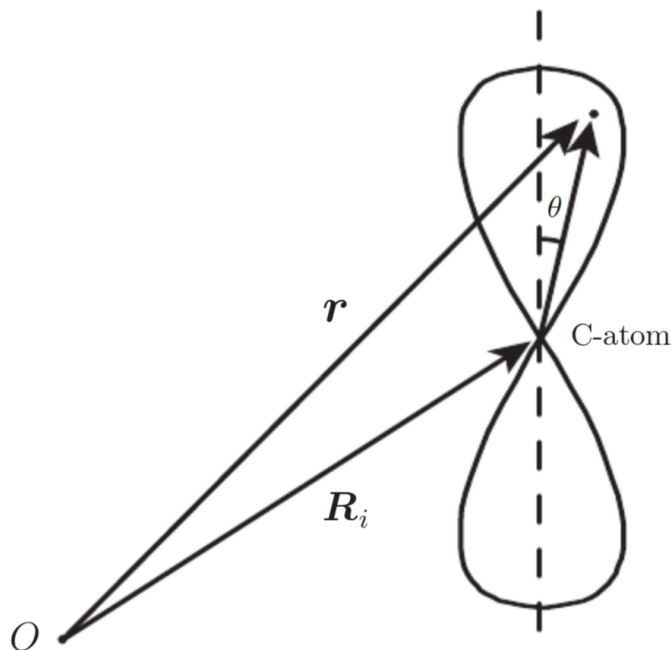


Figure 19.4

练习 19.1 从 Schrödinger 方程 (19.3) 推导出 (19.6) 和非交叠轨道 (19.5) 的假设。

方程 (19.6) 得到特征方程 (secular equation)

$$\det(H - E) = 0 \quad (19.8)$$

它的解产生能量本征值 [c.f. (17.5)]。

不同于直接解决问题，我们将运用群论来得到关于由 (19.4) 给出的 Hamilton 量 H 的谱分类的重要信息。在目前的问题，相关对称群很明显是前面章节中介绍的二面体群 D_6 。在 D_6 群作用在核坐标 $\mathbf{R}_i, i = 1, \dots, 6$ 下，Hamilton 量 H 很明显不变。因此在由 $\phi_i(\mathbf{r}), i = 1, \dots, 6$ 生成的空间存在 D_6 的么正表示，其一般向量 $\psi(\mathbf{r})$ 具有 (19.1) 的形式。表示由下式给出 [c.f. (19.2) 和 (18.6)]

$$U(g)\phi_i(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r} - g^{-1}\mathbf{R}_i), \quad g \in D_6 \quad (19.9)$$

选择如 Figure 19.5 所示确定的核位置 $\mathbf{R}_i$ 的一个坐标系，我们因此有，在 $U(a)$ 下 (逆时针旋转 60°)：

$$\phi_1 \rightarrow \phi_6 \rightarrow \phi_5 \rightarrow \phi_4 \rightarrow \phi_3 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \phi_1$$

并且在 $U(b)$ 下 (关于 x -轴反射)：

$$\phi_1 \rightarrow \phi_1, \phi_2 \leftrightarrow \phi_6, \phi_3 \leftrightarrow \phi_5, \phi_4 \rightarrow \phi_4$$

练习 19.2 直接验证由 (19.9) 给出的 D_6 的表示是么正的： $\langle U(g)\phi_i | U(g)\phi_j \rangle = \langle \phi_i | \phi_j \rangle$ 。

由下式定义表示矩阵元素：

$$U(g)\phi_i = (U(g))_i^j \phi_j \quad (19.10)$$

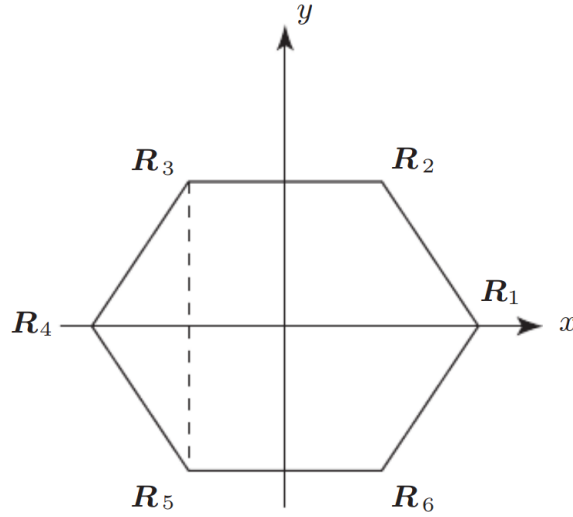


Figure 19.5

我们有

$$U(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.11)$$

所有其它 $U(g)$ 都可以很容易地通过上面两个矩阵的矩阵乘法得到。注意到，表示 U 是可约的。

我们在上一章开头表明： H 的能量本征值可以由 D_6 的不等价不可约表示分类。为了找到它们，我们首先使用上一章关于 D_6 的结论。我们发现 D_6 有维度为 1, 1, 1, 1, 2, 2 的六个不等价不可约表示。 D_6 的本征表 (Table 18.1) 和定理 18.7 则可以用来找到第 μ 个不可约表示出现在我们的表示 $U(D_6)$ 的次数 $n_{(\mu)}$ 。观察到

$$\begin{aligned} \chi_{(1)} &= \text{Tr}(U(e)) = 6, & \chi_{(2)} &= \text{Tr}(U(a^3)) = 0, & \chi_{(3)} &= \text{Tr}(U(a)) = 0 \\ \chi_{(4)} &= \text{Tr}(U(a^2)) = 0, & \chi_{(5)} &= \text{Tr}(U(ab)) = 0, & \chi_{(6)} &= \text{Tr}(U(b)) = 2 \end{aligned} \quad (19.12)$$

我们有，从 (18.56)

$$n_{(\mu)} = \frac{1}{2} (\chi_{(\mu 1)} + \chi_{(\mu 6)}) \quad (19.13)$$

本征表则揭示了

$$\begin{aligned} n_{(1)} &= \frac{1}{2}(1+1) = 1, & n_{(2)} &= \frac{1}{2}(1-1) = 0, & n_{(3)} &= \frac{1}{2}(1-1) = 0 \\ n_{(4)} &= \frac{1}{2}(1+1) = 1, & n_{(5)} &= \frac{1}{2}(2+0) = 1, & n_{(6)} &= \frac{1}{2}(2+0) = 1 \end{aligned} \quad (19.14)$$

我们看到表示 U 分解为下面的不可约表示:

$$U = \Gamma_{(1)} \oplus \Gamma_{(4)} \oplus \Gamma_{(5)} \oplus \Gamma_{(6)} \quad (19.15)$$

我们的下一个任务是从 U 的表示空间中投射出不可约表示空间 $\mathbb{V}_{(1)}, \mathbb{V}_{(4)}, \mathbb{V}_{(5)}$ 和 $\mathbb{V}_{(6)}$ 。我们需要计算由 (18.64) 给出的投影算符 $P_{(\mu)}, \mu = 1, 4, 5, 6$ 。写

$$S_i \equiv \sum_{g \in C_i} U(g) \quad (19.16)$$

它们由下式给出

$$P_{(\mu)} = \frac{N_{(\mu)}}{12} \sum_{i=1}^6 \chi_{(\mu i)} S_i \quad (19.17)$$

计算很长但也很直接。我们给出如下步骤。方程 (19.17) 给出

$$\begin{aligned} P_{(1)} &= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^6 S_i \\ P_{(4)} &= \frac{1}{12} (S_1 - S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6) \\ P_{(5)} &= \frac{1}{6} (2S_1 - 2S_2 + S_3 - S_4) \\ P_{(6)} &= \frac{1}{6} (2S_1 + 2S_2 - S_3 - S_4) \end{aligned} \quad (19.18)$$

其中

$$\begin{aligned} S_1 &= U(e) = I_6 \quad (6 \times 6 \text{ 单位矩阵}) \\ S_2 &= U(a^3) = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (19.19)$$

(分块为 3×3 矩阵, I_3 为 3×3 单位矩阵)

$$S_3 = U(a) + U(a^5) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \quad (19.20a)$$

$$S_4 = U(a^2) + U(a^4) = \begin{pmatrix} B & A \\ A & B \end{pmatrix} \quad (19.20b)$$

$$S_5 = U(ab) + U(ba) + U(a^3b) = \begin{pmatrix} A & C \\ C & A \end{pmatrix} \quad (19.20c)$$

$$S_6 = U(b) + U(ba^2) + U(a^2b) = \begin{pmatrix} C & A \\ A & C \end{pmatrix} \quad (19.20d)$$

在上面的方程中

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19.21)$$

运用 (19.19), (19.20a) 和 (19.21), (19.18) 的投影算符可以显式写成如下的形式 (依赖于基 $\{\phi_i\}$):

$$P_{(1)} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{(4)} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (19.22a)$$

$$P_{(5)} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (19.22b)$$

$$P_{(6)} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (19.22c)$$

练习 19.3 验证上面 $P_{(\mu)}$ 的表达式。

上面的投影算符则可以用来选择 $N_{(\mu)}$ 的线性无关基向量 (可以被归一化): $\psi_{(\mu)i}, i = 1, \dots, N_{(\mu)}$, 在每一个 $\mathbb{V}_{(\mu)}$ 。因此

$$\psi_{(1)1} = \sqrt{6} (P_{(1)})_1^j \phi_j = \frac{1}{\sqrt{6}} (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6) \quad (19.23)$$

$$\psi_{(4)1} = \sqrt{6} (P_{(4)})_1^j \phi_j = \frac{1}{\sqrt{6}} (\phi_1 - \phi_2 + \phi_3 - \phi_4 + \phi_5 - \phi_6) \quad (19.24)$$

$$\psi_{(5)1} = \sqrt{3} (P_{(5)})_1^j \phi_j = \frac{1}{\sqrt{12}} (2\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - 2\phi_4 - \phi_5 + \phi_6) \quad (19.25a)$$

$$\psi_{(5)2} = \sqrt{3} (P_{(5)})_2^j \phi_j = \frac{1}{\sqrt{12}} (\phi_1 + 2\phi_2 + \phi_3 - \phi_4 - 2\phi_5 - \phi_6) \quad (19.25b)$$

$$\psi_{(6)1} = \sqrt{3} (P_{(6)})_1^j \phi_j = \frac{1}{\sqrt{12}} (2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + 2\phi_4 - \phi_5 - \phi_6) \quad (19.26a)$$

$$\psi_{(6)2} = \sqrt{3} (P_{(6)})_2^j \phi_j = \frac{1}{\sqrt{12}} (-\phi_1 + 2\phi_2 - \phi_3 - \phi_4 + 2\phi_5 - \phi_6) \quad (19.26b)$$

注意到

$$\langle \psi_{(5)1} | \psi_{(5)2} \rangle \neq 0, \quad \langle \psi_{(6)1} | \psi_{(6)2} \rangle \neq 0, \quad \langle \psi_{(5)1} | \psi_{(5)2} \rangle \neq 0, \quad \langle \psi_{(6)1} | \psi_{(6)2} \rangle \neq 0 \quad (19.27)$$

但是我们可以运用 **Schmidt 正交化 (Schmidt orthogonalization)** 过程来为 $\mathbb{V}_{(5)}$ 和 $\mathbb{V}_{(6)}$ 构造标准正交基, 运用 $\psi_{(5)1}, \psi_{(5)2}, \psi_{(6)1}$ 和 $\psi_{(6)2}$ 。因此, 我们定义下面归一化向量:

$$\psi'_{(\mu)2} = (\psi_{(\mu)2} - \langle \psi_{(\mu)1} | \psi_{(\mu)2} \rangle \psi_{(\mu)1}) / (\text{长度}), \quad \mu = 5, 6 \quad (19.28)$$

集合 $(\psi_{(5)1}, \psi'_{(5)2})$ 和 $(\psi_{(6)1}, \psi'_{(6)2})$ 则将分别组成 $\mathbb{V}_{(5)}$ 和 $\mathbb{V}_{(6)}$ 标准正交基。我们发现这些由下式给出

$$\psi_{(5)1} = \frac{1}{\sqrt{12}} (2\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 - 2\phi_4 - \phi_5 + \phi_6) \quad (19.29a)$$

$$\psi'_{(5)2} = \frac{1}{2} (\phi_2 + \phi_3 - \phi_5 - \phi_6) \quad (19.29b)$$

$$\psi_{(6)1} = \frac{1}{\sqrt{12}} (2\phi_1 - \phi_2 - \phi_3 + 2\phi_4 - \phi_5 - \phi_6) \quad (19.30a)$$

$$\psi'_{(6)2} = \frac{1}{2} (\phi_2 - \phi_3 + \phi_5 - \phi_6) \quad (19.30b)$$

练习 19.4 运用 (19.28) 来验证上面 $\psi'_{(5)2}$ 和 $\psi'_{(6)2}$ 的表达式。

总结一下

$$\psi_{(1)1} \text{ 生成 } \mathbb{V}_{(1)}, \quad (1-d)$$

$$\psi_{(4)1} \text{ 生成 } \mathbb{V}_{(4)}, \quad (1-d)$$

$$\psi_{(5)1} \text{ 和 } \psi'_{(5)2} \text{ 生成 } \mathbb{V}_{(5)}, \quad (2-d)$$

$$\psi_{(6)1} \text{ 和 } \psi'_{(6)2} \text{ 生成 } \mathbb{V}_{(6)}, \quad (2-d)$$

向量的标准正交集 $\{\psi_{(1)1}, \psi_{(4)1}, \psi_{(5)1}, \psi'_{(5)2}, \psi_{(6)1}, \psi'_{(6)2}\}$ 组成

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_{(1)} \oplus \mathbb{V}_{(4)} \oplus \mathbb{V}_{(5)} \oplus \mathbb{V}_{(6)} \quad (19.31)$$

依赖于这个集合, D_6 的 6×6 表示矩阵完全约化到形式

$$S^{-1}U(g)S = \begin{pmatrix} \square & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \square & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \square & \square & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \square & \square & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \square & \square \end{pmatrix} \quad (19.32)$$

其中, 方格表示不一定为零的项

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (19.33)$$

其中, $S^{-1} = S^T$ 。

练习 19.5 运用 (19.23), (19.24), (19.30a) 与 (1.36) 结合使用来得到 (19.33) 给出的项 S , 并且显式说明 $S^{-1} = S^T$ 。

现在让我们回顾一下上一章开头关于群论在量子力学中的相关性的讨论。由于我们的 Hamilton 量 [(19.4) 中] H 在 D_6 群下是不变的。 D_6 的不可约表示空间 $\mathbb{V}_{(1)}, \mathbb{V}_{(4)}, \mathbb{V}_{(5)}$ 和 $\mathbb{V}_{(6)}$ 也是 H 的本征子空间, 这些子空间的每个维度是对应本征值的简并度。令这些本征值为 E_1, E_4, E_5 和 E_6 。则 6×6 矩阵 H_j^i [c.f. (19.7)] 可以被对角化为 (通过一个非奇异矩阵 S):

$$S^{-1}HS = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_6 \end{pmatrix} \quad (19.34)$$

其中

$$E_1 = \langle \psi_{(1)1} | H | \psi_{(1)1} \rangle \quad (19.35a)$$

$$E_4 = \langle \psi_{(4)1} | H | \psi_{(4)1} \rangle \quad (19.35b)$$

$$E_5 = \langle \psi_{(5)1} | H | \psi_{(5)1} \rangle = \langle \psi'_{(5)2} | H | \psi'_{(5)2} \rangle \quad (19.35c)$$

$$E_6 = \langle \psi_{(6)1} | H | \psi_{(6)1} \rangle = \langle \psi'_{(6)2} | H | \psi'_{(6)2} \rangle \quad (19.35d)$$

练习 19.6 运用上面的四个方程给出能量本征值 E_1, E_4, E_5 和 E_6 以 H_j^i 的形式。

对 H 运用 (19.4), 对 H_i^j 运用 (19.7) 并且对 ϕ_i 运用 (19.2) 显式计算说明 $E_1 < E_6 < E_5 < E_4$ 。然后原运用子物理学中 Aufbau 原理来描述容纳于这四个能级中的六个 π -电子 (来自苯环的每个碳原子的一个) 的电子状态, 记住 E_1 和 E_4 是非简并的虽然 E_5 和 E_6 是双重简并的, 并且由于 Pauli 的排除原理, 每个非简并能级可以容纳两个相反自旋的电子。因此举个例子, 我们有如 Figure 19.6 中所示的三种电子状态。

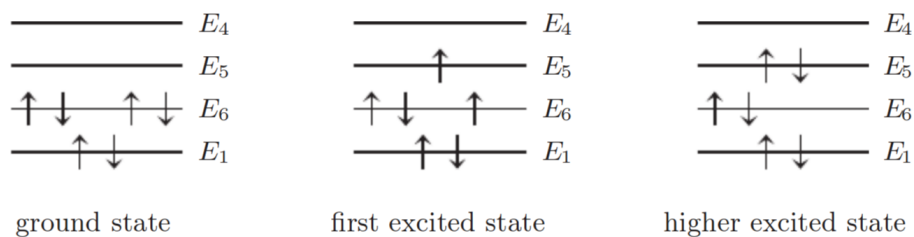


Figure 19.6

20. 对称群的表示和一般线性群, Young 图

为了构造对称和反对称张量, 在 Chapter 16 引入对称 (置换) 群 S_n 。除了这两个对称类之外, 还可以通过 S_n 在张量空间 $T^n(V)$ [或者 $T^n(V^*)$] 上的作用得到许多其它对称类。正如我们将要看到的, 如果 $\dim(V) = n$, 则不同的对称类对应于对称群的不等价不可约表示, 实际上对应于一般线性群 $GL(n)$ 。对称群 S_n 在量子力学中也有基础的重要性, 因为描述全同粒子系统 (如: 一个 n -电子原子) 的 Hamilton 量 H 在 S_n 显然是不变的。因此, S_n 的不可约表示也用于对 H 光谱进行分类。

让我们先回顾一些 S_n 的基本事实。每个元素 $\sigma \in S_n$ 可以被写成一个**环 (cycle)**¹或者环的积。长度为 r 的环, 或者 r -环, 被写作 $(i_1 i_2 \dots i_r)$, 其中 $i_j \in \{1, 2, \dots, n\}, j = 1, \dots, r$ 。它的作用由下式给出

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \dots \rightarrow i_{r-1} \rightarrow i_r \rightarrow i_1 .$$

因此, 对于 S_3 , 2-环 (13) 给出了排列 [c.f. (16.5)]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

同时 3-环 (123) 给出

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

注意: 所有 1-环都等于恒元 $e \in S_n$ 。很明显, 除了恒元 e 之外的所有 $g \in S_n$ 都可以被写成 2-环的积或**交换 (transposition)**。实际上, 一个偶数排列 σ ($\text{sgn } \sigma = 1$) 可以被写成一个交换

¹译注这里的环是图论中的环而不是代数中的环

偶数次的乘积, 而奇数排列 ($\text{sgn } \sigma = -1$) 可以被写成一个交换奇数次的乘积。因此

$$(123) = (13)(12) = (23)(13) \quad (20.1)$$

是偶数排列。同时

$$(13) = (12)(23)(12) = (12)(13)(23) \quad (20.2)$$

是奇数排列。注意分解为交换不是唯一的。对于每个群, S_n 的元素可以被分成共轭类 (c.f. 定义 6.2)。例如, S_3 可以分为三个类

$$C_1 = \{e\}, C_2 = \{(12), (13), (23)\}, C_3 = \{(123), (321)\},$$

因为

$$(13) = (23)(12)(23)^{-1} = (12)(23)(12)^{-1}, \quad (20.3)$$

和

$$(321) = (12)(123)(12)^{-1}. \quad (20.4)$$

练习 20.1 验证 (20.3) 和 (20.4)。

S_n 的表示理论开始于下面的定理, 将仅表述而不证明。

定理 20.1 对称群 S_n 的每个共轭类 C_i 的特征是元素 $g \in C_i$ 的相同的环-结构。通过一个元素 $\sigma \in S_n$ 的环-结构, 我们指的是一组有序的非负整数 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 使得 σ 可以表述为 $\alpha_1 1$ -环, $\alpha_2 2$ -环的积; 并且

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n. \quad (20.5)$$

集合 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 满足 (20.5) 称为整数 n 的一个**拆分** (*partition*)。

让我们再次用 S_3 来表述定理 20.1。三个类 C_1, C_2 和 C_3 有下面的环-结构:

$$\begin{aligned} C_1 = \{e\} &= \{(1)(2)\}, & \alpha_1 &= 3, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \\ C_2 &= \{(3)(12), (2)(13), (1)(23)\}, & \alpha_1 &= 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \\ C_3 &= \{(123), (321)\}, & \alpha_1 &= 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1. \end{aligned}$$

注意如果一个元素有超过一种类型的环, 出现在一种的数字一定都与出现在其它类型的都不同。

运用 (20.5), 拆分 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 也可以通过整数 $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ 的集合标记由下式给出

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n &= \mu_1, \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n &= \mu_2, \\ \alpha_3 + \dots + \alpha_n &= \mu_3, \\ &\vdots \\ \alpha_n &= \mu_n. \end{aligned} \quad (20.6)$$

很明显

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = n, \quad (20.7)$$

和

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n \geq 0. \quad (20.8)$$

集合 $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ 也可以用于标记拆分, 从而标记共轭类. 对 S_3 的共轭类运用 μ -标记, 我们有

$$C_1: \mu_1 = 3, \mu_2 = \mu_3 = 0, \quad C_2: \mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \mu_3 = 0, \quad C_3: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1.$$

n 的每个拆分 $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ 可以非常方便地用所谓的 **Young 图 (Young diagram)** 表示, 每个 Young 图都是 n 个方格的阵列, 最多 n 行. 第一行包括 μ_1 个方格, 第二行 $\mu_2 (\leq \mu_1)$ 个方格, 等等. 因此对于 S_3 有三个 Young 图:

$$\{\mu_i\} = \{3, 0, 0\} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array},$$

$$\{\mu_i\} = \{2, 1, 0\} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array},$$

$$\{\mu_i\} = \{1, 1, 1\} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

对于 S_2 仅有两个 Young 图:

$$\{\mu_i\} = \{2, 0\} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \{\mu_i\} = \{1, 1\} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array};$$

同时对于 S_4 有五个 Young 图:

$$\{\mu_i\} = \{4, 0, 0, 0\} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \{\mu_i\} = \{3, 1, 0, 0\} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array},$$

$$\{\mu_i\} = \{2, 2, 0, 0\} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \{\mu_i\} = \{2, 1, 1, 0\} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array},$$

$$\{\mu_i\} = \{1, 1, 1, 1\} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

通过推论 18.2, S_n 的不等价不可约表示也是由 Young 图表征. 因此, S_2 有两个, S_3 有三个, S_4 有五个不等价表示. 对应于 S_5 的七个不等价不可约表示的 Young 图如下所示:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}.$$

接下来, 我们为 S_n 的特征标 $\chi_{(\mu i)}$ 提供了一个漂亮的公式:

定理 20.2 — Frobenius 特征标公式 (Frobenius Character Formula). 令 C_i 为 S_n 的第 i 共轭类由环结构 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 特征并且 $\Gamma_{(\mu)}$ 为 S_n 的第 μ 不可约表示由 Young 图 $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ 特征。 $[\mu_i]$ 不需要通过 (20.6) 与 α_j 相联系。引入 p 个独立变量 $z_1, \dots, z_p$, 其中整数 $p \leq n$ 由下式决定

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_p > 0, \quad \mu_{p+1} = \mu_{p+2} = \dots = \mu_n = 0.$$

定义幂和 $P_j(z_1, \dots, z_p)$, $1 \leq j \leq n$, 以及判别式 (discriminant) $\Delta(z_1, \dots, z_p)$ 如下

$$P_j(z_1, \dots, z_p) \equiv z_1^j + z_2^j + \dots + z_p^j, \quad (20.9)$$

$$\Delta(z_1, \dots, z_p) \equiv \prod_{i < k}^p (z_i - z_k). \quad (20.10)$$

设

$$l_1 \equiv \mu_1 + p - 1, \quad l_2 \equiv \mu_2 + p - 2, \quad \dots, \quad l_p \equiv \mu_p; \quad (20.11)$$

并且对于一个如此形式幂级数 $f(z_1, \dots, z_p)$, 写

$$[f(z_1, \dots, z_p)]_{(l_1 \dots l_p)} \equiv f(z_1, \dots, z_p) \text{ 中 } z_1^{l_1} \dots z_p^{l_p} \text{ 的系数}. \quad (20.12)$$

则

$$\chi_{(\mu i)} = \left[\Delta(z_1, \dots, z_p) \prod_{j=1}^n (P_j(z_1, \dots, z_p))^{\alpha_j} \right]_{(l_1 \dots l_p)}. \quad (20.13)$$

Frobenius 特征标公式的证明非常复杂, 在此不再介绍。细节详见 W. Fulton 和 J. Harris 1991。

练习 20.2 运用 Frobenius 特征标公式 (20.13) 来验证下面 S_3 特征标表。在表中, 行标用于 $\{\mu_i\}$, 而列标用于 $\{\alpha_i\}$ 。

	$\{3,0,0\}$	$\{1,1,0\}$	$\{0,0,1\}$
$\{3,0,0\}$	1	1	1
$\{2,1,0\}$	2	0	-1
$\{1,1,1\}$	1	-1	1

现在 $\Gamma_{(\mu)}$ 表示空间的维度 $V_{(\mu)}$ 由 $\chi_{(\mu 1)}$, 其中 $C_1 = \{e\}$ 和恒元 e 可以被写成 $e = (1)(2) \dots (n)$ 。因此对于 C_1 , $\alpha_1 = n, \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, 并且

$$\dim V_{(\mu)} = \chi_{(\mu 1)} = [\Delta(z_1, \dots, z_p) (z_1 + \dots + z_p)^n]_{(l_1 \dots l_p)}. \quad (20.14)$$

方程为 S_n 的不可约表示空间的维度产生下面有用的公 (有关该公式的推导, 见 W. Fulton 和 J. Harris 1991)。

推论 20.1 令 $\Gamma_{(\mu)}$ 为 S_n 的第 μ 不可约表示, 由 Young 图 $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ 表示, 其中 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_p > 0$, $\mu_{p+1} = \mu_{p+2} = \dots = \mu_n = 0$. 则表示空间的维度 $\mathbb{V}_{(\mu)}$ 由下式给出

$$\dim \mathbb{V}_{(\mu)} = \frac{n! \Delta(l_1, \dots, l_p)}{l_1! l_2! \dots l_p!}, \quad (20.15)$$

其中

$$\Delta(l_1, \dots, l_p) = \prod_{i < k}^p (l_i - l_k). \quad (20.16)$$

练习 20.3 用过运用 (20.15) 验证 S_3 的特征标的第一列 (在练习 20.2 给出)。

为了进一步发展 S_n 的表示理论, 我们将引入与 Young 图相关的记号。

定义 20.1 对于 S_n 的一个给定 Young 图上的 Young 表是用整数 $1, \dots, n$ 以任意顺序填充 (每个数字只用一次) 的方格的图。举例

7	8	2
6	4	
5	1	
3		

定义 20.2 标准 Young 表 (standard Young tableau) 是每行数字向右增加 (不一定按照严格顺序), 每列的数字向下增加到底部。举例

1	3	4
2	5	
6	8	
7		

定义 20.3 Young 图中一个方格的勾长 (hook length) 是该方格右面和下面包括该方格本身的方格数目。举例, 在下面的 Young 图中, 每个方格都用它的勾长标记。

6	4	1
4	2	
3	1	
1		

我们有下面简单的方法 (表述而不证明) 来计算 S_n 的不可约表示空间的维度。

定理 20.3 对应于一个 S_n 的给定 Young 图的 (不可约) 表示空间 $\mathbb{V}_{(\mu)}$ 的维度由下式给出

$$N_{(\mu)} = \dim \mathbb{V}_{(\mu)} = \frac{n!}{\prod(\text{勾长})} \quad (20.17)$$

= 不同 Young 表的数量.

作为说明考虑对于 S_5 的 Young 图 $\{\mu_i\} = \{2, 1, 1, 1, 0\}$ 。可能的标准 Young 表为

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} .$$

因此 $\dim \mathbb{V}_{(\mu)} = 4$ 。另一方面，勾长表为

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 5 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array}$$

因此

$$\dim \mathbb{V}_{(\mu)} = \frac{5!}{5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 4 .$$

在本章剩余部分，我们将以 S_3 为例来说明 S_n 的表示理论。 S_n 的一般讨论将仅被表述而不证明。

我们将首先讨论所谓的 S_n 的**标准表示 (standard representation)**，它是一个么正表示。对于一个给定的 Young 表，我们定义 **Yamanouchi 行-格点向量 (Yamanouchi row-lattice vector)** $|r_1, \dots, r_n\rangle$, $1 \leq r_1, \dots, r_n \leq n$ ，其中 r_i 在给定表中整数 i 出现的行；类似的有 **Yamanouchi 列-格点向量 (Yamanouchi Column-lattice vector)** $|c_1, \dots, c_n\rangle$ ，其中 c_i 是 i 处在的列。数字 r_i 和 c_i 被称为 **Yamanouchi 符号 (Yamanouchi symbol)**。举例，对于 S_3 标准 Young 表的 Yamanouchi 符号罗列如下：

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} : r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1(|1, 1, 1\rangle), \quad c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 3 ;$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} : r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3(|1, 2, 3\rangle), \quad c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 1 ;$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} : r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 2(|1, 1, 2\rangle), \quad c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 1 ;$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} : r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 1(|1, 2, 1\rangle), \quad c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 2 .$$

注意到 $r_1 = c_1 = 1$ 总是成立。在格点向量 $|r_1, \dots, r_n\rangle$ 定义如下的群作用：

$$\begin{aligned} & (i-1, i) |1, r_2, \dots, r_n\rangle \\ &= \frac{1}{\tau_{i-1, i}} |1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_i, \dots, r_n\rangle + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\tau_{i-1, i}}\right)^2} |1, r_2, \dots, r_i, r_{i-1}, \dots, r_n\rangle , \end{aligned} \quad (20.18)$$

其中， $i = 2, \dots, n$ ，并且

$$\tau_{i-1, i} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } i-1 \text{ 和 } i \text{ 在同一行,} \\ -1, & \text{如果 } i-1 \text{ 和 } i \text{ 在同一列,} \\ c_i - c_{i-1} - (r_i - r_{i-1}), & \text{如果 } i-1 \text{ 和 } i \text{ 不位于同一行或列.} \end{cases}$$

对于任意 $g \in S_3$ 为了确定群作用, 我们仅需要确定 2-环 (12) 和 (23) 的作用。我们有

$$(1, 2)|1, 1, 1\rangle = |1, 1, 1\rangle, \quad (20.19)$$

$$(2, 3)|1, 1, 1\rangle = |1, 1, 1\rangle, \quad (20.20)$$

$$(1, 2)|1, 2, 3\rangle = -|1, 2, 3\rangle, \quad (20.21)$$

$$(2, 3)|1, 2, 3\rangle = -|1, 2, 3\rangle, \quad (20.22)$$

$$(1, 2)|1, 1, 2\rangle = |1, 1, 2\rangle, \quad (20.23)$$

$$(1, 2)|1, 2, 1\rangle = -|1, 2, 1\rangle, \quad (20.24)$$

$$(2, 3)|1, 1, 2\rangle = -\frac{1}{2}|1, 1, 2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1, 2, 1\rangle, \quad (20.25)$$

$$(2, 3)|1, 2, 1\rangle = \frac{1}{2}|1, 2, 1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1, 1, 2\rangle. \quad (20.26)$$

因此, $|1, 1, 1\rangle$ 和 $|1, 2, 3\rangle$ 都是一维表示的基向量, 同时 $|1, 1, 2\rangle$ 和 $|1, 2, 1\rangle$ 都二维表示的基向量。对于 (1, 2) 和 (2, 3) 的矩阵表示由下式给出 [c.f. (1.16)] :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} : (1, 2) = 1, \quad (2, 3) = 1; \quad (20.27)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} : (1, 2) = -1, \quad (2, 3) = -1; \quad (20.28)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} : (1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2, 3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (20.29)$$

练习 20.4 验证 S_3 上面的表示是幺正的。

我们现在将在张量空间表示 S_n

$$T^n(V) = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n\text{次}}.$$

回忆一个特殊的 $\sigma \in S_n$ 的在 $T^n(V)$ 上作用 [c.f. (16.48)]:

$$\begin{aligned} \sigma x^{i_1 \cdots i_n} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} &= x^{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(n)}} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \\ &= x^{i_1 \cdots i_n} e_{i_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma^{-1}(n)}}. \end{aligned}$$

它引入了 S_n 的群代数 $\mathcal{S}_n$ 在 $T^n(V)$ 上的作用 [c.f. (18.61) 上面的讨论]。对应于每个标准 Young 表, 我们定义 **Young 对称子 (Young symmetrizer)** ($\in \mathcal{S}_n$) 如下:

$$Y_n = \frac{N_{(\mu)}}{n!} \sum_{\sigma_{(r)}, \sigma_{(c)}} (\text{sgn } \sigma_{(c)}) \sigma_{(c)} \sigma_{(r)}, \quad (20.30)$$

其中, $N_{(\mu)}$ = 不可约表示的维度 (被标记为第 μ) 对应于给定 Young 表的 Young 图, $\sigma_{(r)} \in S_n$ 是不改变行中数字的排列, 并且 $\sigma_{(c)} \in S_n$ 是不改变行中数字的排列。我们已经看到两个重要

的 Young 对称子 [c.f. (16.21) 和 (16.22)]:

$$Y_n(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \end{array}) = \text{对称映射}, \quad (20.31a)$$

$$Y_n \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline n \\ \hline \end{array} \right) = \text{交错映射}. \quad (20.31b)$$

作为混合对称的例子, 让我们考虑标准表 $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$. 我们有

$$Y_3 \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right) = \frac{2}{3!} (e - (1, 3))(e + (1, 2)) = \frac{1}{3} (e - (1, 3) + (1, 2) - (123)), \quad (20.32)$$

$$Y_3 \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right) = \frac{2}{3!} (e - (1, 2))(e + (1, 3)) = \frac{1}{3} (e + (1, 3) - (1, 2) - (321)). \quad (20.33)$$

练习 20.5 为标准表 $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$ 计算 Y_4 .

关于 Young 对称子的重要事实在以下定理中说明 (没有证明)。

定理 20.4 所有 Young 对称子 Y_n 是群代数 $\mathcal{S}_n$ 的本原幂等元 (*primitive idempotent*), 并且是不可约表示空间的投影算符。一个元素 $s \in \mathcal{S}_n$ 的幂等性意味着 $s^2 = s$, 同时本原性意味着如果 $s = s_1 + s_2$, $s, s_1, s_2 \in \mathcal{S}_n$ 使得 $s_1^2 = s_1, s_2^2 = s_2$ 并且 $s_1 s_2 = s_2 s_1 = 0$, 则有 $s_1 = 0$ 或者 $s_2 = 0$ 。

在 Chapter 7(定义 7.1) 中, 我们定义了一个 Lie 代数的理想 (定义了对于内积的 Lie 括号)。对于群代数 $\mathcal{S}_n$, 定义了普通乘法, 我们可以类似地定义左 (右) 理想。

定义 20.4 $\mathcal{S}$ 的子代数 $\mathcal{S}'$ 是 $\mathcal{S}$ 的左理想 (*left ideal*): 如果对于任意 $s \in \mathcal{S}$, 有

$$s\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}'. \quad (20.34)$$

$\mathcal{S}'$ 是 $\mathcal{S}$ 的右理想 (*right ideal*): 如果对于任意 $s \in \mathcal{S}$, 有

$$\mathcal{S}'s \subset \mathcal{S}'. \quad (20.35)$$

定理 20.5 令 $Y_n^{(i)}$ 为对应于对称群 $\mathcal{S}_n$ 标准 Young 表的所有 Young 对称子。每个 $Y_n^{(i)}$ 生成群代数 $\mathcal{S}_n$ 的一个左理想 $L^{(i)}$ 如下给出

$$L^{(i)} = \{sY_n^{(i)} | s \in \mathcal{S}_n\}, \quad (20.36)$$

并且 $\mathcal{S}_n$ (作为一个向量空间) 可以被分解为直和

$$\mathcal{S}_n = \sum_{\oplus i} L^{(i)} . \quad (20.37)$$

举例, $\mathcal{S}_3$ 是一个 $6(=3!)$ -维向量空间可以被分解为

$$S_3 = L\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\\hline\end{array}\right) \oplus L\left(\begin{array}{|c|}\hline 1 \\\hline 2 \\\hline 3 \\\hline\end{array}\right) \oplus L\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\\hline 3 \\\hline\end{array}\right) \oplus L\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\\hline 2 \\\hline\end{array}\right) . \quad (20.38)$$

作为向量空间, $L\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\\hline\end{array}\right)$ 和 $L\left(\begin{array}{|c|}\hline 1 \\\hline 2 \\\hline 3 \\\hline\end{array}\right)$ 都是一维的, 同时 $L\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\\hline 3 \\\hline\end{array}\right)$ 和 $L\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\\hline 2 \\\hline\end{array}\right)$ 都是二

维的。

由于 $Y_3\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\\hline\end{array}\right)$ 是对称映射同时 $Y_3\left(\begin{array}{|c|}\hline 1 \\\hline 2 \\\hline 3 \\\hline\end{array}\right)$ 是交错映射, 定理 16.2 表明

$$P^3(V) = Y_3\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\\hline\end{array}\right)(T^3(V)), \quad \Lambda^3(V) = Y_3\left(\begin{array}{|c|}\hline 1 \\\hline 2 \\\hline 3 \\\hline\end{array}\right)(T^3(V)), \quad (20.39)$$

其中, $P^3(V)[\Lambda^3(V)]$ 是 $T^3(V)$ 的包含所有对称 (反对称) 张量 $x \in T^3(V)$ 的子空间。注意到: 如果 $\dim V < 3$, $\Lambda^3(V) = 0$ 。一维子空间由 $P^3(V)$ 或 $\Lambda^3(V)$ 中的任意向量生成很明显构成了 S_3 的一维不可约表示。

可以通过 $Y_3\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\\hline 3 \\\hline\end{array}\right)$ 和 $Y_3\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\\hline 2 \\\hline\end{array}\right)$ 在 $T^3(V)$ 上的作用得到混合对称的张量。考虑 $T^3(V)$ 中一组一般基向量有如下形式

$$\varphi_{\mu\nu\lambda} \equiv e_\mu \otimes e_\nu \otimes e_\lambda ,$$

其中, $\mu, \nu, \lambda = 1, \dots, \dim(V)$, 并且 $\{e_1, \dots, e_{\dim(V)}\}$ 是 V 的一组基。我们有: 从 (20.32) 和 (16.23)

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu\lambda} &\equiv Y_3\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\\hline 3 \\\hline\end{array}\right) e_\mu \otimes e_\nu \otimes e_\lambda \equiv \begin{array}{|c|c|}\hline \mu & \nu \\\hline \lambda & \end{array} \\ &= \frac{1}{3}(e - (1, 3))(e + (1, 2))e_\mu \otimes e_\nu \otimes e_\lambda \\ &= \frac{1}{3}(e - (1, 3))(e_\mu \otimes e_\nu \otimes e_\lambda + e_\nu \otimes e_\mu \otimes e_\lambda) \\ &= \frac{1}{3}(e_\mu \otimes e_\nu \otimes e_\lambda + e_\nu \otimes e_\mu \otimes e_\lambda - e_\lambda \otimes e_\nu \otimes e_\mu - e_\lambda \otimes e_\mu \otimes e_\nu) . \end{aligned} \quad (20.40)$$

因此

$$M_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{3}(\varphi_{\mu\nu\lambda} + \varphi_{\nu\mu\lambda} - \varphi_{\lambda\nu\mu} - \varphi_{\lambda\mu\nu}) . \quad (20.41)$$

类似地, 我们可以定义

$$\tilde{M}_{\mu\nu\lambda} \equiv Y_3\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\\hline 2 \\\hline\end{array}\right) \varphi_{\mu\nu\lambda} \equiv \begin{array}{|c|c|}\hline \mu & \lambda \\\hline \nu & \end{array}, \quad (20.42)$$

并且得到

$$\tilde{M}_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{3}(\varphi_{\mu\nu\lambda} + \varphi_{\lambda\nu\mu} - \varphi_{\nu\mu\lambda} - \varphi_{\nu\lambda\mu}) . \quad (20.43)$$

不难验证张量 $M_{\mu\nu\lambda}$ 和 $\tilde{M}_{\mu\nu\lambda}$ 有如下对称

$$M_{\mu\nu\lambda} = M_{\nu\mu\lambda} , \quad (20.44)$$

$$M_{\mu\nu\lambda} + M_{\nu\lambda\mu} + M_{\lambda\mu\nu} = 0 , \quad (20.45)$$

$$\tilde{M}_{\mu\nu\lambda} = \tilde{M}_{\lambda\nu\mu} , \quad (20.46)$$

$$\tilde{M}_{\mu\nu\lambda} + \tilde{M}_{\nu\lambda\mu} + \tilde{M}_{\lambda\mu\nu} = 0 . \quad (20.47)$$

练习 20.6 验证 (20.44) 到 (20.47)。

现在考虑张量

$$\xi_{\mu\nu\lambda} \equiv (1, 2)M_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{3}(\varphi_{\nu\mu\lambda} + \varphi_{\mu\nu\lambda} - \varphi_{\nu\lambda\mu} - \varphi_{\mu\lambda\nu}) . \quad (20.48)$$

很明显,

$$(1, 2)\xi_{\mu\nu\lambda} = M_{\mu\nu\lambda} . \quad (20.49)$$

同时

$$(1, 3)M_{\mu\nu\lambda} = -M_{\mu\nu\lambda} , \quad (1, 3)\xi_{\mu\nu\lambda} = \xi_{\mu\nu\lambda} - M_{\mu\nu\lambda} , \quad (20.50)$$

$$(2, 3)M_{\mu\nu\lambda} = M_{\mu\nu\lambda} - \xi_{\mu\nu\lambda} , \quad (2, 3)\xi_{\mu\nu\lambda} = -\xi_{\mu\nu\lambda} . \quad (20.51)$$

练习 20.7 验证 (20.50) 和 (20.51)。

由于 S_3 的所有元素可以被写成 $e, (1, 2), (1, 3)$ 和 $(2, 3)$ 的乘积, 我们有一个 S_3 的二维不可约表示, 其表示空间由 $e_1 = M_{\mu\nu\lambda}$ 和 $e_2 = \xi_{\mu\nu\lambda}$ 生成. 依赖于这些基向量, $(1, 2), (1, 3)$ 和 $(2, 3)$ 的矩阵表示有下式给出

$$(1, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (20.52)$$

$$(1, 3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} , \quad (20.53)$$

$$(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (20.54)$$

练习 20.8 依赖于 $M_{\mu\nu\lambda}$ 和 $\xi_{\mu\nu\lambda}$ 得到 (123) 和 (321) 的矩阵表示。

注意到上面的表示不是么正的. 但是根据定理 18.1, 它必须等价于一个么正表示. 因此, 考虑线性变换

$$M_{\mu\nu\lambda}^{(+)} \equiv (M_{\mu\nu\lambda} + \xi_{\mu\nu\lambda}) , \quad M_{\mu\nu\lambda}^{(-)} \equiv \sqrt{3}(M_{\mu\nu\lambda} - \xi_{\mu\nu\lambda}) . \quad (20.55)$$

则

$$(1, 2)M_{\mu\nu\lambda}^{(+)} = M_{\mu\nu\lambda}^{(+)}, \quad (1, 2)M_{\mu\nu\lambda}^{(-)} = -M_{\mu\nu\lambda}^{(-)}, \quad (20.56)$$

$$(1, 3)M_{\mu\nu\lambda}^{(+)} = -\frac{1}{2}M_{\mu\nu\lambda}^{(+)} - \frac{\sqrt{3}}{2}M_{\mu\nu\lambda}^{(-)}, \quad (20.57a)$$

$$(1, 3)M_{\mu\nu\lambda}^{(-)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}M_{\mu\nu\lambda}^{(+)} + \frac{1}{2}M_{\mu\nu\lambda}^{(-)}, \quad (20.57b)$$

$$(2, 3)M_{\mu\nu\lambda}^{(+)} = -\frac{1}{2}M_{\mu\nu\lambda}^{(+)} + \frac{\sqrt{3}}{2}M_{\mu\nu\lambda}^{(-)}, \quad (20.58a)$$

$$(2, 3)M_{\mu\nu\lambda}^{(-)} = \frac{\sqrt{3}}{2}M_{\mu\nu\lambda}^{(+)} + \frac{1}{2}M_{\mu\nu\lambda}^{(-)}. \quad (20.58b)$$

因此依赖于基 $\{M_{\mu\nu\lambda}^{(+)}, M_{\mu\nu\lambda}^{(-)}\}$ 有

$$(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (20.59)$$

$$(1, 3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (20.60)$$

$$(2, 3) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (20.61)$$

这个不可约二维表示是幺正的, 并且实际上与标准 (Yamanouchi) 表示相同。

我们因此已经找到了 S_3 的所有不等价不可约表示。注意到: 对于 μ, ν 和 λ 的固定值, 张量 $M_{\mu\nu\lambda}$ 和 $\xi_{\mu\nu\lambda}$ 生成 $T^3(V)$ 的一个二维向量空间, 它同构于群代数 $\mathcal{S}_3$ 的理想 $L\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ 。它实际上可以六维群代数 $\mathcal{S}_3$ (视为一个向量空间) 上表示 S_3 。根据分解 (20.38), 这一表示是不可约的。 $L\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $L\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ 都是一维表示空间, 同时 $L\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $L\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ 每个都提供一个二维不可约表示空间。后者的两个 (二维) 表示相互等价。

我们现在将注意力转向 $GL(n)$ (一般线性群) 在张量空间 $T^m(V)$, $\dim V = n$ (通常 $m \neq n$) 上的表示。从 (2.1) 可以看出这是可能的。这些表示通常是可约的, 但是显而易见的事实: 可以再次使用 Young 图来找到所有不可约表示。以下关键定理 (表述而不证明) 说明了如何完成。

定理 20.6, 对于 Young 图的每一标准 Young 表由 $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ 标记, 其中 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$ 并且

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = m, \quad (20.62)$$

生成一个不可约表示子空间通过对应 Young 对称子。此外, $T^m(V)$ 可以唯一地分解为所有这种不可约表示子空间的直和。

注意 (20.62) 和 (20.7) 之间的区别。让我们通过计算 $T^3(V)$, $\dim V = 3$ 上 $GL(3)$ 的表示。

在这种情况下, $m = n = 3$ 。Young 对称子对应四个标准表生成 (依赖于 $\varphi_{\mu\nu\lambda} = e_\mu \otimes e_\nu \otimes e_\lambda$)

$$\begin{aligned} Y_3 \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right) \varphi_{\mu\nu\lambda} &\equiv S_{\mu\nu\lambda} \equiv \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu & \nu & \lambda \\ \hline \end{array} \\ &= \frac{1}{6} (\varphi_{\mu\nu\lambda} + \varphi_{\nu\lambda\mu} + \varphi_{\lambda\mu\nu} + \varphi_{\mu\lambda\nu} + \varphi_{\lambda\nu\mu} + \varphi_{\nu\mu\lambda}) , \end{aligned} \quad (20.63)$$

$$\begin{aligned} Y_3 \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \right) \varphi_{\mu\nu\lambda} &\equiv A_{\mu\nu\lambda} \equiv \begin{array}{|c|} \hline \mu \\ \hline \nu \\ \hline \lambda \\ \hline \end{array} \\ &= \frac{1}{6} (\varphi_{\mu\nu\lambda} + \varphi_{\nu\lambda\mu} + \varphi_{\lambda\mu\nu} - \varphi_{\mu\lambda\nu} - \varphi_{\lambda\nu\mu} - \varphi_{\nu\mu\lambda}) , \end{aligned} \quad (20.64)$$

$$Y_3 \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right) \varphi_{\mu\nu\lambda} \equiv M_{\mu\nu\lambda} \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline \mu & \nu \\ \hline \lambda & \\ \hline \end{array} , \quad (20.65)$$

$$Y_3 \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right) \varphi_{\mu\nu\lambda} \equiv \tilde{M}_{\mu\nu\lambda} \equiv \begin{array}{|c|c|} \hline \mu & \lambda \\ \hline \nu & \\ \hline \end{array} , \quad (20.66)$$

其中, $M_{\mu\nu\lambda}$ 和 $\tilde{M}_{\mu\nu\lambda}$ 已经由 (20.41) 和 (20.43) 给出。由于 $\dim V = 3$, 指标 μ, ν, λ 可以各自取值 1, 2 和 3; 同时, 空间 $T^3(V)$ 是 27-维。

由 $S_{\mu\nu\lambda}$ 生成的不可约的子空间是 10 维的, 一组可能的基由下式给出

$$\{S_{111}, S_{222}, S_{333}, S_{112}, S_{113}, S_{221}, S_{223}, S_{331}, S_{332}, S_{123}\} . \quad (20.67)$$

由 $A_{\mu\nu\lambda}$ 生成的不可约子空间是一维的, A_{123} 是唯一的基向量。由于 $M_{\mu\nu\lambda}$ 和 $\tilde{M}_{\mu\nu\lambda}$ 的对称条件 (20.44) 到 20.47, 由 $M_{\mu\nu\lambda}$ 和 $\tilde{M}_{\mu\nu\lambda}$ 生成的每个不可约的子空间是 8-维的。两个可能的基分别由下式给出

$$\{M_{112}, M_{113}, M_{221}, M_{223}, M_{331}, M_{332}, M_{123}, M_{231}\} , \quad (20.68)$$

$$\{\tilde{M}_{112}, \tilde{M}_{113}, \tilde{M}_{221}, \tilde{M}_{223}, \tilde{M}_{331}, \tilde{M}_{332}, \tilde{M}_{123}, \tilde{M}_{231}\} . \quad (20.69)$$

练习 20.9 运用条件 (20.44) 和 (20.45) 来验证: 在 27 个量 $M_{\mu\nu\lambda}$, $\mu\nu\lambda = 1, 2, 3$ 中, 只有 8 个独立的, 其中一个可能的集合由 (20.68) 给出。说明 20.46 和 (20.47) 导出 $\tilde{M}_{\mu\nu\lambda}$ 的类似结论。

我们可以将 $T^3(V)$, $\dim V = 3$ 的分解表示为 $GL(3)$ 的不可约子空间如下

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \otimes \textcircled{3} \otimes \textcircled{3} &= \textcircled{10} \oplus \textcircled{1} \oplus \textcircled{8} \oplus \textcircled{8} . \\ &\quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \end{aligned} \quad (20.70)$$

实际上, 基张量 $\varphi_{\mu\nu\lambda} = e_\mu \otimes e_\nu \otimes e_\lambda \in T^3(V)$ 可以表述为

$$\varphi_{\mu\nu\lambda} = S_{\mu\nu\lambda} + A_{\mu\nu\lambda} + M_{\mu\nu\lambda} + \tilde{M}_{\mu\nu\lambda} . \quad (20.71)$$

练习 20.13 考虑氮 (N) 原子的基态电子状态 [Z (原子序数)=7, 壳结构 $(1s)^2(2s)^2(2p)^2$]. 所有三个价电子都在 $2p$ 轨道上, 每个的单电子轨道波函数可以写为 $|lm\rangle = |1m\rangle$, 其中 $l=1$ 和 $m=1, 0$, 或 -1 [$l=1$ 基本状态 $SO(3)$ 的不可约表示 (更多细节参见 Chapter 22)]. 因此, 3-电子轨道波函数可以用 $|m_1, m_2, m_3\rangle$ 表示, 其中 $m_i = 1, 0, -1$ 和 $m_1 + m_2 + m_3 =$ 总轨道角动量的 z -分量 (我们省略标记 $l=1$, 因为它对于所有三个电子都是相同的). 它们生成 27-维空间 $T^3(V)$, $\dim(V) = 3$. 这是 $GL(3)$ 的一个表示空间, 并且根据 (20.70) 分成不可约子空间. 这些不可约表示中的每一个进一步划分为 $SO(3)$ 的不可约表示 [这是电子 Hamilton 量的对称群 (回忆 Chapter 18 开头的讨论)] 如下:

$$\textcircled{10} = \textcircled{7} \oplus \textcircled{3}, \quad \textcircled{8} = \textcircled{5} \oplus \textcircled{3} \quad (\text{两次}), \quad \textcircled{1} = \textcircled{1}.$$

举例, $\textcircled{7}$ 是 $SO(3)$ 的不可约表示, 其总轨道角动量 $L=3$ 且多重数 $2L+1=7$. 由于电子具有自旋 $\frac{1}{2}$, 因此电子总波函数必须由轨道和自旋部分的积表示给出. 3-电子自旋波函数可写为 $|m_{s1}m_{s2}m_{s3}\rangle$, 其中 $m_{si} = \pm\frac{1}{2}$. 因此, 自旋表示空间是 8-维的, 并根据练习 20.13 的结果划分为 $GL(2)$ 的不可约子空间. 根据**泡利不相容原理 (Pauli exclusion principle)**, 电子总波函数在任何电子对的交换下被要求是反对称的. 总波函数通常用**光谱项 (spectroscopic notation)** 标记

$$|^{2S+1}L_J; Jm_J\rangle, \quad m_J = J, J-1, \dots, -J+1, -J,$$

其中, L = 总轨道角动量, S = 总自旋角动量, J = 总角动量, m_J = 总角动量的 z 分量. J 的可能值为 $L+S, L+S-1, \dots, |L-S|$ (见 Chapter 22). 将上述所有信息放在一起, 并运用练习 20.11 的结果, 说明对于 $(2p)^3$ 排布的唯一可能的光谱项是

$$^4S_{\frac{3}{2}}, ^2D_{\frac{5}{2}}, ^2D_{\frac{3}{2}}, ^2P_{\frac{3}{2}} \text{ 和 } ^2P_{\frac{1}{2}},$$

总共 20 个状态, 其中 S 表示 $L=0$, P 表示 $L=1$, D 表示 $L=2$.

上面关于在 $T^m(V)$, $\dim V = n$ 或 $(m, 0)$ -型张量空间上 $GL(n)$ 的表示的讨论类似地适用于对偶张量空间 $T^m(V^*)$ 或 $(0, m)$ -型张量空间. 实际上, 可以在 (r, s) -型混合张量空间上表示 $GL(n)$. 首先考虑具有基张量 φ_μ^ν 的 $(1, 1)$ -型张量空间. 如果迹 φ_μ^μ , 我们可以将 φ_μ^ν 分解为

$$\varphi_\mu^\nu = \psi_\mu^\nu + \delta_\mu^\nu S, \quad (20.73)$$

其中

$$S \equiv \frac{1}{n} \varphi_\mu^\mu, \quad (20.74)$$

而 ψ_μ^ν 是无迹的部分. 显然, S 生成了一个一维空间, 它在 $GL(n)$ 下不变的, 而 ψ_μ^ν 构成了不可约表示的基. 因此, 由 φ_μ^ν 生成的 $(1, 1)$ -型张量空间分解为 S 所生成的单重态空间与由无迹张量 ψ_μ^ν 生成的 (n^2-1) -维不可约表示空间的直和. 这个例子说明: 如果混合 (s, r) -型张量 $\psi_{\mu_1, \dots, \mu_r}^{\nu_1, \dots, \nu_s}$ 是一个不可约表示空间的张量, 它必须满足无迹条件

$$\psi_{\mu_1, \dots, \mu_{p-1}, \lambda, \mu_{p+1}, \dots, \mu_r}^{\nu_1, \dots, \nu_{q-1}, \lambda, \nu_{q+1}, \dots, \nu_s} = 0, \quad (20.75)$$

其中, $1 \leq p \leq r$, $1 \leq q \leq s$. 在这些不可简化的表示中, 分离的标准 Young 表 Y_r 和 Y_s 分别

分配给下指标和上指标:

$$Y_r = \{\mu_1, \dots, \mu_l\}, \quad Y_s = \{\mu'_1, \dots, \mu'_{n-l}\}, \quad (20.76)$$

使得 [类似于 (20.62)]

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_l = r, \quad (20.77)$$

$$\mu'_1 + \mu'_2 + \dots + \mu'_{n-l} = s, \quad (20.78)$$

和

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_l \geq 0 \geq \mu_{l+1} \geq \mu_{l+2} \geq \dots \geq \mu_n, \quad (20.79)$$

其中我们已经设

$$\mu'_1 = -\mu_n, \mu'_2 = -\mu_{n-1}, \dots, \mu'_{n-l} = -\mu_{l+1} \quad (20.80)$$

来满足条件

$$\mu'_1 \geq \mu'_2 \geq \dots \geq \mu'_{n-l} \geq 0. \quad (20.81)$$

21. $U(n), SL(n), SU(n)$ 和 $O(3)$ 的不可约表示

我们希望问这样一个问题： $GL(n)$ 的不可约表示当限于其子群 $U(n), SL(n), SU(n)$ 和 $O(n)$ 时是否可约。

首先考虑 $U(n)$ 。假设 $D(g)$ 是依赖于 V 的一组基 $\{e_i\}$ 的 $T^1(V) = V$ (么正空间) 上的 $U(n)$ 的矩阵表示, 使得, 在 $g \in U(n)$ 的作用下 [回忆 Table 1.1]

$$e_i \longrightarrow e'_i = (D^{-1}(g))_i^j e_j . \quad (21.1)$$

通过么正性, 对于任意 $g \in U(n)$, 有 $D^{-1}(g) = D^\dagger(g)$ 。因此

$$e'_i = (D^\dagger(g))_i^j e_j = \sum_j \overline{(D(g))_j^i} e_j . \quad (21.2)$$

另一方面, 在 $T^*(V)$ 上 $U(n)$ 的同一个矩阵表示 $D(g)$ 产生

$$e^{ii} = (D(g))_j^i e^j , \quad (21.3)$$

其中, $\{e^i\}$ 是对偶于 $\{e_i\}$ 的 V^* 中的一组基。在上述方程的复共轭上, 我们看到 $\overline{e^i}$ 在 $U(n)$ 下以与 e_i 相同的方式变换。事实上, 很明显在 $U(n)$ 下, 我们有以下等价的混合张量:

$$\varphi_{\mu_1, \dots, \mu_r}^{\nu_1, \dots, \nu_s} \sim \overline{\varphi_{\nu_1, \dots, \nu_s}^{\mu_1, \dots, \mu_r}} . \quad (21.4)$$

除了这种等价性之外, $GL(n)$ 的不可约表示, 其特征在于适合于张量秩的不同 Young 图, 仍然是 $U(n)$ 的不可约表示。

我们下一个将考虑特殊线性 (么模) 群 $SL(n)$:

$$SL(n) = \{g | g \in GL(n), \det(g) = 1\} .$$

首先注意到任意 $g \in GL(n)$ 可以被表示成

$$g = (\det(g))^{\frac{1}{n}} g', \quad (21.5)$$

其中, $g' \in SL(n)$ 。

练习 21.1 验证上面的表述 (有定理 16.3 和定理 16.4 的帮助下)。

现在假设 $D: SU(n) \rightarrow \mathcal{T}(T^r(V))$ 是 $SU(n)$ 在秩- r 空间上的一个可约表示。从 (21.5) 得到 $D: GL(n) \rightarrow \mathcal{T}(T^r(V))$ 由下式给出

$$D(g) = (\det(g))^{\frac{r}{n}} D(g') \quad (21.6)$$

也是可约表示。

练习 21.2 验证上述表述。

因此, $GL(n)$ 的不可约表示仍然是 $SL(n)$ 的不可约表示, 并因此是 $SU(n)$ 的不可约表示。

然而, $GL(n)$ 的某些不等价不可约表示可能变得等价于 $SL(n)$ [见下面的 (21.20)]。考虑完全反对称秩- n 张量对应于 Young 表 $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \\ \hline \end{array}$ 。其分量必须形如

$$A^{i_1 \dots i_n} = c \varepsilon^{i_1 \dots i_n}, \quad (21.7)$$

其中, c 是一个常数并且 $\varepsilon^{i_1 \dots i_n}$ 是 Levi-Civita 张量 [c.f. (2.8)]。在 $g \in GL(n)$ 下, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} &\longrightarrow \varepsilon'^{i_1 \dots i_n} = g_{j_1}^{i_1} \dots g_{j_n}^{i_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n} \\ &= \alpha \varepsilon^{i_1 \dots i_n}. \end{aligned} \quad (21.8)$$

在上面的方程中, α 通过设定 $i_1, i_2, \dots, i_n = n$ 来决定。因此

$$\alpha = g_{j_1}^1 \dots g_{j_n}^n \varepsilon^{j_1 \dots j_n}, \quad (21.9)$$

根据 (16.78), 它等于 $\det(g)$ 。则我们有

$$\boxed{\varepsilon^{i_1 \dots i_n} \longrightarrow \varepsilon'^{i_1 \dots i_n} = \det(g) \varepsilon^{i_1 \dots i_n}}. \quad (21.10)$$

上面的定理现在可以被表述 (没有证明)。

定理 21.1 令 $\psi_{i_1 \dots i_N}$, $N = mn$ 是从 (矩形) Young 表 (对应于有 n 行和 m 列 Young 图 $\{\mu_1 = m, \mu_2 = m, \dots, \mu_n = m\}$) 得到的张量:

1	$n+1$	$2n+1$	$\cdots$	$(m-2)n+1$	$(m-1)n+1$
2	$n+2$	$2n+2$	$\cdots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$		
$n-1$					
n	$2n$	$3n$	$\cdots$	$mn-n$	mn

具有对应 Young 对称子 Y , 其中每个从 i_1 到 i_N 个指标可以假设值 $1, 2, \dots, n$, 即:

$$\psi_{i_1 \dots i_N} = Y e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_N} .$$

则

$$\psi_{i_1 \dots i_N} = c \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \varepsilon^{i_{n+1} \dots i_{2n}} \dots \varepsilon^{i_{(m-1)n+1} \dots i_{mn}} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \otimes \cdots \otimes e_{i_{(m-1)n+1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{mn}} , \quad (21.11)$$

其中, c 是一个常数, 并且每个 ε 是一个 Levi-Civita 符号。

练习 21.3 对于如下 Young 表验证上述定理的有效性

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} .$$

说明对于这种情况, 取 $i_1 = i_3 = 1, i_2 = i_4 = 2$, 有

$$\psi_{1212} = \frac{1}{3} (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \otimes (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) ,$$

它是两个反对称张量的张量积。(参考练习 20.5)。

定理 21.1 和方程 (21.10) 的直接结果即: 在任意 $g \in GL(n)$ 下, 有:

$$\psi_{i_1 \dots i_N} \longrightarrow \psi'_{i_1 \dots i_N} = (\det(g))^m \psi_{i_1 \dots i_N} , \quad N = mn . \quad (21.12)$$

因此, $\psi_{i_1 \dots i_N}$ 是 $GL(n)$ 的一维表示; 特别地, 它在 $SL(n)$ 下是不变的 [根据定义, $\det(g) = 1$]。

现在让我们就允许的 Young 图而言说明积表示的 **Clebsch-Gordon 分解 (Clebsch-Gordon decomposition)** 规则 (没有证明)[c.f. (18.75)]。令 $[\mu], [\nu]$ 是由两个 Young 图确定的 $GL(n)$ 的两个不可约表示。举例

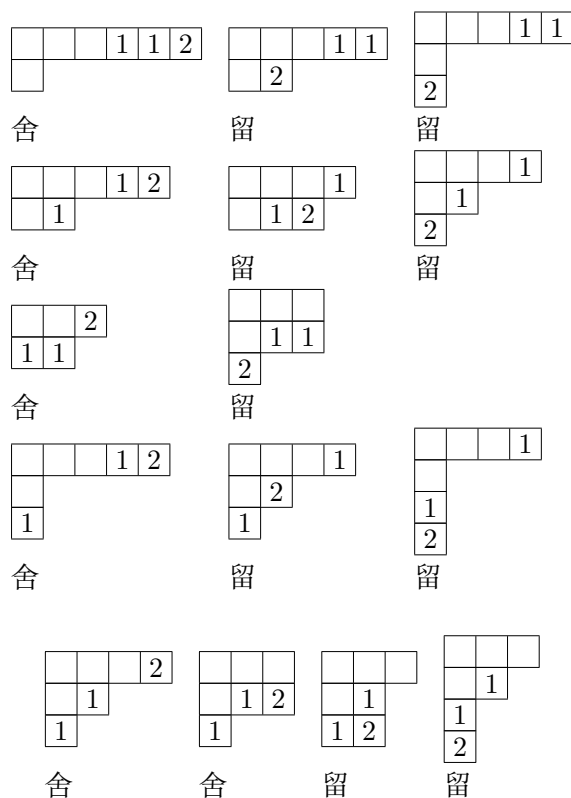
$$[\mu] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad [\nu] = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} .$$

将 ν_1, ν_2 等放在 $[\nu]$ 图中 (如上面的 $[\nu]$ 图所示)。将 1-方格添加到 $[\mu]$ 图中来制作其它符合规则的图, 使得同一列中没有两个 1-方格:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & 1 \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array}$$

接下来, 将 2-方格添加到上面得到的图中来制作更多符合规则的图, 这样就不会有两个 2-方

格位于同一列中:



从最后一步中得到的图中, 舍弃所有这样的图: 在从右向左读取连续行时, 第 i 行 2 出现在第 i 个 1 之前, 第 i 行 3 出现在第 i 行 2 之前等等。对于任意正整数 i 。剩下的图, 从添加的方格中删除所有数字并用多重性计数, 给出了 Clebsch-Gordon 分解。因此, 在上面的例子中, 我们有

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \\
 & \oplus 2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \\
 & \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} .
 \end{aligned} \tag{21.13}$$

练习 21.4 使用上述规则对 Clebsch-Gordon 分解进行验证:

$$\text{i)} \quad \square \otimes \square = \square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad (21.14)$$

$$\text{ii)} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \square = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad (21.15)$$

$$\text{iii)} \quad \square\square \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \quad (21.16)$$

$$\text{iv)} \quad \square \otimes \square \otimes \square = \square\square\square \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \oplus 2 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}. \quad (21.17)$$

上述练习中的结果 iv) 再现 (20.70)。

上面介绍的 Clebsch-Gordon 分解规则说明以下规则。

定理 21.2 令 $GL(n)$ 的不可约表示由 Young 图 $[\mu_1, \dots, \mu_n]$ 确定。则对于 $l < n$ 有

$$\underbrace{[m, m, \dots, m]}_{n \text{ 个}} \otimes [\mu_1, \dots, \mu_l] = [\mu_1 + m, \dots, \mu_l + m, \underbrace{m, \dots, m}_{(n-l) \text{ 个}}]. \quad (21.18)$$

举例, 对于 $GL(3)$ 有

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}. \quad (21.19)$$

(21.18) 中的 $[m, m, \dots, m]$ 是具有 n 行和 m 列的矩形 Young 图。根据定理 21.1, 它是一维表示, 其与乘法因子 $(\det(g))^m, g \in GL(n)$ 进行变换。则很明显立即得到: 对于 $SL(n)$, 我们有以下表示等价。

$$\boxed{\text{对于 } SL(n), [\mu_1 + m, \dots, \mu_l + m, \underbrace{m, \dots, m}_{(n-l) \text{ 个}}] \approx [\mu_1, \dots, \mu_l]}. \quad (21.20)$$

因此, 为了找到 $SL(n)$ 的不可约表示, 我们只需要考虑少于 n 行的 Young 图, 最多由 $n-1$ 个整数 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ 确定。对于 $GL(3)$ 的方程 (21.19) 变为: 对于 $SL(3)$ 有

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}. \quad (21.21)$$

练习 21.5 说明: 对于 $SL(n)$ 有

$$[1^{n-1}] \approx [1]. \quad (21.22)$$

$SL(n)$ 的 (21.22) 的推广是与 (21.20) 不同的等价, 由下面的定理给出 (没有证明)。

定理 21.3 对于 $SL(n)$ 有

$$[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}] \approx [\mu_1, \mu_1 - \mu_{n-1}, \dots, \mu_1 - \mu_2] . \quad (21.23)$$

在 Figure 21.1 中, 虚线 Young 图 [(21.3) 的等式右边] 与实线 Young 图 [(21.23) 的等式左边] 相接时完成一个 $n \times \mu_1$ 矩形。

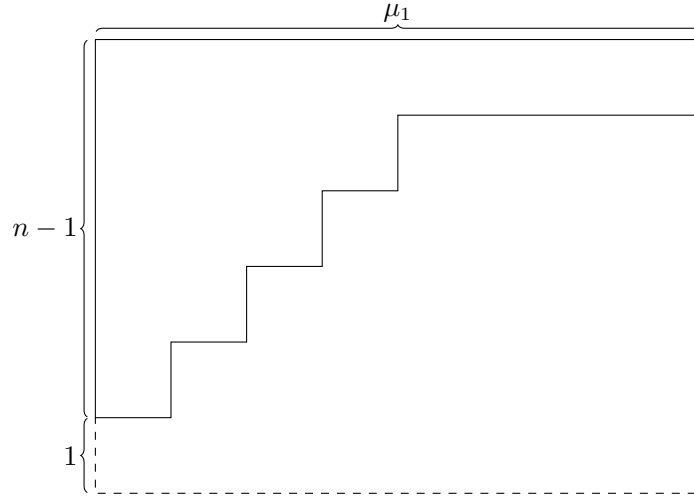


Figure 21.1

注意到 (21.20) 可以被写成

$$\text{对于 } SL(n), [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n] \approx [\mu_1 - m, \mu_2 - m, \dots, \mu_n - m] , \quad (21.24)$$

其中, m 是一个或正或负的任意整数。从 $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$ 开始, 则可以产生混合秩的等价张量表示 [c.f. (20.77)。举例, $[0, 0, \dots, 0, -1]$ 对应于张量 φ^μ (n 维表示)。

在 (21.24) 中欧给你取 $m = -1$, 我们有

$$[0, 0, \dots, 0, -1] \approx [1, 1, \dots, 1, 0] .$$

通过定理 21.1, 等式右边对应于张量 $c\varepsilon^{i_1 \dots i_{n-1}} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{n-1}}$, 是一个 n 维张量 (由于 $i_1, \dots, i_{n-1}$ 可以取值 $1, 2, \dots, n$)。因此, φ^μ 等价于

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_{n-1} \nu} \varphi^\nu = \varphi_{i_1 \dots i_{n-1}} , \quad (21.25)$$

其中, $\varepsilon_{i_1 \dots i_{n-1} \nu}$ 是 Levi-Civita 符号。我们得出结论: Levi-Civita 符号额可以用作升降指标来得到 $SL(n)$ 的等价不可约表示。

考虑 $SL(3)$ [或 $SU(3)$]。对应于 $[1, 0, -1]$ 的混合张量 φ_μ^ν 等价于 $\varphi_{\mu\nu\lambda}$, 通过下式对应于 $[2, 1, 0]$ ($\boxplus$):

$$\varphi_{\mu\nu\lambda} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha} \varphi_\lambda^\alpha, \quad \varphi_\lambda^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} \varphi_{\mu\nu\lambda} . \quad (21.26)$$

练习 21.6 运用 (2.12) 来从 (21.26) 的第一个方程得到第二个方程。

为了使 φ_λ^α 不可约, 它必须是无迹的: φ_λ^λ [c.f. (20.73)]。这说明

$$\varphi_{\mu\nu\lambda} + \varphi_{\nu\lambda\mu} + \varphi_{\lambda\mu\nu} = 0. \quad (21.27)$$

(21.26) 的第一个方程也说明

$$\varphi_{\mu\nu\lambda} + \varphi_{\nu\mu\lambda} = 0. \quad (21.28)$$

相反地, 如果 $\varphi_{\mu\nu\lambda}$ 满足上面两个条件, 则 $\varphi_\lambda^\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\mu\nu}\varphi_{\mu\nu\lambda}$ 满足无迹条件 $\varphi_\alpha^\alpha = 0$ 。

最后, 我们考虑 $O(n)$ 和它的子群 $SO(3)$ 。回忆对于矩阵 $(a_i^j) \in O(n)$, 正交性条件意味着

$$\sum_{k=1}^n a_k^i a_k^j = \sum_{k=1}^n a_i^k a_j^k = \delta_{ij}, \quad (21.29)$$

[c.f. (1.29)]。因此, 在一个表示空间 $T^r(V)$ 中, 分量为 $T^{i_1 \dots i_r}$ 的张量在 $O(n)$ 下变换如下

$$(T')^{i_1 \dots i_r} = a_{j_1}^{i_1} a_{j_2}^{i_2} \dots a_{j_r}^{i_r} T^{j_1 \dots j_r}, \quad (21.30)$$

指标的缩并是在 $O(n)$ 变换下的不变运算。换句话说, 缩并与 $O(n)$ 变换对易。实际上, 考虑例子 (12) 缩并 (缩并前两个指标), (21.29) 和 (21.30) 说明

$$\sum_k (T')^{kk i_3 \dots i_r} = \delta_{j_1 j_2} a_{j_3}^{i_3} \dots a_{j_r}^{i_r} T^{j_1 j_2 j_3 \dots j_r} = a_{j_3}^{i_3} \dots a_{j_r}^{i_r} \sum_k T^{kk j_3 \dots j_r}. \quad (21.31)$$

对于一个秩- r 张量, 有 $\binom{r}{2} = \frac{r(r-1)}{2}$ 种可能的缩并:

$$\begin{aligned} (T_{(12)})^{i_3 \dots i_r} &\equiv \sum_{k=1}^n T^{kk i_3 \dots i_r}, \\ (T_{(13)})^{i_2 i_4 \dots i_r} &\equiv \sum_{k=1}^n T^{k i_2 k i_4 \dots i_r}, \\ &\vdots \\ (T_{(\alpha\beta)})^{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_{\beta-1} i_{\beta+1} \dots i_r} &\equiv \sum_{k=1}^n T^{i_1 \dots i_{\alpha-1} k i_{\alpha+1} \dots i_{\beta-1} k i_{\beta+1} \dots i_r}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

其中, 每个是一个秩- $(r-2)$ 张量。括号内的下标表示张量指标缩并的位置。然后我们可以从 T 构造无迹张量 T_0 , 如下所示。写做

$$\begin{aligned} T^{i_1 \dots i_r} &= (T_0)^{i_1 \dots i_r} + \delta^{i_1 i_2} (V_{(12)})^{i_3 \dots i_r} + \dots \\ &\quad + \delta^{i_\alpha i_\beta} (V_{(\alpha\beta)})^{i_1 \dots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \dots i_{\beta-1} i_{\beta+1} \dots i_r} + \dots \end{aligned} \quad (21.32)$$

要求 T_0 无迹 (关于所有指标对), 我们得到 $\binom{r}{2}$ 个方程, 其中, 秩- $(r-2)$ 缩并张量 $V_{(\alpha\beta)}$ 可以用秩- $(r-2)$ 缩并张量 $T_{(\alpha\beta)}$ 来求解。

练习 21.7 展示将一般秩-3 张量 $T^{i_1 i_2 i_3}$ 分解为无迹部分 T_0 及其正交分量:

$$T^{i_1 i_2 i_3} = (T_0)^{i_1 i_2 i_3} + \delta^{i_1 i_2} (V_{(12)})^{i_3} + \delta^{i_1 i_3} (V_{(13)})^{i_2} + \delta^{i_2 i_3} (V_{(23)})^{i_1} . \quad (21.33)$$

用 $T_{(\alpha\beta)}$ 求解 $V_{(\alpha\beta)}$ 。

我们将一个张量 T 的分解 (21.32) 写成它的无迹部分 T_0 和正交分量 V 的直和

$$T = T_0 \oplus V , \quad (21.34)$$

其中, $V^{i_1 \dots i_r}$ 有 (21.32) 的等式右边中给出的最后 $\binom{r}{2}$ 的项。我们之前的讨论 (21.31) 给出了以下定理, 将仅表述而不证明。

定理 21.4 一个张量分解成它的无迹部分和正交分量 [(21.34)] 在 $O(n)$ 变换下是不变的。

我们进一步注意到无迹张量的子空间 $T_0^r(V) \subset T^r(V)$, 在对称群 S_n 下是不变的。因此, 可以构造 $T^r(V)$ 上的 $O(n)$ 的所有不可约表示, 通过从 $T_0^r(V)$ 开始, 然后通过应用 Young 对称子来得到给定对称类型的无迹张量。但是, 并非所有可能的 Young 图都会产生非消失的无迹张量, 如下例所示。

考虑群 $O(2)$ 及其在 $T^3(V)$, $\dim(V) = 2$ 上的表示。将无迹张量 $T_0 \in T^3(V)$ 写为

$$T_0 = T^{i_1 i_2 i_3} \varphi_{i_1 i_2 i_3}, \quad i_1, i_2, i_3 = 1, 2 , \quad (21.35)$$

其中, $\varphi_{i_1 i_2 i_3} = e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3}$ 。从 (20.40), 我们有

$$Y_3 \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right) T_0 = T^{i_1 i_2 i_3} M_{i_1 i_2 i_3} , \quad (21.36)$$

其中

$$M_{i_1 i_2 i_3} = \frac{1}{3} (\varphi_{i_1 i_2 i_3} + \varphi_{i_2 i_1 i_3} - \varphi_{i_3 i_2 i_1} - \varphi_{i_3 i_1 i_2}) , \quad (21.37)$$

[c.f. (20.41)]。唯一独立的 $M_{i_1 i_2 i_3}$ 为

$$\begin{aligned} M_{112} &= \frac{2}{3} (\varphi_{112} - \varphi_{211}) = -2M_{211} = -2M_{121} , \\ M_{221} &= \frac{2}{3} (\varphi_{221} - \varphi_{122}) = -2M_{122} = -2M_{212} . \end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned} Y_3 \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right) T_0 &= \left(T^{112} - \frac{1}{2} (T^{211} + T^{121}) \right) M_{112} \\ &\quad + \left(T^{221} - \frac{1}{2} (T^{122} + T^{212}) \right) M_{221} . \end{aligned} \quad (21.38)$$

由于 T_0 是无迹的, 它的分量满足

$$\sum_i T^{iij} = \sum_i T^{iji} = \sum_i T^{jii} = 0, \quad j = 1, 2 . \quad (21.39)$$

这些条件意味着

$$T^{112} = T^{211} = T^{121}, \quad T^{221} = T^{122} = T^{212}. \quad (21.40)$$

则我们从 (21.38) 得到结论, 即:

$$Y_3 \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right) T_0 = 0. \quad (21.41)$$

类似地, 可以说明

$$Y_3 \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right) T_0 = 0. \quad (21.42)$$

练习 21.8 验证上面的方程。

练习 21.9 说明无迹张量 $Y_3 \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \right) T_0$ 在 $n = 2$ 时也同样消失。

练习 21.10 计算无迹张量 $Y_2 \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \right) T_0$, 其中 T_0 是一个秩-2 无迹张量 $T_0 = T^{i_1 i_2} \varphi_{i_1 i_2}$, $i_1, i_2 = 1, 2$; 并且说明它不同样地消失。

我们将表述下面重要的定理而不证明。

定理 21.5 $T^r(V)$, $\dim V = n$ 中的无迹张量, 对应于前两列长度之和大于 n 的 Young 图必须同样地消失。

这个一般结论证实了之前研究的特殊例子的结果。

推论 21.1 $O(n)$ 的不可约表示可以从对应于前两列长度小于等于 n 的 Young 图的无迹张量构造。

举例, 对于 $O(3)$, 我们有无迹张量

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \dots \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array},$$

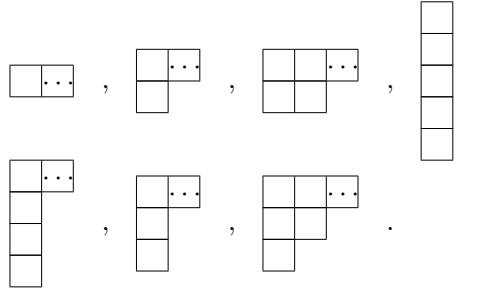
$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \dots \\ \hline & \\ \hline \end{array}.$$

对于 $O(4)$, 我们有

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \dots \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & \dots \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \dots \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \dots \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}.$$

对于 $O(5)$, 有如下:



在上面的 Young 图中, 内部带点的方格表示在同一行有任意数量的方格。

一些可能的图可以通过以下方式配对: 第一列中有 c_1 个方格的图与第一列中有 $n - c_1$ 并且在其它每列中有相同数量的框的图配对。(这些配对在上图中表现为同一列图)。当 n 是偶数时, 例如在 $O(4)$ 中, $c_1 = \frac{n}{2}$ 的图不是成对的。每个完全反对称图 $[1^n]$, ($c_1 = n$) 可以被认为和没有方格的图配对, 表示一个标量。

现在让我们关注 $SO(n)$ 。事实证明, 对于这种情况, 通过与 Levi-Civita 符号的缩并, 配对图的不可约表示是等价的。我们不会一般地证明这一事实, 而是通过一些例子来说明。首先要注意的是, 对于 $SO(n)$, 我们不必考虑完全反对称图 $[1^n]$ 。

考虑 $SO(3)$ 和对应于 Young 图 $\square$ 的不可约表示, 具有张量 φ_μ 。构成反对称张量

$$\psi_{\mu\nu} \equiv \varepsilon_{\mu\nu}^\lambda \varphi_\lambda = -\psi_{\nu\mu}, \quad (21.43)$$

其中, $\varepsilon_{\mu\nu}^\lambda$ 是 Levi-Civita 符号。假设 φ_λ 在 $SO(3)$ 下变换根据

$$\varphi_\lambda \rightarrow \varphi'_\lambda = a_\lambda^\rho \varphi_\rho. \quad (21.44)$$

则从 (21.10) 有

$$\psi_{\mu\nu} \rightarrow \psi'_{\mu\nu} = \varepsilon'_{\mu\nu} \lambda \varphi'_\lambda = \varepsilon_{\mu\nu}^\lambda a_\lambda^\rho \varphi_\rho. \quad (21.45)$$

因此

$$\psi'_{12} = \varepsilon_{12}^3 a_3^\rho \varphi_\rho = a_3^\rho \varphi_\rho = -\psi'_{21}, \quad (21.46a)$$

$$\psi'_{23} = \varepsilon_{23}^1 a_1^\rho \varphi_\rho = a_1^\rho \varphi_\rho = -\psi'_{32}, \quad (21.46b)$$

$$\psi'_{31} = \varepsilon_{31}^2 a_2^\rho \varphi_\rho = a_2^\rho \varphi_\rho = -\psi'_{13}. \quad (21.46c)$$

$\psi_{12}, \psi_{23}, \psi_{31}$ 组成了对应于 Young 图 $\square$ 的三维不可约表示的基并且分别和 $\varphi_3, \varphi_1, \varphi_2$ 变换完全一样。我们对于 $SO(3)$ 可以表示 $\square$ 和 $\square$ 之间的等价性如下:

$$\square_\lambda \approx \begin{array}{|c|c|} \hline \mu & \lambda \\ \hline \nu & \\ \hline \lambda & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mu \\ \hline \nu \\ \hline \end{array}, \quad (21.47)$$

其中, 中间的图中重复指标 λ 求和 (从 1 到 n)。类似地

$$\varphi_{\mu\nu} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mu & \nu \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu & \rho & \lambda \\ \hline \nu & & \\ \hline \rho & & \\ \hline \end{array} = \varepsilon_{\mu\nu}^\rho \varphi_{\rho\lambda} \equiv \psi_{\mu\nu\lambda} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mu & \lambda \\ \hline \nu & \\ \hline \end{array}. \quad (21.48)$$

实际上, $SO(3)$ 的所有张量型不等价不可约表示可以确定通过图

$$\square, \quad \square\square, \quad \square\square\square, \dots$$

其中, 每个图由一个正整数 $\mu_1 (= 0, 1, 2, 3, \dots)$ 来特征。

作为 $GL(3)$ 的一个表示, 根据 (20.71), 图 $[\mu_1]$ 的维度为

$$\frac{(\mu_1 + 2)(\mu_1 + 1)}{2} = \binom{\mu_1 + 2}{2}.$$

$[\mu_1]$ 的完全对称张量的无迹条件由下式给出

$$S_{11i_3\dots i_{\mu_1}} + S_{22i_3\dots i_{\mu_1}} + S_{33i_3\dots i_{\mu_1}} = 0, \quad (21.49)$$

其中包含与 $[\mu_1 - 2]$ 的维数一样多的方程, 由 (20.72) 给出。对于 $n = 3$, 该数字是 $\binom{\mu_1}{2}$ 。因此, 对于 $SO(3)$ 的表示, $[\mu_1]$ 的维数为

$$\binom{\mu_1 + 2}{2} - \binom{\mu_1}{2} = \frac{(\mu_1 + 2)(\mu_1 + 1)}{2} - \frac{\mu_1(\mu_1 - 1)}{2} = 2\mu_1 + 1. \quad (21.50)$$

这是量子力学中轨道角动量理论的一个熟悉的结果。因此完全对称的无迹张量

$$\overbrace{\square\square\square\dots}^{\mu_1}$$

描述了自旋为 μ_1 ($\mu_1 = 0, 1, 2, \dots$) 的粒子, 其自旋的 z -分量有 $2\mu_1 + 1$ 独立值。写做 $\mu_1 = l$ (这是量子理论中通常用于轨道角动量的符号), 该表示中的基本状态通常被写为 (在 Dirac 符号中) 为 $|lm\rangle$, 其中 m 的 $2l + 1$ 值为 $l, l - 1, \dots, -l$ 。角动量的半整数值来自所谓的 $SO(3)$ 的旋量表示 (spinor representation), 将在下一章中讨论。

对于 $SO(4)$, 与 Levi-Civita 符号缩并产生:

$$\varphi_{\mu\nu} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mu & \nu \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline \lambda & \mu & \nu \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} = \varepsilon_{\lambda\rho\delta}^\nu \varphi_{\mu\nu} \equiv \psi_{\lambda\rho\delta\mu} = \begin{array}{|c|c|} \hline \lambda & \mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \rho \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \delta \\ \hline \end{array} \nu. \quad (21.51)$$

对于 $SO(5)$, 通过缩并得到下面等价性:

$$\varphi_{\mu\nu} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mu & \nu \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha & \mu & \nu \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \delta \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mu \\ \hline \end{array} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu} \equiv \psi_{\alpha\beta\gamma\delta\nu} = \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \nu \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \delta \\ \hline \end{array}, \quad (21.52)$$

$$\varphi_{\mu\nu\lambda} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mu & \nu \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \lambda \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha & \mu & \nu \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \mu \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \lambda \\ \hline \end{array} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\nu\lambda} \varphi_{\mu\nu\lambda} \equiv \psi_{\alpha\beta\gamma\nu} = \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha & \nu \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \beta \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline \end{array}, \quad (21.53)$$

$$\varphi_{\mu\nu\lambda\rho\delta} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mu & \nu & \lambda \\ \hline \rho & \delta & \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \alpha & \mu & \nu & \lambda \\ \hline \beta & \rho & \delta & \\ \hline \gamma & & & \\ \hline \mu & & & \\ \hline \rho & & & \\ \hline \end{array} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^{\mu\rho} \varphi_{\mu\nu\lambda\rho\delta} \equiv \psi_{\alpha\beta\gamma\nu\lambda\delta} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha & \nu & \lambda \\ \hline \beta & \delta & \\ \hline \gamma & & \\ \hline \end{array}. \quad (21.54)$$

类似地得到 $SO(n)$, $n > 5$ 的等价性。

22. $SU(2)$ 和 $SO(3)$ 的不可约表示

先前 (Chapter 1,4,9 和 11) 已经讨论过 $SO(3)$, 即: 三维旋转群, 的许多方面。它还强调了它在物理学应用中的基本作用, 特别是涉及量子理论中旋转不变性的问题。在本章中, 我们将最终明确地确定该群的不可约表示。我们的方法补充了 Chapter 4 的方法, Chapter 4 侧重于 $SO(3)$ 的 Lie 代数 (无穷小生成元)。

我们首先构造 $SU(2)$ 的不可约表示, $SO(3)$ 的泛覆盖群 (参见 Chapter 11)。回想一下 [c.f. (11.69)] 每个 $g \in SU(2)$ 可以写成

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad (22.1)$$

其中, $|a|^2 + |b|^2 = 1$ 。令 $\{e_1, e_2\}$ 为复二维空间 $\mathbb{C}^2$ 的基, 其中 g 作用于

$$g(e_i) = g_i^j e_j. \quad (22.2)$$

对于 $j = \frac{n}{2}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, 为 $(2j+1)$ -维复向量空间 $\mathbb{V}^{(j)}$ 构造以下基:

$$\begin{aligned} \{e_0^{(j)} &= \sqrt{(2j)!} S_{2j} (e_1^{(2j)}) \equiv \sqrt{(2j)!} S_{2j} (\overbrace{e_1 \otimes \cdots \otimes e_1}^{2j \uparrow}), \\ e_1^{(j)} &= \sqrt{(2j)!} S_{2j} (e_1^{2j-1} \otimes e_2) \equiv \sqrt{(2j)!} S_{2j} (\overbrace{e_1 \otimes \cdots \otimes e_1}^{(2j-1) \uparrow} \otimes e_2), \\ e_2^{(j)} &= \sqrt{(2j)!} S_{2j} (e_1^{2j-2} \otimes e_2^2), \\ &\vdots \\ e_k^{(j)} &= \sqrt{(2j)!} S_{2j} (e_1^{2j-k} \otimes e_2^k), \\ &\vdots \\ e_{2j}^{(j)} &= \sqrt{(2j)!} S_{2j} (e_2^{2j})\} \end{aligned} \quad (22.3)$$

其中, S_{2j} 是一个对称映射 [(16.21)]. 上面的基向量可以被看成是在 e_1 和 e_2 中的 $2j$ 阶齐次多项式。举例, 对于 $j = 2$, 我么有很明显的记号

$$e_0^{(2)} = e_1^4, \quad e_1^{(2)} = e_1^3 e_2, \quad e_2^{(2)} = e_1^2 e_2^2, \quad e_3^{(2)} = e_1 e_2^3, \quad e_4^{(2)} = e_2^4. \quad (22.4)$$

根据 (22.1) 和 (22.2), $g \in SU(2)$ 作用在 $\mathbb{V}^{(j)}$ 上如下。

$$\begin{aligned} g(e_k^{(j)}) &= (g(e_1))^{2j-k} (g(e_2))^k = (ae_1 + be_2)^{2j-k} (-\bar{b}e_1 + \bar{a}e_2)^k \\ &= \sum_{m=0}^{2j-k} \binom{2j-k}{m} (ae_1)^{2j-k-m} (be_2)^m \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-\bar{b}e_1)^{k-l} (\bar{a}e_2)^l \\ &= \sum_{m=0}^{2j-k} \sum_{l=0}^k \binom{2j-k}{m} \binom{k}{l} a^{2j-k-m} b^m (-\bar{b})^{k-l} (\bar{a})^l e_1^{2j-(m+l)} e_2^{m+l}. \end{aligned} \quad (22.5)$$

令 $m+l=p$, 我们看到在上面的双求和中, p 可以假设为值 $0, 1, 2, \dots, 2j$ 。因此我们可以写

$$(e_k^{(j)})' = g(e_k^{(j)}) = (\mathcal{D}^{(j)})_k^p e_p^{(j)}, \quad (22.6)$$

其中

$$(\mathcal{D}^{(j)})_k^p = \sum_{m+l=p} \binom{2j-k}{m} \binom{k}{l} a^{2j-k-m} b^m (-\bar{b})^{k-l} (\bar{a})^l; \quad k, p = 0, 1, \dots, 2j, \quad (22.7)$$

并且空间 $\mathbb{V}^{(j)}$ 被看作是 $SU(2)$ 的不可约表示空间。 $(2j+1)$ 个基向量 $e_k^{(j)}, k = 0, 1, 2, \dots, 2j$, 被称为秩- $2j$ 的旋量 (spinors)。举一个例子, 我们有以下结果:

$$\begin{aligned} (e_1^{(2)})' &= (-a^3 \bar{b}) e_0^{(2)} + a^2 (|a|^2 - 3|b|^2) e_1^{(2)} \\ &\quad + 3ab (|a|^2 - |b|^2) e_2^{(2)} - b^2 (|b|^2 - 3|a|^2) e_3^{(2)} + (b^3 \bar{a}) e_4^{(2)}. \end{aligned} \quad (22.8)$$

练习 22.1 通过运用 (22.5) 验证上面的方程。

通过在 (22.3) 中重新调整基向量, 可以使上述表示变成幺正的。定义归一化状态

$$|jm\rangle \equiv \epsilon_m^{(j)} \equiv \frac{e_k^{(j)}}{\sqrt{(2j-k)!k!}} \equiv \frac{e_1^{j+m} e_2^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}, \quad (22.9)$$

其中, $m \equiv j-k$ 。对于一个 j 的确定值, 由于 k 遍历 $0, 1, \dots, 2j$, m 可能值为 $j, j-1, \dots, -j+1, -j$ 。注意到在上面方程中 $e_1^{j+m} e_2^{j-m} \equiv e_k^{(j)}$ 表示 e_1 的 $j+m$ 因子和 e_2 的 $j-m$ 因子的对称乘积 [如 (22.3) 定义]。幺正性如下所示。令 $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ 为 $\mathbb{C}^2$ 中的标准基。则 $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{C}^2$ 可以被写成 $u = u^1 e_1 + u^2 e_2$ 。通过下式定义一个 $\mathbb{C}^2$ 中 hermitian 内积

$$(u, v) = u^1 \bar{v}^1 + u^2 \bar{v}^2. \quad (22.10)$$

在张量空间 $\overbrace{\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2}^{2j\uparrow}$ 中向量 $\left(\frac{1}{\sqrt{(2j)!}}\right) \overbrace{u \otimes \dots \otimes u}^{2j\uparrow}$ 投影在 $\mathbb{V}^{(j)}$ 上, 给出了一个向量 $u^{(j)} \in \mathbb{V}^{(j)}$, 分量 $\epsilon_j^{(j)}, \dots, \epsilon_{-j}^{(j)}$ 分别由下式给出

$$\begin{aligned} (u^{(j)})^0 &= \frac{(u^1)^{2j}}{\sqrt{(2j)!}}, \quad (u^{(j)})^1 = \frac{(u^1)^{2j-1} (u^2)}{\sqrt{(2j-1)!}}, \quad \dots, \\ (u^{(j)})^k &= \frac{(u^1)^{2j-k} (u^2)^k}{\sqrt{(2j-k)!k!}}, \quad \dots, \quad (u^{(j)})^{2j} = \frac{(u^2)^{2j}}{\sqrt{(2j)!}}. \end{aligned} \quad (22.11)$$

内积 (22.10) 在 $\mathbb{V}^{(j)}$ 中推导出下面的 hermitian 内积:

$$(u^{(j)}, v^{(j)}) = \sum_{k=0}^{2j} (u^{(j)})^k \overline{(v^{(j)})^k}. \quad (22.12)$$

在由 (22.1) 给出的 $g \in SU(2)$ 下, $u^{(j)}$ 变换如下 [与 (22.5) 相比]:

$$\begin{aligned} (u^{(j)})^k &\longrightarrow \left((u^{(j)})'\right)^k = \frac{1}{\sqrt{(2j-k)!k!}} ((u')^1)^{2j-k} ((u')^2)^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2j-k)!k!}} (au^1 - \bar{b}u^2)^{2j-k} (bu^1 + \bar{a}u^2)^k, \end{aligned} \quad (22.13)$$

则有

$$\begin{aligned} (2j)! \left((u^{(j)})', (v^{(j)})'\right) &= \sum_{k=0}^{2j} \frac{(2j)!}{(2j-k)!k!} ((u')^1)^{2j-k} ((u')^2)^k \overline{((v')^1)^{2j-k} ((v')^2)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} ((u')^1 \overline{(v')^1})^{2j-k} ((u')^2 \overline{(v')^2})^k \\ &= \left((u')^1 \overline{(v')^1} + (u')^2 \overline{(v')^2}\right)^{2j} \\ &= \left(u^1 \bar{v}^1 + u^2 \bar{v}^2\right)^{2j} \\ &= (2j)! (u^{(j)}, v^{(j)}), \end{aligned} \quad (22.14)$$

第四个等号来自于 p 的么正性。因此 $\left((u^{(j)})', (v^{(j)})'\right) = (u^{(j)}, v^{(j)})$, 以及 $SU(2)$ 在 $\mathbb{V}^{(j)}$ 上的不可约 $(2j+1)$ -维表示由基 (22.9) 确定是么正的。实际上, 标记为 $D^{(j)}$ (对于 $j = \frac{n}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$) 的所有这些不可约表示的集合穷尽了 $SU(2)$ 的所有不可约表示。(我们这里将省略这个中心事实的证明)。类似于 (22.6), 我们可以写

$$\left((u^{(j)})'\right)^m = (D^{(j)})_{m'}^m (u^{(j)})^{m'}, \quad (22.15)$$

其中

$$(u^{(j)})^m = \frac{(u^1)^{j+m} (u^2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}, \quad (22.16)$$

其中, $m, m' = j, j-1, \dots, -j+1, -j$ 。[这些与 (22.11) 中的量 $(u^{(j)})^k$ 相同, 其中 $m = j-k$]。注意, 分量为 $(u^{(j)})^m$ 的一个向量可以看成 $\mathbb{C}^2$ 中的 $2j$ 阶齐次多项式的线性空间中的矢量。该空间与 $\mathbb{V}^{(j)}$ [(22.3)] 同构, 并且也可以被看成 $SO(3)$ 的 $(2j+1)$ -维不可约表示空间。根据 (22.13) 得出

$$\begin{aligned} \left((u^{(j)})'\right)^m &= \frac{\left((u')^1\right)^{j+m} \left((u')^2\right)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \\ &= \frac{(au^1 - \bar{b}u^2)^{j+m} (bu^1 + \bar{a}u^2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \sum_{p=0}^{j+m} \binom{j+m}{p} (au^1)^{j+m-p} (-\bar{b}u^2)^p \\ &\quad \times \sum_{q=0}^{j-m} \binom{j-m}{q} (bu^1)^{j-m-q} (\bar{a}u^2)^q \\ &= \sum_{p=0}^{j+m} \sum_{q=0}^{j-m} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{(p!)(j+m-p)!q!(j-m-q)!} (-1)^p a^{j+m-p} (\bar{b})^p b^{j-m-q} (\bar{a})^q \\ &\quad \times (u^1)^{2j-(p+q)} (u^2)^{p+q} \\ &= \sum_{p=0}^{j+m} \sum_{q=0}^{j-m} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')(j-m')}}{(p!)(j+m-p)!(j-m'-p)!(p+m'-m)!} (-1)^p \\ &\quad \times a^{j+m-p} (\bar{a})^{j-m'-p} (\bar{b})^p b^{p+m'-m} \frac{(u^1)^{j+m'} (u^2)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}}, \end{aligned} \quad (22.17)$$

其中, 在最后一个等号, 我们已经设 $m' \equiv j - (p+q)$ 。当 p 和 q 假设各种允许值 (由上面的双求和上限表示) 时, m' 的范围超过 $2j+1$ 个值 $j, j-1, \dots, -j+1, -j$ 。Table 22.1 显示了 $j=2, m=1$ 的情况。对于这种情况, 双求和 $\sum_{p=0}^3 \sum_{q=0}^1$ 可以被重写为 m' 和 p 的双求和,

Table 22.1

p	0	0	1	1	2	2	3	3
q	0	1	0	1	0	1	0	1
p+q	0	1	1	2	2	3	3	4
m'	2	1	1	0	0	-1	-1	-2

其中值的可能组合是:

$$m' = -2, p = 3; m' = -1, p = 2, 3; m' = 0, p = 1, 2; m' = 1, p = 0, 1; m' = 2, p = 0.$$

一般地, (22.17) 中的双求和可以重写成

$$\sum_{m'=-j}^j \sum_{p=\underline{p}}^{\bar{p}},$$

其中, 对于一个确定的 m' , p 的范围由下式给出

$$p = \max\{0, m - m'\}, \quad \bar{p} = \min\{j - m', j + m'\}. \quad (22.18)$$

练习 22.2 对于 $j = 2, m = 1$ 的情况验证上述断言; 并且对于一般情况也验证上述断言。

方程 (22.25), (22.16) 和 (22.17) 意味着不可约幺正表示 $D^{(j)}(g)$ 有由下式给出的矩阵元素

$$\begin{aligned} (D^{(j)})_{m'}^m = & \sum_{p=\underline{p}}^{\bar{p}} \frac{(-1)^p \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')(j-m')}}{p!(j+m-p)!(j-m'-p)!(p+m'-m)!} \\ & \times a^{j+m-p} (\bar{a})^{j-m'-p} (\bar{b})^p b^{p+m'-m}, \end{aligned} \quad (22.19)$$

其中, $\underline{p}$ 和 $\bar{p}$ 由 (22.18) 给出。

让我们立刻将这种一般公式应用到 $j = \frac{1}{2}$ 情况。我们可以看到

$$\left(D^{(\frac{1}{2})}\right)_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = a, \quad \left(D^{(\frac{1}{2})}\right)_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} = b, \quad \left(D^{(\frac{1}{2})}\right)_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\bar{b}, \quad \left(D^{(\frac{1}{2})}\right)_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} = \bar{a}.$$

因此

$$D^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = g, \quad (22.20)$$

正如所料。

练习 22.3 运用 (22.19) 的结果来说明

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} (D^{(1)})_1^1 & (D^{(1)})_1^0 & (D^{(1)})_1^{-1} \\ (D^{(1)})_0^1 & (D^{(1)})_0^0 & (D^{(1)})_0^{-1} \\ (D^{(1)})_{-1}^1 & (D^{(1)})_{-1}^0 & (D^{(1)})_{-1}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & \sqrt{2}ab & b^2 \\ -\sqrt{2}a\bar{b} & |a|^2 - |b|^2 & \sqrt{2}\bar{a}b \\ \bar{b}^2 & -\sqrt{2}a\bar{b} & \bar{a}^2 \end{pmatrix}. \quad (22.21)$$

验证 $\det(D^{(1)}) = 1$ 和 $(D^{(1)})^\dagger$ 。

在确定了 $SU(2)$ 的不可约表示之后, 回忆起: 由 (11.19) 给出的群同态 $\phi|_{SU(2)}$ 是从 $SU(2)$ 到 $SO(3)$ 的二对一的满射, 随后得到 $SO(3)$ 的不可约表示。假设对于某个确定的 $g \in SU(2)$, $\phi(g) = \phi(-g) = R \in SO(3)$ 。对于 $(u^1, u^2) \in \mathbb{C}^2$, 令

$$\left((u')^1, (u')^2\right) = (u^1, u^2) g, \quad (22.22)$$

$$\left((u'')^1, (u'')^2\right) = (u^1, u^2) (-g) = (-u^1, -u^2) g. \quad (22.23)$$

则从 (22.15) 和 (22.16) 有

$$\left((u^{(j)})'\right)^m = (D^{(j)}(g))_{m'}^m (u^{(j)})^{m'} = \sum_{m'} (D^{(j)}(g))_{m'}^m \frac{(u^1)^{j+m'} (u^2)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')(j-m')}}}, \quad (22.24)$$

$$\begin{aligned} \left((u^{(j)})''\right)^m &= (D^{(j)}(-g))_{m'}^m (u^{(j)})^{m'} \\ &= \sum_{m'} (D^{(j)}(g))_{m'}^m \frac{(-u^1)^{j+m'} (-u^2)^{j-m'}}{\sqrt{(j+m')(j-m')}} \\ &= (-1)^{2j} \sum_{m'} (D^{(j)}(g))_{m'}^m (u^{(j)})^{m'}. \end{aligned} \quad (22.25)$$

因此, 对于 $2j =$ 一个偶数, $D^{(j)}$ 可以考虑成一个 $SO(3)$ 的单值表示. 这种表示不过是以下面的 Young 图为特征的 $(2j+1)$ -维张量表示

$$\overbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline \end{array}}^{j \text{ 个方格}}$$

[见 (21.50) 前面的讨论]. 对于 $2j =$ 奇数, $D^{(j)}$ 不能简化为张量表示. 在这种情况下, 它被称为**旋量表示 (spinor representation)**, 并且是双值的. 在物理学中, 旋量表示描述了半整数自旋的基本粒子, 比如电子, 其自旋 $j = \frac{1}{2}$.

R 术语 $SO(3)$ 的“旋量表示”, 以及表示的“单值”和“双值”, 在物理学文献中更常用. 严格地说, 所有 $D^{(j)}$ 都是 $SU(2)$ 的表示, 而对于 $j = 0, 1, 2, \dots$ 的 $D^{(j)}$ 是 $SO(3)$ 的表示.

让我们对于任意旋转 $R \in SO(3)$ 计算旋量表示 $D^{(\frac{1}{2})}(R)$. 根据 Euler 定理 (定理 6.3), $\mathbb{R}^3$ 中的每个旋转 R 可以写成 $R = R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)$. 然后从 (11.55), (11.56) 和 (22.20) 得出 $j = \frac{1}{2}$ 的旋量表示的两个值由 $\pm D^{(\frac{1}{2})}$ 给出, 其中

$$\begin{aligned} D^{(\frac{1}{2})}(R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)) &= \exp\left(-i\frac{\phi}{2}\sigma_3\right) \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\sigma_2\right) \exp\left(-i\frac{\psi}{2}\sigma_3\right) \\ &= \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\phi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\phi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\psi}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\psi}{2}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (22.26)$$

或者上面三个矩阵的乘积

$$\begin{aligned} &D^{(\frac{1}{2})}(R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)) \\ &= \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\phi}{2}) \cos\frac{\theta}{2} \exp(-i\frac{\psi}{2}) & -\exp(-i\frac{\phi}{2}) \sin\frac{\theta}{2} \exp(i\frac{\psi}{2}) \\ \exp(i\frac{\phi}{2}) \sin\frac{\theta}{2} \exp(-i\frac{\psi}{2}) & \exp(i\frac{\phi}{2}) \cos\frac{\theta}{2} \exp(i\frac{\psi}{2}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22.27)$$

请注意, 它应该是形式 (22.20)。

对 Euler 定理证明 (定理 6.3) 的回顾表明: $D^{(\frac{1}{2})}(\phi, \theta\psi)$ 表示旋转 $R = g'g, g', g \in SO(3)$, 其中 g' 是单位向量轴 $\hat{n}$ 通过单位球面上的点 (θ, ϕ) 旋转角度 ψ , 并且 $g = R_3(\phi)R_2(\theta)$ 。因此

$$R_{\hat{n}}(\psi) = Rg^{-1} = gR_3(\psi)g^{-1}. \quad (22.28)$$

设 $\psi = 2\pi$ 和 4π , 并运用 (11.56), 我们看到

$$D^{(\frac{1}{2})}(R_{\hat{n}}(2\pi)) = -e, \quad D^{(\frac{1}{2})}(R_{\hat{n}}(4\pi)) = e, \quad (22.29)$$

其中, e 是 $SU(2)$ 中的恒元。因此, 2-分量旋量 (描述自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子) 在绕 $\mathbb{R}^3$ 中的任何轴旋转 2π 下改变符号, 但在旋转 4π 下是不变的。这是自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子的量子力学表述中的一个重要特征。

可以类似地计算出 $j = 1$ (向量) 表示 [通过使用 (22.21)]。我们在回顾 (11.55) 和 (11.56) 时, 有

$$D^{(1)}(R_3(\phi)) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad (22.30)$$

[和对于 $D^{(1)}(R_3(\psi))$ 类似的一个表达式]

$$D^{(1)}(R_2(\theta)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \\ \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) & \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \end{pmatrix}. \quad (22.31)$$

通过乘以上述 3×3 矩阵, 我们可以得到: 对于 $\mathbb{R}^3$ 中的一般旋转, 有

$$D^{(1)}(R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)) = D^{(1)}(R_3(\phi))D^{(1)}(R_2(\theta))D^{(1)}(R_3(\psi)). \quad (22.32)$$

练习 22.4 验证 (22.30) 和 (22.31)。

高阶 ($j > 1$) 表示直接被给出通过在下式中运用 (22.19)

$$D^{(j)}(R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)) = D^{(j)}(R_3(\phi))D^{(j)}(R_2(\theta))D^{(j)}(R_3(\psi)), \quad (22.33)$$

其中, Cayley-Klein 参数 (a, b) 在 (22.19) 中被用作为

$$\begin{aligned} D^{(j)}(R_3(\phi)) : \quad & a = e^{-i\frac{\phi}{2}}, \quad b = 0; \\ D^{(j)}(R_2(\theta)) : \quad & a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad b = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right); \\ D^{(j)}(R_3(\psi)) : \quad & a = e^{-i\frac{\psi}{2}}, \quad b = 0. \end{aligned} \quad (22.34)$$

由于 $D^{(1)}(R_3(2\pi)) = e \in SO(3)$, (22.28) 意味着: 在 $D^{(1)}$ 的表示空间中一个向量, 不同于旋量, 在任意轴旋转 2π 下是不变的, 如预期的那样。

练习 22.5 运用 (22.19) 来直接验证

$$(D^{(j)}(R_3(\phi)))_{m'}^m = \delta_{m'm} e^{-im\phi}, \quad (22.35)$$

其中, $m, m' = j, j-1, \dots, -j+1, -j$.

练习 22.6 运用上面练习中的结果来直接说明: 所有 $D^{(j)}$ 矩阵是么模矩阵, 即:

$$\det [D^{(j)}(R_{\hat{n}})] = 1. \quad (22.36)$$

由于 $D^{(j)}$ 是么正的, 我们有

$$\begin{aligned} (D^{(j)}(R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)))^\dagger &= (D^{(j)}(R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)))^{-1} \\ &= D^{(j)}(R_3(-\psi)R_2(-\theta)R_3(-\phi)). \end{aligned} \quad (22.37)$$

练习 22.5[(22.35)] 的结论表明: $R_3(\phi)$ 定义一个 hermitian 算符 J^3 由下式给出

$$R_3(\phi) = \exp(-i\phi J^3), \quad (22.38)$$

使得: 在 $D^{(j)}$ 的表示中, J^3 是一个对角化并且由下式给出

$$(J^3)_{m'}^m = \delta_{m'm} m.$$

等价地,

$$J^3|jm\rangle = m|jm\rangle, \quad (22.39)$$

其中, $|jm\rangle$ 是由 (22.9) 给出。

我们从 (4.39) 回忆: J^3 与 Lie 代数 $SO(3)$ 的基 $\{J_i^j\}$ 有关。事实上,

$$J^3 = -iJ_1^2, \quad J^1 = -iJ_2^3, \quad J^2 = -iJ_3^1. \quad (22.40)$$

这些正是 Chapter 4 研究的角动量算符。我们现在可以写 [类似于 (4.21)]

$$R_{\hat{n}}(\theta) = \exp(-i\theta \hat{n} \cdot \mathbf{J}), \quad (22.41)$$

其中, $\mathbf{J} = (J^1, J^2, J^3)$ 是作用于所有 $SO(3)$ 的不可约表示空间 $D^{(j)}$ (张量和旋量) 的 hermitian 算符。(在物理学文献中, 符号 $\mathbf{L}$ 通常保留用于轨道角动量, 而 $\mathbf{J}$ 表示总角动量, 轨道和自旋)。

复共轭表示 $\overline{D^{(j)}}$ 可以表示为等价于 $D^{(j)}$ 。首先要注意的是

$$\begin{aligned}
 \overline{D^{(j)}}(R_3(\psi)) &= \left((D^{(j)})^\dagger \right)^T (R_3(\psi)) \\
 &= \left((D^{(j)})^{-1} (R_3(\psi)) \right)^T \\
 &= \left(D^{(j)} (R_3(-\psi)) \right)^T \\
 &= D^{(j)} (R_3(-\psi)) \\
 &= D^{(j)} (\exp(-i(-\psi)\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{J})) \\
 &= D^{(j)} (\exp(-i\psi(-\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{J})) \\
 &= D^{(j)} (R_{-\mathbf{e}_3}(\psi)) \\
 &= D^{(j)} \left(R_2(\pi) R_3(\psi) (R_2(\pi))^{-1} \right) \\
 &= D^{(j)} (R_2(\pi)) D^{(j)} (R_3(\psi)) (D^{(j)} (R_2(\pi)))^{-1},
 \end{aligned} \tag{22.42}$$

第四个等号位置来自于事实： J^3 是对角化的 [c.f. (22.39)] 和引理 6.1 中的第八个。从 (22.19) 和 (22.34)，我们看到 $D^{(j)}(R_2(\theta))$ 是实的（因为 a 和 b 对于这个旋转都是实的）。因此，类似于 (22.42)，

$$\overline{D^{(j)}}(R_2(\theta)) = D^{(j)}(R_2(\theta)) = D^{(j)}(R_2(\pi)) D^{(j)}(R_2(\theta)) (D^{(j)}(R_2(\pi)))^{-1}, \tag{22.43}$$

其中，最后的等号来自于 $R_2(\pi)$ 不旋转 $\mathbf{e}_2$ 的事实。然后从 (22.42) 和 (22.43) 得出

$$\begin{aligned}
 \overline{D^{(j)}}(R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)) &= \overline{D^{(j)}}(R_3(\phi)) \overline{D^{(j)}}(R_2(\theta)) \overline{D^{(j)}}(R_3(\psi)) \\
 &= D^{(j)}(R_2(\pi)) D^{(j)}(R_3(\phi)) D^{(j)}(R_2(\theta)) D^{(j)}(R_3(\psi)) (D^{(j)}(R_2(\pi)))^{-1} \\
 &= D^{(j)}(R_2(\pi)) D^{(j)}(R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)) (D^{(j)}(R_2(\pi)))^{-1}.
 \end{aligned} \tag{22.44}$$

在物理学文献中，经常使用下面的符号：

$$d^{(j)}(\theta) \equiv D^{(j)}(R_2(\theta)), \tag{22.45}$$

并且矩阵 $D^{(j)}$ 被称为**旋转矩阵 (rotation matrices)**。运用 (22.35)， $D^{(j)}$ 可以用 $d^{(j)}(\theta)$ 表示为

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 (D^{(j)}(R_3(\phi)R_2(\theta)R_3(\psi)))_{m'}^m &= \langle jm | D^{(j)}(R) | jm' \rangle \\
 &= e^{-im\phi} (d^{(j)}(\theta))_{m'}^m e^{-im'\psi},
 \end{aligned}
 } \tag{22.46}$$

其中，根据 (22.19)，有

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 (d^{(j)}(\theta))_{m'}^m &= \sum_{p=\bar{p}}^{\bar{p}} \frac{(-1)^p \sqrt{(j+m)(j-m)(j+m')(j-m')}}{p!(j+m-p)!(j-m'-p)!(p+m'-m)!} \\
 &\quad \times \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{2j+m-m'-2p} \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)^{2p+m'-m},
 \end{aligned}
 } \tag{22.47}$$

并且求和中的 p 的范围由 (22.18) 给出, (这等价于要求: 方程中的阶乘具有正整数阶乘的含义)。

练习 22.7 证明对于 $d^{(j)}(\theta)$ 有下面的对称关系:

$$(d^{(j)}(\theta))_{m'}^m = (d^{(j)}(-\theta))_m^{m'} = (d^{(j)}(\theta))_{-m'}^{-m} (-1)^{m-m'} . \quad (22.48)$$

我们现在想运用群特征标的属性来进一步研究 $S(3)$ 的不可约表示。回想一下群特征标的正交性定理 (定理 18.6), 这是参照有限群描述的。对于无限紧致群 [其中 $SU(2)$ 是一个例子], 需要在群流形上定义积分来代替群元素之和。所需的积分测度必须推广到下面有限群不变性要求: 对于任意 $h \in G$, 有

$$\sum_{g \in G} f(g) = \sum_{g \in G} f(h^{-1}g) \quad (22.49)$$

其中, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ 是 G 上的连续函数。因此

$$\int_G dg f(g) = \int_G dg f(h^{-1}g) . \quad (22.50)$$

这个测度被称为 **Haar 测度 (Haar measure)**。它的定义用差分形式书写最为简洁 (参见 Chapter 30): 对于 n -维群流形的 Haar 测度是在 G 上的不变 n -型 Ω (体积形式)。形式 Ω 被认为是不变的, 如果它满足: 对于任意 $h \in G$, 有

$$(L_{h^{-1}})^* \Omega = \Omega , \quad (22.51)$$

其中, $L_{h^{-1}}: G \rightarrow G$ 是左乘以 h^{-1} , 而是 $(L_h)^*$ 由 L_h 引出的拉回映射。这些微分几何概念将在后面的章节中详细解释。现在我们只给出 $S(3)$ 的结论

$$\Omega = \frac{1}{8\pi^2} \sin \theta d\theta \wedge d\phi \wedge d\psi , \quad (22.52)$$

其中, $\wedge$ 是外积 (见 Chapter 28), 并且 $1 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi, \psi \leq 2\pi$, 是 (22.27) 中的角度。选择常数 $\frac{1}{8\pi^2}$, 使得群体积归一化为 1:

$$\int_G \Omega = 1 . \quad (22.53)$$

定理 18.6 对紧致群的情况的推广则给出了

定理 22.1 — 紧致群的性质的正交性 (Orthonormality of Characters of a Compact Group).

$$\int_G \Omega \overline{\chi_{(\mu)}(g)} \chi_{(\nu)}(g) = \delta_{\mu\nu} . \quad (22.54)$$

我们将不会在这里证明这个定理。在上面的方程中, μ 和 ν 是表示指标。因此, 对于任意表示, 特征标字符 $\chi_{(\mu)}(g)$ 都是一个平方可积类的函数 (仅取决于等价类):

$$\int_G \Omega |\chi_{(\mu)}(g)|^2 = 1 . \quad (22.55)$$

事实上, 我们有下面重要的结论 (表述而没有证明):

定理 22.2 紧致群 G 的不可约表示的特征标 $\chi_{(\mu)}(g)$ 组成平方可积类函数的 *Hilbert* 空间的标准正交基。

在这一点上, 值得在紧致 Lie 群的不可约表示上表述几个基本和有用的结果。这些都是关于有限群的对应定理的推广, 并且取决于 Haar 测度的概念。(这些定理的证明超出了本书的范围)。

定理 22.3 紧致 Lie 群的每个连续有界表示等价于么正表示。

定理 22.4 紧致 Lie 群的所有连续么正不可约表示都是有限维的。

定理 22.5 — 紧致群的不可约表示的正交性 (Orthonormality of Irreducible Representations of a Compact Group).

$$N_{(\mu)} \int_G \Omega \left(D_{(\mu)}^\dagger(g) \right)_i^k \left(D_{(\nu)}(g) \right)_l^j = \delta_{\mu\nu} \delta_i^j \delta_l^k . \quad (22.56)$$

定理 22.6 — Peter-Weyl 定理 (Peter-Weyl Theorem). 紧致群 G 上的平方可积函数的 *Hilbert* 空间, 用 $L^2(G)$ 表示, 分解为 G 的不可约表示的直和, 每个都是有限维。等价地, 任意 $f(g) \in L^2(G)$ 都可以扩展为

$$f(g) = \sum_{\mu, i, j} (C_{(\mu)})_i^j \left(D_{(\mu)}(g) \right)_i^j , \quad (22.57)$$

其中, μ 标记不可约表示和 $(C_{(\mu)})_i^j \in \mathbb{C}$; 并且

$$\int_G \Omega |f(g)|^2 = \sum_{\mu, i, j} \left| (C_{(\mu)})_i^j \right|^2 . \quad (22.58)$$

作为使用上述定理的一个例子, 考虑群 (循环群):

$$U(1) = \{ e^{i\theta} | 0 \leq \theta \leq 2\pi \} , \quad (22.59)$$

它们作用在 $z \in \mathbb{C}$ 是由下式给出

$$z \rightarrow z' = e^{i\theta} z . \quad (22.60)$$

这个群显然是紧致的, 也是 Abel 的。因此, 根据推论 18.1, 其不可约表示都是一维的。这些是由下式给出

$$D_{(\mu)}(\theta) = e^{i\mu\theta} , \quad (22.61)$$

其中, $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。对于 μ 的积分值被下面事实要求

$$D_{(\mu)}(\theta + 2\pi) = D_{(\mu)}(\theta) .$$

不变体积元素 (Haar 测度) 很简单由下式给出

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} d\theta . \quad (22.62)$$

因此, 应用于 $U(1)$ 的正交性表示定理 (定理 22.5) 给出

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\mu\theta} e^{i\nu\theta} = \delta_{\mu\nu} , \quad (22.63)$$

其中, $\mu, \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。这是 Fourier 级数理论中常见的结论 [c.f. (14.5)]。由于所有 $D_{(\mu)}(\theta)$ 都是一维的, $\chi_{(\mu)}(\theta) = D_{(\mu)}(\theta)$, 并且特征标正交性定理产生完全相同的结果。最后, 应用于 $U(1)$ 的 Peter-Weyl 定理给出了 Fourier 级数理论的中心结论:

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}} ,$$

[c.f. (14.7)], 其中 $f(\theta) \in L^2(U(1))$ 。

现在让我们计算 $SO(3)$ 的不可约特征标 $\chi_{(\mu)}$ 。我们首先注意到 (参见练习 6.3) 所有相同角度 ϕ (关于任何轴) 的旋转属于 $SO(3)$ 中的相同等价类。因此, $\chi_{(\mu)}$ 仅是 ϕ 的函数。表示指标 μ 由 $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ 给出, 则设 $\mathbb{V}^{(j)}$ 为不可约表示空间, $D^{(j)}$ 为么正表示 (维度为 $2j+1$), 对应于一个特定的 j 。通过我们先前的结论, $\mathbb{V}^{(j)}$ 分解为 $D^{(j)}$ 的 $(2j+1)$ 个一维特征空间的直和。实际上, 通过 (22.38), $2j+1$ 个特征值由下式给出: 对于某些 $0 \leq \phi \leq \pi$ 。

$$e^{-ij\phi}, e^{-i(j-1)\phi}, \dots, e^{-i(-j+1)\phi}, e^{-i(-j)\phi} ,$$

因此

$$\chi^{(j)}(\phi) = \sum_{m=-j}^j e^{-im\phi} . \quad (22.64)$$

举例

$$\begin{aligned} \chi^{(0)}(\phi) &= 1 , \\ \chi^{(\frac{1}{2})}(\phi) &= e^{-i\frac{\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi}{2}} = 2 \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) , \\ \chi^{(1)}(\phi) &= e^{-i\phi} + e^{i\phi} + 1 = 1 + 2 \cos \phi . \end{aligned} \quad (22.65)$$

练习 22.8 说明

$$\chi^{(j)}(\phi) = \frac{\sin \left(j + \frac{1}{2} \right) \phi}{\sin \frac{\phi}{2}} , \quad (22.66)$$

其中, $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ 。

练习 22.9 运用由 (22.27) 给出的 $D^{(\frac{1}{2})}(\phi, \theta, \psi)$ 的显式表达式对于 $j = \frac{1}{2}$ 直接验证定理 22.4。

练习 22.10 运用 (22.27) 对于 $j = \frac{1}{2}$ 直接验证定理 22.5。

我们可以对特征标 χ_j 运用我们的公式来确定积表示 $D^{(j_1)} \times D^{(j_2)}$ 的 Clebsch-Gordon 分解 [c.f. (18.75)]。通过 (18.76) 有

$$\chi^{(j_1 \times j_2)} = \chi^{(j_1)} \chi^{(j_2)}. \quad (22.67)$$

写 $z = e^{i\phi}$, 它从 (22.64) 开始有

$$\chi^{(j)} = z^{-j} + z^{-j+1} + \cdots + z^j = \frac{z^{-j}(1 - z^{2j+1})}{1 - z} = \frac{z^{j+1} - z^{-j}}{z - 1}. \quad (22.68)$$

对于 $j_1 < j_2$, 则我们有

$$\begin{aligned} \chi^{(j_1)}(z) \chi^{(j_2)}(z) &= (z^{-j_1} + \cdots + z^{j_1}) \left(\frac{z^{j_2+1} - z^{-j_2}}{z - 1} \right) \\ &= \frac{z^{j_1+j_2+1} - z^{-(j_1+j_2)}}{z - 1} + \cdots + \frac{z^{j_2-j_1+1} - z^{-(j_2-j_1)}}{z - 1} \\ &= \chi^{(j_1+j_2)} + \chi^{(j_1+j_2-1)} + \cdots + \chi^{(j_2-j_1)}. \end{aligned} \quad (22.69)$$

对于 j_1 和 j_2 的任意值, 因此我们有

$$D^{(j_1)} \times D^{(j_2)} = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} D^{(j)}. \quad (22.70)$$

举例

$$\begin{aligned} D^{(\frac{1}{2})} \times D^{(\frac{1}{2})} &= D^{(0)} + D^{(1)}, \\ D^{(\frac{1}{2})} \times D^{(1)} &= D^{(\frac{1}{2})} + D^{(\frac{3}{2})}, \\ D^{(1)} \times D^{(1)} &= D^{(0)} + D^{(1)} + D^{(2)}, \\ D^{(1)} \times D^{(2)} &= D^{(1)} + D^{(2)} + D^{(3)}, \text{ 等.} \end{aligned} \quad (22.71)$$

方程 (22.70) 是量子力学中角动量相加理论的核心结论。

23. 球谐函数

球谐函数是在单位球面 (在 $\mathbb{R}^3$) 上定义的函数, 并作为如下 **Laplace 方程** (Laplace's equation) 的解:

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (23.1)$$

我们将在本章中看到它们也是 $SO(3)$ 的确定不可约表示空间中的基向量, 并且实际上构成了在单位球上定义的平方可积函数的一组基。我们从 $SU(2)$ 的不可约表示开始。

考虑

$$g(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \in SU(2).$$

我们前面的结论 [(22.35)] 说明

$$(D_{(j)}(g(\theta)))_{m'}^m = \delta_{mm'} e^{-2im\theta}, \quad (23.2)$$

其中, $m, m' = j, j-1, \dots, -j$ 。参数 2θ 出现在分量中因为在由 (11.19) 给出的群同态 $\phi: SU(2) \rightarrow SO(3)$ 下, $g(\theta)$ 对应于旋转 $R_3(2\theta)$ [c.f. (11.33)]。很明显, $\exp(2ij\theta)$ 是 $D_{(j)}(g(\theta))$ 的一个特征值, 它是 $SU(2)$ 的一个 $(2j+1)$ -维表示。我们可以建立如下事实, 将仅被表述而不证明 (S. Sternberg 1995)。

引理 23.1 如果 D 是 $SU(2)$ 的一个 $(2j+1)$ -维表示使得 $\exp(2ij\theta)$ 出现为 $D(g(\theta))$ 的一个特征值, 其中 $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, 并且 $g(\theta) \in SU(2)$ 如上给出, 则 D 等价于 $D_{(j)}$ 的不可约表示。

现在让我们回忆, 通过 (22.25) 和其下面的讨论, 如果 j 是一个整数 ≥ 0 , 则对于任意 $g \in SU(2)$, 有

$$D_{(j)}(g) = D_{(j)}(-g). \quad (23.3)$$

由于 $\phi(g) = \phi(-g) \in SO(3)$, 其中 $\phi: SU(2) \rightarrow SO(3)$ 是 (11.9) 的同态, 对于 $SO(3)$ 的表示定义为

$$(D')_{(j)}(R) \equiv D_{(j)}(\phi^{-1}(R)) , \quad (23.4)$$

对于 $j = 0, 1, 2, \dots, R \in SO(3)$, 提供 $SO(3)$ 的所有不可约表示。根据物理学文献中的时间, 我们仍将在后续的发展中对于非负整数 j , 将 $(D')_{(j)}$ 标记为 $D_{(j)}$ 。

很容易看出 Laplace 算符 ∇^2 与所有 Euclidean 运动 (旋转加平移) 对易, 特别是它与所有旋转对易。因此, 对于一个表示 $D: SO(3) \rightarrow \mathcal{U}(L^2(S^2))$, [其中 $L^2(S^2)$ 是在单位球面 S^2 上所有平方可积函数的空间, 并且 $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的一群么正变换] 使得: 对于 $R \in SO(3)$, 有

$$D(R)\psi(\mathbf{r}) = \psi(R^{-1}\mathbf{r}) , \quad (23.5)$$

[c.f. (18.6)], 我们有

$$(\nabla^2 D(R))\psi(\mathbf{r}) = D(R)\nabla^2\psi(\mathbf{r}) . \quad (23.6)$$

用球极坐标写 ∇^2 [见 (31.45)]:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_S^2 , \quad (23.7)$$

其中

$$\nabla_S^2 \equiv \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} , \quad (23.8)$$

我们进一步看到 (23.7) 中的三项中的每项都和 $D(R)$ 对易。特别是, 对于任意 $R \in SO(3)$, **球形 Laplace 算符 (spherical Laplacian)** ∇_S^2 与 $D(R)$ 对易:

$$(\nabla_S^2 D(R))\psi(\mathbf{r}) = D(R)\nabla_S^2\psi(\mathbf{r}) . \quad (23.9)$$

练习 23.1 显式说明: 对于任意 $R \in SO(3)$, ∇^2 , $\frac{\partial^2}{\partial r^2}$, $(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r})$ 和 ∇_S 都与 $D(R)$ 对易, 其中 $D(R)$ 的作用由 (23.5) 给出。

令 P^k 表示 $\mathbb{R}^3$ 上具有复系数的 k 阶齐次多项式的空间。举例

$$P^0 = \text{span}\{1\} , \quad P^1 = \text{span}\{x, y, z\} , \quad P^2 = \text{span}\{x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz\} .$$

一般地, $p^k(x, y, z) \in P^k$ 可以被写成

$$p^k(x, y, z) = \sum_{i=0}^k p^i(x, y) z^{k-i} , \quad (23.10)$$

其中, $p^i(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上复数值的 i 阶齐次多项式。很明显从二项式展开

$$(x+y)^i = \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} x^r y^{i-r} \quad (23.11)$$

有 p^i 属于维度为 $i+1$ 的空间。因此, (23.10) 意味着

$$\dim(P^k) = 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \quad (23.12)$$

空间 P^k , 在 $SO(3)$ 下不变, 构成 $SO(3)$ 的表示空间。然而, 它不是不可约的。实际上, 考虑由一个子空间 $H^k \subset P^k$ 定义为

$$H^k \equiv \ker(\nabla^2). \quad (23.13)$$

H^k 被称为 k 阶调和多项式 (harmonic polynomial) 的空间。除了在物理应用中经常出现之外, 它在分析和几何中也是至关重要的。我们有以下基本定理。

定理 23.1 在 $\mathbb{R}^3$ 上的 k 阶复数值多项式的空间 H^k 提供了 $SO(3)$ 不可约表示, 其等价于 D_k [c.f. (23.4) 及它后面的讨论]。

证明: 首先注意到, 通过 (23.6) 和 (23.1), H^k 明显地在 $SO(3)$ 下不变。所以, 它为 $SO(3)$ 提供了一个表示空间。这种表示记为 $D: SO(3) \rightarrow \mathcal{U}(H^k)$ 。则我们注意到 Laplace 算符 $\nabla^2: P^k \rightarrow P^{k-2}$ 是一个满射, 即: $P^{k-2} = \text{Im}(\nabla^2)$ 。在定理 17.3 [方程 (17.10)] 和 (23.12) 之后有

$$\dim(H^k) = \dim(\ker(\nabla^2)) = \dim(P^k) - \dim(P^{k-2}) = 2k + 1. \quad (23.14)$$

现在

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (23.15)$$

和

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x + iy)^k = k(x + iy)^{k-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (x + iy) = 0. \quad (23.16)$$

因此

$$\nabla^2(x + iy)^k = 0, \quad (23.17)$$

意味着

$$(x + iy)^k \in H^k. \quad (23.18)$$

另一方面, 从 (11.33) 和 (11.32) 后面的讨论中, $(x + iy)^k$ 是 $D(g(\theta))$ 的一个特征值为 $\exp(2ik\theta)$ 的特征向量。从引理 23.1 得到 D 等价于不可约表示 $D_{(k)}$ 。□

为了进一步减少 P^k 的不可约分量, 我们需要下面的事实, 将只表述而不证明。

引理 23.2 对于 $l = 0, 1, 2, \dots$, 有

$$P^l = H^l \oplus r^2 P^{l-2}, \quad (23.19)$$

其中, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。

上面引理的特殊情况是:

$$P^0 = H^0 = \text{常数} \in \mathbb{C}, \quad P^1 = H^1, \quad P^2 = H^2 \oplus \{r^2\}. \quad (23.20)$$

最后一个方程来自于总是可以将 P^2 中的一般多项式表述如下的事实:

$$\begin{aligned} ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = & \left(\frac{a+b+c}{3} \right) (x^2 + y^2 + z^2) \\ & + \left\{ a - \left(\frac{a+b+c}{3} \right) \right\} x^2 + \left\{ b - \left(\frac{a+b+c}{3} \right) \right\} y^2 + \left\{ c - \left(\frac{a+b+c}{3} \right) \right\} z^2 \\ & + dxy + exz + fyz, \end{aligned} \quad (23.21)$$

其中, $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$, 并且

$$H^2 = \{ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz | a + b + c = 0\}. \quad (23.22)$$

作为引理 23.1 的结果, P^l 分解为不可约子空间如下:

$$P^l = H^l \oplus r^2 H^{l-2} \oplus r^4 H^{l-4} \oplus \dots. \quad (23.23)$$

由于调和函数 H^l 都是 l 阶齐次多项式, 因此任何函数 $f^{(l)}(x, y, z) \in H^l$ 都可以用球极坐标表示为

$$f^{(l)}(x, y, z) = r^l Y_l(\theta, \phi). \quad (23.24)$$

函数 $Y_l(\theta, \phi)$ 被称为 l 阶**球谐函数** (spherical harmonics), 并且定义在单位球面上。运用 (23.7) 和 (23.8), 我们有

$$0 = \nabla^2 f^{(l)} = r^{l-2} \{ \nabla_S^2 Y_l + l(l-1)Y_l + 2lY_l \}, \quad (23.25)$$

这意味着

$$\nabla_S^2 Y_l = -l(l+1)Y_l. \quad (23.26)$$

令 $\tilde{H}^l$ 表示由球谐函数 Y_l 生成的空间。从 (23.14) 有

$$\dim(\tilde{H}^l) = 2l + 1. \quad (23.27)$$

$\tilde{H}^l$ 的一组标准基由 $D_{(l)}(g(\frac{\phi}{2}))$ 或者 $D_{(l)}(R_3(\phi))$ [c.f. (22.38)] 的特征向量组成, 其中 $g(\phi)$ 由 (23.1) 给出。对于 $l = 1$, 很容易看出它们与 $x + iy, x - iy$ 和 z 成比例, 特征值分别为 $\exp(2i\theta), \exp(-2i\theta)$ 和 1。我们选择下面的函数 $Y_1^m, m = 1, 0, -1$, 当在单位球面上积分时, 它们被 L^2 -归一化为 1:

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{x + iy}{r} \right), \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r}, \quad Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{x - iy}{r} \right). \quad (23.28)$$

它们组成 $\tilde{H}^1$ 的一组基, 1 阶球谐函数空间。对于任意 $l (= 0, 1, 2, \dots)$, $\tilde{H}^l$ 是由归一化函数 $Y_l^m, m = l, l-1, \dots, -l$, 它们与下面的多项式成比例

$$\frac{(x + iy)^l}{r^l}, \frac{(x - iy)^l}{r^l}, \frac{z^l}{r^l}, \frac{(x + iy)^{l-1}(x - iy)}{r^l}, \dots$$

回忆旋转矩阵 $D_{(l)}(\phi, \theta, \psi)$ 由 (22.46) 给出。球谐函数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ 实际上通过下式与它们

相关:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \overline{(D_{(l)}(\phi, \theta, 0))_0^m}, \quad (23.29)$$

其中, 上面的横线表示复共轭。相关函数是伴随 Legendre 多项式 (associated Legendre polynomials) $P_l^m(\cos \theta)$ 和 Legendre 多项式 (Legendre polynomials) $P_l(\cos \theta)$ 由下式给出

$$P_l^m(\cos \theta) = \sqrt{\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}} (d_{(l)}(\theta))_0^m, \quad (23.30)$$

$$P_l(\cos \theta) = P_l^0(\cos \theta) = (d_{(l)}(\theta))_0^0, \quad (23.31)$$

其中, $(d_{(l)}(\theta))_m^m$ 由 (22.47) 给出。从 (22.46) 得出

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (23.32)$$

$$\begin{aligned} P_l^m(\cos \theta) &= (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{d(\cos \theta)^{|m|}} P_l(\cos \theta) \\ &= \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{|m|}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+|m|}}{d(\cos \theta)^{l+|m|}} (\cos^2 \theta - 1)^l. \end{aligned} \quad (23.33)$$

很容易说明

$$Y_l^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m \overline{Y_l^m(\theta, \phi)}, \quad (23.34)$$

和

$$Y_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \phi),$$

即:

$$Y_l^m(-\hat{n}) = (-1)^l Y_l^m(\hat{n}). \quad (23.35)$$

在物理学术语中, 波函数 Y_l^m 在坐标反转下具有 $(-1)^l$ 的宇称 (parity)。

我们列出了前几个 (低阶) Y_l^m 以供参考。

$$\begin{aligned}
 Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
 Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\
 Y_2^0 &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \\
 Y_1^1 &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, \\
 Y_2^1 &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}, \\
 Y_2^2 &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}, \\
 Y_3^0 &= \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta), \\
 Y_3^1 &= -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1) e^{i\phi}, \\
 Y_3^2 &= \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2 \theta \cos \theta e^{i\phi}, \\
 Y_3^3 &= -\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3 \theta e^{3i\phi}.
 \end{aligned} \tag{23.36}$$

练习 23.2 说明如上面给出的 Y_2^m 和 Y_3^m 可以由 $x + iy, x - iy$ 和 z 的米次的齐次多项式构成。

球谐函数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ 组成量子力学系统的波函数的角度部分, 它是旋转不变的 Hamilton 量的特征函数。现在让我们考虑装备 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_R$ (由可归一化和非可归一化状态组成) 上的 $SO(3)$ 的么正表示, $U_R: SO(3) \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}_R)$ (见 Chapter 18 中的练习 18.1), 以及一个旋转不变的 Hamilton 函数 H 作用于 $\mathcal{H}_R$ 中的状态。 H 的旋转不变性意味着

$$\text{对于任意 } g \in SO(3), \quad [H, U_R(g)] = 0. \tag{23.37}$$

等价地,

$$[H, J^i] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{23.38}$$

其中, J^i 是角动量算符的第 i -分量 [回忆 (22.41)]。 H 的标准正交特征态的集合在 Dirac 符号中标记为 $|Elm\rangle$, 假设可观测量的完备集合是 $\{H, \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}, J^3\}$ 。它们满足

$$H|Elm\rangle = E|Elm\rangle, \tag{23.39}$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}|Elm\rangle = l(l+1)|Elm\rangle, \tag{23.40}$$

$$J^3|Elm\rangle = m|Elm\rangle, \tag{23.41}$$

其中, $l = 0, 1, 2, \dots; m = l, l-1, \dots, -l$ 。对于一个给出能量特征值 E , 这些特征态组成 $SO(3)$ 的一个不可约表示空间, 名为 $D_{(l)}$ 表示。

$|Elm\rangle$ 的 Schrödinger 波函数是 [c.f. (15.11)]

$$\psi_{Elm}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | Elm \rangle = \langle r, \theta, \phi | Elm \rangle . \quad (23.42)$$

现在

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}\rangle &\equiv |r, \theta, \phi\rangle = |R_3(\phi)R_2(\theta)r\hat{z}\rangle \\ &= \exp(-i\phi J^3) \exp(-i\theta J^2) |r, 0, 0\rangle = U_R(\phi, \theta, 0) |r, 0, 0\rangle . \end{aligned} \quad (23.43)$$

因此

$$\psi_{Elm}(\mathbf{x}) = \left\langle r, 0, 0 \left| U_R^\dagger(\phi, \theta, 0) \right| Elm \right\rangle = \left(D_{(l)}^\dagger(\phi, \theta, 0) \right)_m^{m'} \langle r, 0, 0 | Elm' \rangle . \quad (23.44)$$

绕 $\hat{z}$ -轴的旋转一定使得 $|r\hat{z}\rangle$ 不变的。因此

$$\exp(-i\alpha J^3) |r, 0, 0\rangle = |r, 0, 0\rangle , \quad (23.45)$$

或者

$$J^3 |r, 0, 0\rangle = 0 , \quad (23.46)$$

方程 (22.42) 则说明

$$|r, 0, 0\rangle = f_{El}(r) |El0\rangle , \quad (23.47)$$

其中, $f_{El}(r)$ 是 r 的一些 (可归一化) 函数。因此, 我们有

$$\langle r, 0, 0 | Elm \rangle = f_{El}(r) \delta_{m0} , \quad (23.48)$$

并且从 (23.44) 有

$$\psi_{Elm}(\mathbf{x}) = f_{El}(r) \overline{(D_{(l)}(\phi, \theta, 0))_0^m} , \quad (23.49)$$

鉴于 (23.29), 它转化为

$$\boxed{\psi_{Elm}(\mathbf{x}) = \psi_{El}(r) (-1)^m Y_l^m(\theta, \phi)} , \quad (23.50)$$

其中

$$\psi_{El}(r) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} f_{El}(r) . \quad (23.51)$$

上面的 $\psi_{Elm}(\mathbf{x})$ 的一般形式是 Hamilton 量转动对称性的直接结果, 并且独立于势函数 $V(r)$ 的细节。

在旋转 $R \in SO(3)$, $|Elm\rangle$ 变换根据如下

$$|\psi'\rangle = U(R) |Elm\rangle = \sum_{m'} (D_{(l)}(R))_m^{m'} |Elm'\rangle . \quad (23.52)$$

因此

$$\begin{aligned}\psi'(\mathbf{x}) &= \langle \mathbf{x} | \psi' \rangle = \sum_{m'} (D_{(l)}(R))_m^{m'} \langle \mathbf{x} | Elm' \rangle \\ &= \sum_{m'} (D_{(l)}(R))_m^{m'} \psi_{Elm'}(\mathbf{x}) = \sum_{m'} (D_{(l)}(R))_m^{m'} \psi_{El}(r) (-1)^{m'} Y_l^{m'}(\theta, \phi) .\end{aligned}\quad (23.53)$$

在另一方面上,

$$\psi'(\mathbf{x}) = \psi(R^{-1}\mathbf{x}) = \psi_{El}(r) (-1)^m Y_l^m(R^{-1}\hat{x}) , \quad (23.54)$$

因此

$$Y_l^m(R^{-1}\hat{x}) = \sum_{m'} (-1)^{m+m'} (D_{(l)}(R))_m^{m'} Y_l^{m'}(\hat{x}) . \quad (23.55)$$

波函数 $\psi_{Elm}(\mathbf{x})$ 描述无自旋粒子 ($j = 0$) 的状态。对于一个具有自旋 ($j = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$) 的粒子, 装备 Hilbert 空间 $(\mathcal{H}')_R$ 形式为 $|\mathbf{x}, \sigma\rangle, \sigma = j, j-1, \dots, -j$ 的状态, 满足完备性条件

$$\sum_{\sigma=-j}^j \int d^3x |\mathbf{x}, \sigma\rangle \langle \mathbf{x}, \sigma| = 1 . \quad (23.56)$$

在这个空间中 $SO(3)$ 的么正表示由下式给出

$$U(R)|\mathbf{x}, \sigma\rangle = \sum_{\lambda} (D_{(j)}(R))_{\sigma}^{\lambda} |R\mathbf{x}, \lambda\rangle . \quad (23.57)$$

通过运用 (23.56), 一个任意 $|\psi\rangle \in (\mathcal{H}')_R$ 可以表述为

$$|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \int d^3x |\mathbf{x}, \sigma\rangle \langle \mathbf{x}, \sigma | \psi \rangle = \sum_{\sigma} \int d^3x |\mathbf{x}, \sigma\rangle \psi^{\sigma}(\mathbf{x}) , \quad (23.58)$$

其中

$$\psi^{\sigma}(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x}, \sigma | \psi \rangle, \quad \sigma = j, j-1, \dots, -j , \quad (23.59)$$

被称为自旋 j 的不可约域分量 (irreducible field components)。对于 $j = \frac{1}{2}$, 二-分量对象 $(\psi^{\frac{1}{2}}(\mathbf{x}), \psi^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}))$ 被称为在非相对论量子力学中的 **Pauli 自旋波函数 (Pauli spin wave function)**。对于任意 j , 我们有: 在旋转 $R \in SO(3)$ 下,

$$\begin{aligned}|\psi'\rangle &= U(R)|\psi\rangle = \sum_{\sigma} \int d^3x U(R)|\mathbf{x}, \sigma\rangle \psi^{\sigma}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\sigma\lambda} \int d^3x |R\mathbf{x}, \lambda\rangle (D_{(j)}(R))_{\sigma}^{\lambda} \psi^{\sigma}(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{\lambda} \int d^3x |\mathbf{x}, \lambda\rangle \sum_{\sigma} (D_{(j)}(R))_{\sigma}^{\lambda} \psi^{\sigma}(R^{-1}\mathbf{x}) .\end{aligned}\quad (23.60)$$

因此, 在一个旋转 $R \in SO(3)$ 下对于自旋 j 的不可约域分量的变换规则由下式给出

$$\boxed{(\psi')^{\lambda}(\mathbf{x}) = \sum_{\sigma=-j}^j (D_{(j)}(R))_{\sigma}^{\lambda} \psi^{\sigma}(R^{-1}\mathbf{x})} \quad (23.61)$$

其中, $D_{(j)}(R)$ 由 (22.46) 给出。

24. 半单纯 Lie 代数结构

半单纯 Lie 代数 (定义 7.11) 在 Lie 代数的分类中起着重要作用 [c.f. 定理 7.1 (Levi 分解定理)]。它们的代表作为 Lie 群的代表, 在物理应用中也非常重要。

设 $\mathcal{G}$ 是一个 n -维半单纯 Lie 代数, 其基为 $\{e_i\}, i = 1, \dots, n$ 。假设 $A, X \in \mathcal{G}, X \neq 0$ 满足

$$Ad_A X = [A, X] = \alpha X, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (24.1)$$

则 X 是具有特征值 α 的 Ad_A ([c.f. 7.15] 的伴随表示) 的一个特征向量。如果我们写 $A = a^i e_i, X = x^j e_j$, 则 (24.1) 变为

$$a^i x^j [e_i, e_j] = \alpha x^k e_k, \quad (24.2)$$

或者, 用结构常数 c_{jk}^i 写, 依赖于 $\{e_i\}$, 有

$$(a^i c_{ij}^k - \alpha \delta_j^k) x^j = 0. \quad (24.3)$$

由于假设 $X \neq 0$, x^j 并非全为零, 我们得到了久期方程

$$\det |a^i c_{ij}^k - \alpha \delta_j^k| = 0. \quad (24.4)$$

为了继续, 我们需要下面的引理 (将仅表述而不证明)。

引理 24.1 令 $\mathcal{G}$ 是一个半单纯 Lie 代数。如果 $Ad_A, A \in \mathcal{G}$ 有不同特征值 (在所有 $Ad_Y, Y \in \mathcal{G}$ 中) 的最大可能的数, 那么在那些特征值中, 只有零特征值可以是简并的。

定义 24.1 假设 $\mathcal{G}$ 是半单纯 Lie 代数并且 $Ad_A, A \in \mathcal{G}$ 有不同特征值的最大可能的数, 则 Ad_A 的特征值 0 的简并度 m (重数) 被称为 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的秩 (*rank*)。我们写作 $\text{rank}(\mathcal{G}) = m$ 。元素 A 被称为 $\mathcal{G}$ 的正则元素 (*regular element*)。

令 $\mathcal{G}$ 是半单纯 Lie 代数, 秩 $\text{rank}(\mathcal{G}) = m, \dim(\mathcal{G}) = n$ 。则 Ad_A 的 O -特征空间, 其中 A 是 $\mathcal{G}$ 的正则元素, 维度为 m 。令 $\{H_i\}, i = 1, \dots, m$ 是该特征空间的基, 用 $\mathcal{G}_0$ 表示。则

$$Ad_A H_i = [A, H_i] = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (24.5)$$

子空间 $\mathcal{G}_0$ 组成 $\mathcal{G}$ 的 m -维子代数, 称为 $\mathcal{G}$ 的 **Cartan 子代数 (Cartan subalgebra)**。如下所示, $\mathcal{G}_0$ 是 $\mathcal{G}$ 中的最大 Abel 子代数, 使得如果 $H \in \mathcal{G}_0$, Ad_H 是可对角化的。确切来说

$$\begin{aligned} [A, [H_i, H_j]] &= [A, H_i H_j] - [A, H_j H_i] \\ &= [A, H_i] H_j + H_i [A, H_j] + [H_j, A] H_i + H_j [A, H_i] = 0, \end{aligned} \quad (24.6)$$

意味着 $[H_i, H_j] \in \mathcal{G}_0$ 。

现在令 α 非零, 因此根据引理 24.1, Ad_A 的非简并特征值, 有特征向量 E_α :

$$[A, E_\alpha] = \alpha E_\alpha. \quad (24.7)$$

考虑一个元素 $[H_i, E_\alpha] \in \mathcal{G}$ 。我们有

$$\begin{aligned} [A, [H_i, E_\alpha]] &= [A, H_i E_\alpha - E_\alpha H_i] \\ &= [A, H_i E_\alpha] - [A, E_\alpha H_i] \\ &= [A, H_i] E_\alpha + H_i [A, E_\alpha] - [A, E_\alpha] H_i - E_\alpha [A, H_i] \\ &= \alpha H_i E_\alpha - \alpha E_\alpha H_i \\ &= \alpha [H_i, E_\alpha] \end{aligned} \quad (24.8)$$

因此, $[H_i, E_\alpha]$ 也是有特征值 α 的 Ad_A 的特征向量。由于 α 是非简并的, $[H_i, E_\alpha]$ 必须与 E_α 成正比:

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha, \quad i = 1, \dots, m, \quad (24.9)$$

根据定理 17.14(准素分解定理), $\mathcal{G}$ 是 Ad_A 的特征空间的 (向量空间) 直和。因此, 我们可以写

$$A = a^i H_i + \sum_{\alpha} a^{\alpha} E_{\alpha}, \quad (24.10)$$

其中, 第二项求和遍历所有非零特征值 α ; 所以, 通过 (24.9), 有

$$0 = [H_j, A] = a^i [H_j, H_i] + \sum_{\alpha} a^{\alpha} [H_j, E_{\alpha}] = a^i [H_j, H_i] + \sum_{\alpha} \alpha_j a^{\alpha} E_{\alpha}. \quad (24.11)$$

由于对于每个 j 和 α 有 $[H_j, H_i] \in \mathcal{G}_0$ 和 $\alpha_j E_{\alpha} \neq 0$, 对于任意 α 有 $a^{\alpha} = 0$ 。因此

$$A = a^i H_i \in \mathcal{G}_0. \quad (24.12)$$

更进一步由于很明显 a^i 可以不全为零, (24.11) 也意味着

$$[H_i, H_j] = 0. \quad (24.13)$$

方程 (24.7), (24.9) 和 (24.12) 意味着 Ad_A 的非零特征值由下式给出:

$$\alpha = a^i \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m (= \dim(\mathcal{G}_0)) . \quad (24.14)$$

注意到 α 通常是复数, 实际上等于 $\alpha^*(a^i H_i)$, 其中 $\alpha^* = \alpha_i (H^*)^i \in \mathcal{G}_0^*$ 是 $\mathcal{G}_0$ 的对偶空间 $\mathcal{G}_0^*$ 中的一个元素, 并且 $(H^*)^i \in \mathcal{G}_0^*$ 是 H_i 的对偶基向量 [由 $(H^*)^i (H_j) = \delta_j^i$ 给出]. 每个 α 被称为 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的一个**根 (root)**. (函数 α^* 也称为 $\mathcal{G}$ 的根). 从 Jacobi 的恒元 [(4.26)], 我们有

$$[A, [E_\alpha, E_\beta]] + [E_\alpha, [E_\beta, A]] + [E_\beta, [A, E_\alpha]] = 0 . \quad (24.15)$$

从 (24.7) 得出

$$[A, [E_\alpha, E_\beta]] - \beta [E_\alpha, E_\beta] + \alpha [E_\beta, E_\alpha] = 0 ,$$

或者

$$[A, [E_\alpha, E_\beta]] = (\alpha + \beta) [E_\alpha, E_\beta] . \quad (24.16)$$

因此, 如果 E_α 和 E_β 分别是特征值为 α 和 β 的 Ad_A 的特征向量, 则 $[E_\alpha, E_\beta]$ 是零向量 (在这种情况下 $\alpha + \beta$ 不是根), 或特征值为 $\alpha + \beta$ 的 Ad_A 的特征向量. 然后, 如果 $\alpha + \beta = 0$, 即: 如果 $\beta = -\alpha$, (24.5) 意味着

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = c_{\alpha, -\alpha}^i H_i , \quad (24.17)$$

其中, 结构常数中的下标 α 指的是根的特定值而不是数值张量指数. 如果 $\alpha + \beta$ 是非零根, 我们有

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} , \quad (24.18)$$

其中, 常数 $N_{\alpha\beta}$ 可以根据结构常数依赖于 $\mathcal{G}$ 的基 $\{H_i, E_\alpha\}$ 来写为

$$N_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta} . \quad (24.19)$$

接下来我们将说明: 如果 α 是半单纯 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的一个根, 那么 $-\alpha$ 也是 $\mathcal{G}$ 的一个根. 实际上考虑由 Killing 形式 [(8.40)] 给出的 $\mathcal{G}$ 上的对称度量张量 g_{ij} :

$$g_{ij} = c_{ik}^l c_{jl}^k . \quad (24.20)$$

我们将考虑 g_{ij} 和依赖于 $\mathcal{G}$ 的基 $\{H_i, E_\alpha\}$, $i = 1, \dots, m$ 的结构常数, 其中 α 指的是一个根. 到目前为止, 我们的结果表明 (拉丁字母遍历从 1 到 m , 同时希腊字母指的是 $\mathcal{G}$ 的不同的非零根)

$$\begin{aligned} c_{i\alpha}^\sigma &= \alpha_i \delta_\alpha^\sigma, \quad c_{i\alpha}^j = 0, \\ c_{ij}^k &= c_{ij}^\alpha = 0, \\ c_{\alpha\beta}^i &= \begin{cases} c_{\alpha, -\alpha}^i, & \text{如果 } \alpha + \beta = 0, \\ 0, & \text{如果 } \alpha + \beta \neq 0, \end{cases} \\ c_{\alpha\beta}^\sigma &= \begin{cases} c_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta}, & \text{如果 } \sigma = \alpha + \beta, \text{ 并且 } \alpha + \beta \text{ 是一个根,} \\ 0, & \text{如果 } \alpha + \beta \text{ 不是一个根} \end{cases} \end{aligned} \quad (24.21)$$

可以按如下方式分块度量张量:

$$g = \begin{pmatrix} g_{ij} & g_{i\alpha} \\ g_{\alpha i} & g_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \quad (24.22)$$

我们有

$$\begin{aligned} g_{i\alpha} &= \sum_{k=1}^m c_{ik}^l c_{\alpha l}^k + \sum_{\beta} c_{i\beta}^l c_{\alpha l}^{\beta} \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^m \underbrace{c_{ik}^l}_{=0} \underbrace{c_{\alpha l}^k}_{=0} + \sum_{\beta} \underbrace{c_{i\beta}^l}_{=0} c_{\alpha\beta}^k \right) + \sum_{\beta} \left(\sum_{l=1}^m \underbrace{c_{i\beta}^l}_{=0} c_{\alpha l}^{\beta} + \sum_{\gamma} c_{i\beta}^{\gamma} c_{\alpha\gamma}^{\beta} \right) \\ &= \sum_{\beta\gamma} c_{i\beta}^{\gamma} c_{\alpha\gamma}^{\beta} = \sum_{\beta} c_{i\beta}^{\beta} c_{\alpha\beta}^{\beta} = \sum_{\beta} \beta_i \underbrace{c_{\alpha\beta}^{\beta}} = 0, \end{aligned} \quad (24.23)$$

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \sum_{k=1}^m c_{\alpha k}^l c_{\beta l}^k + \sum_{\gamma} c_{\alpha\gamma}^l c_{\beta l}^{\gamma} \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^m \underbrace{c_{\alpha k}^l}_{=0} \underbrace{c_{\beta l}^k}_{=0} + \sum_{\sigma} c_{\alpha k}^{\sigma} c_{\beta\sigma}^k \right) + \sum_{\gamma} \left(\sum_{l=1}^m c_{\alpha\gamma}^l c_{\beta l}^{\gamma} + \sum_{\tau} c_{\alpha\gamma}^{\tau} c_{\beta\tau}^{\gamma} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m (-\alpha_k) c_{\beta\alpha}^k + \sum_{l=1}^m c_{\alpha\beta}^l (-\beta_l) + \sum_{\gamma} c_{\alpha\gamma}^{\alpha+\gamma} c_{\beta,\alpha+\gamma}^{\gamma}. \end{aligned} \quad (24.24)$$

最后一个等号右边的每项都消失, 除非 $\beta = 0\alpha$ 。因此, $g_{\alpha\beta}$ 消失, 除非 $\alpha + \beta = 0$ 。将上述两个方程的结果放在一起, 我们看到: $\det(g) = 0$ 除非 $\alpha + \beta = 0$ 。 α 是半单纯 Lie 代数的一个根的断言意味着从定理 8.2 (Cartan 的第一个标准) 我们知道 $-\alpha$ 也是一个根。

练习 24.1 用在 (24.22) 中的度量张量 g 的分块矩阵形式说明如果 $g_{i\alpha} = g_{\alpha\beta} = 0$, 有 $\det(g) = 0$ 。

由于非零根成对出现, $\pm\alpha$, 并且由于 $g_{\alpha\beta} = 0$, 除非 $\alpha + \beta = 0$, 因此度量张量 (24.22) 出现为

$$g = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B & 0 \end{pmatrix}. \quad (24.25)$$

在这种形式中, 很容易看出 $\det(g) \neq 0$ 意味着 $\det(g_{ij}) \neq 0$ 。

练习 24.2 验证上面的表述。

现在

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{k=1}^m \underbrace{c_{ik}^l}_0 \underbrace{c_{jl}^k}_{=0} + \sum_{\alpha} c_{i\alpha}^l c_{j\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \left(\sum_{l=1}^m \underbrace{c_{i\alpha}^l}_0 c_{j\alpha}^{\alpha} + \sum_{\beta} c_{i\alpha}^{\beta} c_{j\beta}^{\alpha} \right) \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} c_{i\alpha}^{\beta} c_{j\beta}^{\alpha} = \sum_{\alpha} c_{i\alpha}^{\alpha} c_{j\alpha}^{\alpha} = \sum_{\alpha} \alpha_i \alpha_j = g_{ji} . \end{aligned} \quad (24.26)$$

因此, g_{ij} ($i, j = 1, \dots, m$), (将 g 限制到 $\mathcal{G}_0$), 也用作对于由根生成的实 m -维空间 P (称为**根空间 (root space)**) 的一个 (对称且非简并的) 度量张量。 P 是 m -维的事实将在下面的定理 24.5 中证明。使用 g_{ij} , 结构常数 $c_{\alpha, -\alpha}^i$ [(24.17) 中] 被看成是与 α_i 是对偶的。事实上,

$$\begin{aligned} c_{\alpha, -\alpha}^i &= \delta_l^i c_{\alpha, -\alpha}^l = g^{ik} g_{kl} c_{\alpha, -\alpha}^l = g^{ik} c_{k, \alpha, -\alpha} \\ &= g^{ik} c_{-\alpha, k, \alpha} = g^{ik} g_{-\alpha\beta} c_{k\alpha}^{\beta} = g^{ik} g_{-\alpha, \alpha} c_{k\alpha}^{\alpha} \\ &= g^{ik} g_{-\alpha, \alpha} \alpha_k = g_{-\alpha, \alpha} \alpha^i . \end{aligned} \quad (24.27)$$

然后, 对于任意根 α , $g_{\alpha, -\alpha} = 1$, 我们可以将 (24.7) 中的 E_{α} 归一化。对于归一化的 E_{α} , 有

$$c_{\alpha, -\alpha}^i = \alpha^i , \quad (24.28)$$

因此 (24.17) 变成

$$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i . \quad (24.29)$$

从现在开始, 我们将假设 E_{α} 是归一化的, 除非另有说明。两个根之间 α 和 β 的标量积由下式定义

$$\alpha \cdot \beta \equiv (\alpha^*, \beta^*) = g_{ij} \alpha^i \beta^j = \alpha_j \beta^j = \alpha_j \beta_i g^{ij} \quad (24.30)$$

注意到, 这个标量积是在 $\mathcal{G}_0^*$ 上定义的。

收集上述几个结果, 我们可以分辨出复的半单纯 Lie 代数的所谓 **Cartan-Weyl-Chevalley 标准形式 (Cartan-Weyl-Chevalley normal form)**, 如下所示。

定理 24.1 令 $\mathcal{G}$ 是一个复的半单纯 Lie 代数并且

$$\mathcal{G}_0 = \text{span} \{H_1, \dots, H_m\}$$

是它的 Cartan 子代数。 $\mathcal{G}$ 分解为 $\mathcal{G}_0$ 及其一维根空间 $\mathcal{G}_{\alpha} = \text{span}\{E_{\alpha}\}$ 的直和, 使得

$$[H_i, H_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, m , \quad (24.31)$$

$$[H_i, E_{\alpha}] = \alpha_i E_{\alpha} , \quad (24.32)$$

$$[E_{\alpha}, E_{-\alpha}] = \alpha^i H_i, \quad \alpha^i = g^{ij} \alpha_j , \quad (24.33)$$

$$[E_{\alpha}, E_{\beta}] = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} , \quad (24.34)$$

其中, $N_{\alpha\beta} = 0$, 除非 $\alpha + \beta$ 是一个根。

我们现在将研究这些根的一些更重要的性质。

定理 24.2 如果 α 和 β 是半单纯 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的根, 则 $\frac{2(\alpha \cdot \beta)}{(\alpha \cdot \alpha)}$ 是整数, $\beta - \frac{2\alpha(\alpha \cdot \beta)}{(\alpha \cdot \alpha)}$ 也是 $\mathcal{G}$ 的一个根。

证明: 假设 $\alpha + \beta$ 不是一个根。从 (24.34), 有

$$\begin{aligned} [E_{-\alpha}, E_{\beta}] &= N_{-\alpha, \beta} E_{\beta-\alpha} \equiv E'_{\beta-\alpha}, \quad [E_{-\alpha}, E'_{\beta-\alpha}] \equiv E'_{\beta-2\alpha}, \dots \\ [E_{-\alpha}, E'_{\beta-j\alpha}] &\equiv E'_{\beta-(j+1)\alpha}, \dots \end{aligned} \quad (24.35)$$

其中, $E'_{\beta-j\alpha}$ ($j > 0$) 是对应根空间中的非归一化元素。由于只有有限数量的根空间, 因此存在一个正整数 h , 使得在 h 次迭代之后, 有

$$[E_{-\alpha}, E'_{\beta-h\alpha}] = E'_{\beta-(h+1)\alpha} = 0. \quad (24.36)$$

从 (24.34) 我们也看到

$$[E_{\alpha}, E'_{\beta-(j+1)\alpha}] = N_{j+1} E'_{\beta-j\alpha}, \quad (24.37)$$

其中, 常数 N_{j+1} 由方程定义。它可以在 (24.37) 和最后显示的等式 (24.35) 之间通过消去 E_{β} 得到:

$$\begin{aligned} N_{j+1} E'_{\beta-j\alpha} &= [E_{\alpha}, [E_{-\alpha}, E'_{\beta-j\alpha}]] \\ &= -[E'_{\beta-j\alpha}, [E_{\alpha}, E_{-\alpha}]] - [E_{-\alpha}, [E'_{\beta-j\alpha}, E_{\alpha}]] \\ &= \alpha^i [H_i, E'_{\beta-j\alpha}] + N_j [E_{-\alpha}, E'_{\beta-(j-1)\alpha}] \\ &= \alpha^i (\beta - j\alpha)_i E'_{\beta-j\alpha} + N_j E'_{\beta-j\alpha} \\ &= \{\alpha^i (\beta - j\alpha)_i + N_j\} E'_{\beta-j\alpha}, \end{aligned} \quad (24.38)$$

其中, 第二个等号来自于 Jacobi 恒元。因此, 我们得到迭代公式

$$N_{j+1} = \alpha^i (\beta - j\alpha)_i + N_j = \alpha \cdot \beta - j(\alpha \cdot \alpha) + N_j, \quad j \geq 1. \quad (24.39)$$

如果我们定义 $N_0 \equiv 0$, 则 (24.39) 产生

$$\begin{aligned} N_0 &= 0, N_1 = (\alpha \cdot \beta), N_2 = (\alpha \cdot \beta) - (\alpha \cdot \alpha) + N_1, \\ N_3 &= (\alpha \cdot \beta) - 2(\alpha \cdot \alpha) + N_2, \dots, \\ N_j &= (\alpha \cdot \beta) - (j-1)(\alpha \cdot \alpha) + N_{j-1}. \end{aligned} \quad (24.40)$$

或者

$$\begin{aligned} N_j &= j(\alpha \cdot \beta) - (\alpha \cdot \alpha)(1 + 2 + \dots + (j-1)) \\ &= j(\alpha \cdot \beta) - \left(\frac{j(j-1)}{2} \right) (\alpha \cdot \alpha). \end{aligned} \quad (24.41)$$

现在 (24.36) 和 (24.37) 说明了这一点

$$N_{h+1} = 0. \quad (24.42)$$

因此, 它来自于 (24.41)(通过设 $j = h + 1$)

$$(\alpha \cdot \beta) = \frac{h}{2}(\alpha \cdot \alpha) . \quad (24.43)$$

代入 (24.41), 我们有

$$N_j = \frac{j}{2}(h - j + 1)(\alpha \cdot \alpha) . \quad (24.44)$$

注意到 $(\alpha \cdot \alpha) \neq 0$ 。实际上, 假设 $(\alpha \cdot \alpha) = 0$ 。那么 (24.41) 意味着 $N_j = j(\alpha \cdot \beta), j \geq 1$, 如果 $\alpha \cdot \beta \neq 0$, 则与 (24.42) 相矛盾。方程 (24.43) 说明 $\frac{2(\alpha \cdot \beta)}{(\alpha \cdot \alpha)}$ 必须是一个正整数。另外, (24.36), (24.37) 和 (24.44) 给出的 N_j 值说明: 如果 α 和 β 是根, 而 $\alpha + \beta$ 不是根, 那么

$$\beta, \beta - \alpha, \beta - 2\alpha, \dots, \beta - h\alpha$$

都是根, 其中 $h = \frac{2(\alpha \cdot \beta)}{(\alpha \cdot \alpha)}$ 是正整数。上面的根序列称为 β 的 α -根串 (α -root string)。

现在假设 $\alpha + \beta$ 是一个根。则存在正整数 k 使得

$$\begin{aligned} [E_\alpha, E_\beta] &= E'_{\alpha+\beta}, \dots, [E_\alpha, E'_{\beta+j\alpha}] = E'_{\beta+(j+1)\alpha}, \dots \\ [E_\alpha, E'_{\beta+(k-1)\alpha}] &= E'_{\beta+k\alpha}, [E_\alpha, E'_{\beta+k\alpha}] = E'_{\beta+(k+1)\alpha} = 0 . \end{aligned} \quad (24.45)$$

定义常数 $\mathcal{N}_j$ 通过

$$[E_{-\alpha}, E'_{\beta+(j+1)\alpha}] = \mathcal{N}_{j+1} E'_{\beta+j\alpha} , \quad (24.46)$$

我们可以通过完全类似于那些推导 (24.41) 的步骤得到

$$\mathcal{N}_j = -j(\alpha \cdot \beta) - \left(\frac{j(j-1)}{2} \right) (\alpha \cdot \alpha) . \quad (24.47)$$

在设 $\mathcal{N}_{k+1} = 0$ 时, 我们得出结论

$$\frac{2(\alpha \cdot \beta)}{(\alpha \cdot \alpha)} = -k \quad (24.48)$$

是一个负整数。然后我们有下面的根串:

$$\beta, \beta + \alpha, \dots, \beta + k\alpha ,$$

上面的最后一个根是 $\beta - \frac{2(\alpha \cdot \beta)}{(\alpha \cdot \alpha)}\alpha$ 。一个半单纯 Lie 代数的整数 $\frac{2(\alpha \cdot \beta)}{(\alpha \cdot \alpha)}$ 称为 **Cartan 整数 (Cartan integer)**。□

定理 24.3 如果 α 是一个根, 那么, 在 α 的所有整数倍数 $n\alpha$ 中, 只有 $\alpha, 0$ 和 $-\alpha$ 是根。

证明: 由于 $[E_\alpha, E_\alpha] = 0$, 因此从 (24.34) 得出 2α 不是一个根。现在假设 $n\alpha$ 对于一个确定的 $n > 1$ 是一个根。然后, 通过前面的定理, 由于

$$h = \frac{2(\alpha \cdot n\alpha)}{\alpha \cdot \alpha} = 2n , \quad (24.49)$$

$n\alpha$ 有一个 α -根串

$$n\alpha, (n-1)\alpha, \dots, -n\alpha ,$$

其中, 包括 2α 。这与 2α 不是一个根的事实相矛盾。因此, $n\alpha$ 对于任意 $n > 1$ 不是一个根。同样, 假设 $-n\alpha$ 对于某些 $n > 1$ 是一个根。则有

$$k = -\frac{2(\alpha \cdot (-n\alpha))}{(\alpha \cdot \alpha)} = 2n, \quad (24.50)$$

并且 $-n\alpha$ 有 α -根串

$$-n\alpha, -(n-1)\alpha, \dots, n\alpha,$$

它又包括 2α 。这个定理得证。 $\square$

定理 24.4 假设 α 和 β 都是非零根, 那么 β 的 α -根串最多包含四个根。因此

$$\frac{2(\alpha \cdot \beta)}{(\alpha \cdot \alpha)} = 0, \pm 1, \pm 2, \text{ 或者 } \pm 3. \quad (24.51)$$

证明: 我们假设 $\beta \neq \pm\alpha$; 我们已经证明了该定理: 如果 $\beta = \pm\alpha$, 则 β 的 α -根串仅由三个根 $\alpha, 0, -\alpha$ 组成。

假设 α -根串有五个根。令它们为

$$\beta, \beta = \alpha, \beta - 2\alpha, \beta - 3\alpha, \beta - 4\alpha.$$

$\beta - (\beta - 2\alpha) = 2\alpha$ 和 $\beta + (\beta - 2\alpha) = 2\beta - 2\alpha$ 都不是根。因此, β 的 $(\beta - 2\alpha)$ -根串只由一个根组成, 即: β 。方程 (24.43) 则说明

$$\beta \cdot (\beta - 2\alpha) = \beta \cdot \beta - 2\alpha \cdot \beta = 0. \quad (24.52)$$

类似地, $\beta - \alpha$ 的 $(\beta - 3\alpha)$ -根串仅一个根组成, $\beta - \alpha$; $\beta - 2\alpha$ 的 $(\beta - 4\alpha)$ -根串仅一个根组成。再有就是通过 (24.43) 有

$$(\beta - \alpha) \cdot (\beta - 3\alpha) = \beta \cdot \beta - 4\alpha \cdot \beta + 3\alpha \cdot \alpha = 0, \quad (24.53)$$

$$(\beta - 2\alpha) \cdot (\beta - 4\alpha) = \beta \cdot \beta - 6\alpha \cdot \beta + 8\alpha \cdot \alpha = 0. \quad (24.54)$$

最后三个方程一起可以用如下矩阵形式写出:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \cdot \beta \\ \alpha \cdot \beta \\ \alpha \cdot \alpha \end{pmatrix} = 0. \quad (24.55)$$

由于系数矩阵的行列式不会消失 (等于 -4), 唯一的解变成零:

$$\alpha \cdot \alpha = \beta \cdot \beta = \alpha \cdot \beta = 0. \quad (24.56)$$

显然与 α 和 β 都是非零根的假设相矛盾。因此, 假设 β 的 α -根串有五个根必须是错误的。类似地, 根串

$$\beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \beta + 3\alpha, \beta + 4\alpha$$

不可能存在。另一方面, 考虑 β 的 α -根串

$$\beta, \beta - \alpha, \beta - 2\alpha, \beta - 3\alpha .$$

方程 (24.52) 和 (24.53) 仍然有效, 它们共同产生

$$\frac{2(\alpha \cdot \beta)}{(\alpha \cdot \alpha)} = 3 , \quad (24.57)$$

确定 (24.43)。对于根串

$$\beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \beta + 3\alpha ,$$

相反, 我们有

$$\frac{2(\alpha \cdot \beta)}{(\alpha \cdot \alpha)} = -3 . \quad (24.58)$$

随后得到方程 (24.52), 从而证明了该定理。 $\square$

现在让我们在 (24.34) 中计算 $N_{\alpha\beta}$, 其中 $\alpha + \beta$ 是一个根 (否则 $N_{\alpha\beta} = 0$)。考虑下面 β 的 α -根串:

$$\beta + j\alpha, \beta + (j-1)\alpha, \dots, \beta + \alpha, \beta, \beta - \alpha, \dots, \beta - k\alpha . \quad (24.59)$$

令

$$\gamma \equiv \beta + j\alpha , \quad (24.60)$$

这可以等价地写成

$$\gamma, \gamma - \alpha, \dots, \gamma - h\alpha , \quad (24.61)$$

其中

$$h = j + k . \quad (24.62)$$

从 (24.37) 开始, 我们有 (在该等式中用 γ 替代 β 和 $j+1$ 替代 j)

$$[E_\alpha, E'_{\gamma-j\alpha}] = N_j E'_{\gamma-(j-1)\alpha} , \quad (24.63)$$

或者, 从方程 (24.35) 的最后一个有

$$[E_\alpha, [E_{-\alpha}, E'_{\gamma-(j-1)\alpha}]] = N_j E'_{\gamma-(j-1)\alpha} . \quad (24.64)$$

因为根据 (24.35), $E'_{\gamma-(j-1)\alpha}$ 用一个常数区分于 $E_{\gamma-(j-1)\alpha}$, 上面的方程和 (24.60) 一起说明

$$N_j E_{\alpha+\beta} = [E_\alpha, [E_{-\alpha}, E_{\alpha+\beta}]] = N_{-\alpha, \alpha+\beta} [E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta} N_{-\alpha, \alpha+\beta} E_{\alpha+\beta} . \quad (24.65)$$

因此, 在回忆 (24.44), 并在该方程中用 $j+k$ 代替 h [(24.62)] 时, 我们有

$$N_{\alpha\beta} N_{-\alpha, \alpha+\beta} = \frac{j(k+1)(\alpha \cdot \alpha)}{2} . \quad (24.66)$$

接下来, 我们使用 Jacobi 恒元 [(4.26)] 来得到

$$[[E_\alpha, E_\beta], E_{-\alpha-\beta}] = [E_\alpha, [E_\beta, E_{-\alpha-\beta}]] + [E_\beta, [E_{-\alpha-\beta}, E_\alpha]] , \quad (24.67)$$

并且通过 $-\alpha$ 代替 α 和 $-\beta$ 代替 β 得到类似方程式。(这是允许的, 因为 α 是根说明 $-\alpha$ 也是根)。使用 Cartan-Weyl-Chevalley 形式 [(24.31) 至 (24.34)], 这些方程产生

$$N_{\alpha\beta}(\alpha + \beta)^i H_i = (N_{\beta, -\alpha-\beta}\alpha^i + N_{-\alpha-\beta, \alpha}\beta^i) H_i , \quad (24.68)$$

$$N_{-\alpha, -\beta}(\alpha + \beta)^i H_i = (N_{-\beta, \alpha+\beta}\alpha^i + N_{\alpha+\beta, -\alpha}\beta^i) H_i . \quad (24.69)$$

我们因此有

$$N_{\alpha\beta} = N_{-\beta, -\alpha-\beta} = N_{-\alpha-\beta, \alpha} , \quad (24.70)$$

$$N_{-\alpha, -\beta} = N_{-\beta, \alpha+\beta} = N_{\alpha+\beta, -\alpha} . \quad (24.71)$$

则方程 (24.66) 可以重写

$$-N_{\alpha\beta}N_{-\alpha, -\beta} = \frac{j(k+1)(\alpha \cdot \alpha)}{2} , \quad (24.72)$$

这意味着

$$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha, -\beta} < 0 . \quad (24.73)$$

我们现在观察在缩放变换下

$$E_\alpha \rightarrow \tilde{E}_\alpha = C_\alpha E_\alpha , \quad (24.74)$$

$$N_{\alpha\beta} \rightarrow \tilde{N}_{\alpha\beta} = \frac{C_\alpha C_\beta}{C_{\alpha+\beta}} N_{\alpha\beta} , \quad (24.75)$$

Cartan-Weyl-Chevalley 形式 [(24.32) 至 (24.34)] 保持不变性提供了

$$C_\alpha C_{-\alpha} = 1 . \quad (24.76)$$

练习 24.3 验证上面的表述。

通过这种缩放的自由, 人们可以随时设

$$N_{-\alpha, -\beta} = -N_{\alpha\beta} . \quad (24.77)$$

方程 (24.72) 则给出 $N_{\alpha\beta}$ 下面结果:

$$N_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{j(k+1)(\alpha \cdot \alpha)}{2}} . \quad (24.78)$$

在上面的方程中, 正整数 j 和 k 由与根 α 和 β 相关的根串 (24.59) 确定, 而 $\alpha + \beta$ 也是根。

在我们开始之前, 我们用 $SU(2) \sim SO(3)$ 的简单但重要的例子来说明迄今为止得到的结果, 正如我们多次看到的那样, 是角动量量子理论的 Lie 代数。

回想一下 Chapter 4, $\mathcal{SO}(3)$ 是一个三维 Lie 代数, 其生成元为 J_2^3, J_3^1 和 J_1^2 。写作

$$\mathbf{L} = (L^1, L^2, L^3)$$

(角动量算符的三个分量)[c.f.(9.26)]

$$L^1 = -i\hbar J_2^3, \quad L^2 = -i\hbar J_3^1, \quad L^3 = -i\hbar J_1^2, \quad (24.79)$$

并定义无量纲角动量算符 $\mathbf{J}$ 为

$$\mathbf{L} \equiv \hbar \mathbf{J} = \hbar (J_1, J_2, J_3), \quad (24.80)$$

对于 $\mathcal{SO}(n)$ [(4.35)] 的结构方程应用于 $\mathcal{SO}(3)$ 给出

$$[J_j, J_k] = i \sum_l \varepsilon_{jkl} J_l \quad (24.81)$$

作为 $\mathcal{SO}(3)$ 的结构方程 [c.f. (9.23)]。如果我们定义

$$J_+ \equiv \frac{J_1 + iJ_2}{\sqrt{2}}, \quad (24.82)$$

$$J_- \equiv \frac{J_1 - iJ_2}{\sqrt{2}} = J_+^\dagger, \quad (24.83)$$

从 (24.81) 得到

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad (24.84)$$

$$[J_+, J_-] = J_3. \quad (24.85)$$

因此, $\mathcal{SO}(3)$ 的 Cartan 子代数是—维的:

$$(\mathcal{SO}(3))_0 = \{aJ_3\}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

只有两个根: $\alpha_+ = 1$ 和 $\alpha_0 = -\alpha_+ = -1$, 度规张量由 $g_{ij} = g^{ij} = 1$ 给出。 Ad_{J_3} 的对应的特征向量是 J_+ 和 J_- 。(结构常数 $N_{\alpha\beta}$ 不进入这个代数)。

如前面的讨论, 量 α_i 可以表示为根向量 $\alpha^* = \alpha_i (H^*)^i \in \mathcal{G}_0^*$ 的协变分量, 其中 $(H^*)^i (H_j) = \delta_j^i$ 。在我们稍微滥用符号之后, 我们仍然会使用符号 α 来表示 α^* , 记住 $\mathcal{G}_0^*$ 中对称正定的内积是由下式给出

$$\alpha \cdot \beta = (\alpha^*, \beta^*) = g^{ij} \alpha_i \beta_j = \alpha^j \beta_j, \quad i, j = 1, \dots, m = \text{秩}. \quad (24.86)$$

基于这个内积, 我们可以定义根向量 α 和 β 的角度 $\theta_{\alpha\beta}$ 由下式得到

$$\cos \theta_{\alpha\beta} \equiv \frac{(\alpha \cdot \beta)}{\sqrt{(\alpha \cdot \alpha)(\beta \cdot \beta)}}, \quad (24.87)$$

或者

$$\cos^2 \theta_{\alpha\beta} = \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{(\alpha \cdot \alpha)(\beta \cdot \beta)}. \quad (24.88)$$

还可以指定根向量 α 和 β 的长度比 $r_{\alpha\beta}$:

$$r_{\alpha\beta} \equiv \sqrt{\frac{(\alpha \cdot \alpha)}{(\beta \cdot \beta)}} = \sqrt{\frac{2(\alpha \cdot \beta)/(\beta \cdot \beta)}{2(\alpha \cdot \beta)/(\alpha \cdot \alpha)}}. \quad (24.89)$$

根据定理 24.4 得出 $\theta_{\alpha\beta}$ 的可能值由下式给出

$$\cos^2 \theta_{\alpha\beta} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \quad (24.90)$$

其中, 最后一个值是 $\alpha = \beta$ 。因此, 可能的锐角是

$$\theta_{\alpha\beta} = 0, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ; \quad (24.91)$$

相应地, 通过 (24.89), (24.43) 和 (24.48), 有

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} &= 30^\circ, & r_{\alpha\beta} &= \sqrt{3} \\ \theta_{\alpha\beta} &= 45^\circ, & r_{\alpha\beta} &= \sqrt{2} \\ \theta_{\alpha\beta} &= 60^\circ, & r_{\alpha\beta} &= 1 \\ \theta_{\alpha\beta} &= 90^\circ, & r_{\alpha\beta} &\text{不定} \end{aligned} \quad (24.92)$$

对于秩-1 和秩-2 ($m = 1, 2$) 半单纯 Lie 代数, 可以非常方便地通过定义了普通 Euclid 度规并满足 (24.92) 的平面上的一组向量来表示每个代数的根的集合。这些平面被称为**根图 (root diagram)**, 每个图都确定了一个特定的半单纯 Lie 代数。

对于 $m = 1$, 只有经典代数 $A_1 [\sim \mathcal{SO}(3) \sim SU(2)]$ 。其根图如 Figure 24.1 所示。对于

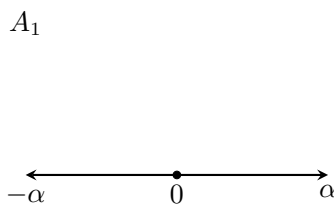


Figure 24.1

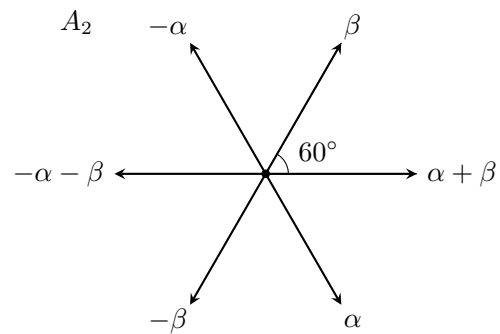


Figure 24.2

$m = 2$, 我们有经典代数 $A_2 [\sim SU(3)]$, $B_2 [\sim \mathcal{SO}(5)]$ 和特殊代数 G_2 。这些根图如 Figure 24.2 至 24.4 所示; 并且标量积可以使用 Euclidean 度规用这些图通过基本方法计算。

对于秩高于 2 的半单纯 Lie 代数, 不可能通过平面根图表示所有根。然而, E.B. Dynkin 表明, 所有半单纯 Lie 代数仍然可以通过一类平面图表示, 并且确定分类, 称为 **Dynkin 图 (Dynkin diagram)**。在本章的其余部分, 我们将讨论 (但省略证明) 此过程。最终结果将在

定理 24.7 中给出。首先，我们必须定义非零根的序。

定义 24.2 如果 α 的第一个非零分量是正数，则称根 α 为正。如果两个根 α' 和 α 使得 $\alpha' - \alpha$ 是正的，则称 α' 大于 α 。

举例， A_1 中， α, β 和 $\alpha + \beta$ ； B_2 中， $\alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha$ ； G_2 中， $\alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \beta + 3\alpha$ 和 $2\beta + 3\alpha$ 都是正根 (参见 Figure 24.2, 24.3 和 24.4)。这些例子说明：排序只是将根空间 P 分成两半的一种方式。

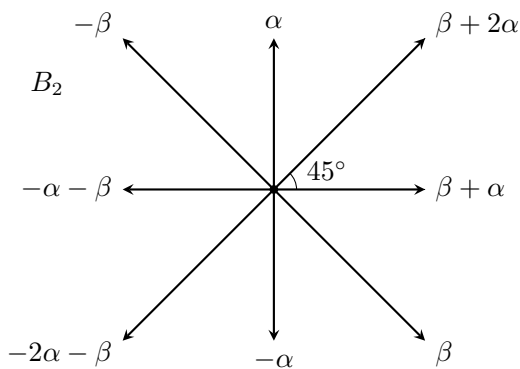


Figure 24.3

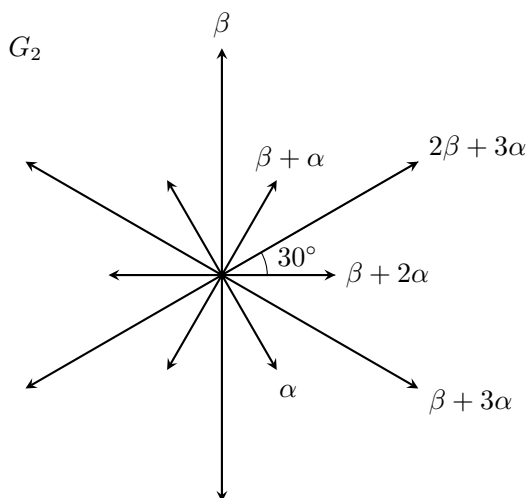


Figure 24.4

让我们用 P^+ 表示正根的集合。

定义 24.3 如果不是另外两个正根的和，那么正根 $\gamma \in P^+$ 被认为是**单纯的 (simple)** 或**基本的 (fundamental)**。

我们将用 Π 表示所有单纯根的集合，用 Σ 表示所有根的集合。

定理 24.5 Π (所有单纯根的集合) 的元素构成 m -维实向量空间 $P = \Sigma$ 的生成 (其中 Σ 是所有根的集合) 的一组基。如果 $\alpha_I \neq \alpha_J$ 属于 Π (即：两个都是单纯的)，则 $\alpha_I \cdot \alpha_J \leq 0$ 。此外，每个正根是单纯根与正整数系数的线性组合。

证明: 如果 $\alpha_I \cdot \alpha_J > 0$, 则 (24.43) 意味着 $\alpha_I - \alpha_J$ 和 $\alpha_J - \alpha_I$ 都是根, 其中一个是正的。假设 $\alpha_I - \alpha_J$ 是正的, 则 $\alpha_I = \alpha_J + (\alpha_I - \alpha_J)$ 不是单纯的, 与 α_I 和 α_J 都是单纯的假设相矛盾。由此得出 $\alpha_I \cdot \alpha_J \leq 0$ (这也意味着 $\theta_{\alpha_I \alpha_J} \geq \frac{\pi}{2}$)。

让我们接下来说明单纯根是线性无关的。设单纯根的集合是 $\Pi = \{\alpha_I\}$ 。如果 $\{\alpha_I\}$ 是线性相关的, 则存在 $x' \in \mathbb{R}$ 的一个集合, 不是全零, 使得 $x^I \alpha_I = 0$ 。将此求和中的非零项分为两个群, 一个群的元素 $x^I > 0$ (称这些为 p^I), 另一个群元素 $x^I < 0$ (称这些为 $-n^J$), 并写

$$p^I \alpha_I - n^J \alpha_J = 0, \quad (24.93)$$

其中, $p^I, n^J > 0$ 。考虑向量

$$\alpha \equiv p^I \alpha_I = n^J \cdot \alpha_J \quad (24.94)$$

我们有

$$\alpha \cdot \alpha = p^I n^J (\alpha_I \cdot \alpha_J) \leq 0, \quad (24.95)$$

其中, 不等式来自定理的第一部分 (刚刚证明)。但 α 是一个正根, 因为它是一个正根的求和。因此 $\alpha \cdot \alpha \geq 0$ 。由于 $\alpha \cdot \alpha = 0$, 这意味着 $\alpha = 0$ 。但这是一个矛盾, 因为 p^I 都应该 > 0 。

现在假设 $\alpha \in P^+$ 不单纯。则它可以写成 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in P^+$ 。由于 $\alpha_1 = \alpha - \alpha_2$ 和 $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$ 都是正数, α 大于 α_1 和 α_2 。如果 α_1 或 α_2 不单纯, 则非单纯根可以进一步减少到正根的和。该过程必须最终终止。因此证明了该定理的最后一个表述。

到目前为止, 我们已经证明: 单纯根 Π 的集合是线性无关的, 并且它生成 P^+ 。然后它也必须生成 Σ (所有根的集合, 正和负都有), 从而组成 P (根空间)。因此, Π 构成了 P 的基。我们最终将说明: 对于秩- m 的半单纯 Lie 代数, 确实存在 m 个单纯根, 这意味着 P 是 m 维的。

显然, 不能超过 m 个单纯根, 因为它们是线性无关的 m -向量 (具有分量 $\alpha_i, i = 1, \dots, m$)。假设有少于 m 个单纯根。令它们为 $\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(k)}$ 。则每个根 α 都可以表述为

$$\alpha = \sum_{i=1}^k x^i \alpha_{(i)}, \quad k < m. \quad (24.96)$$

因此, P 最多是 k -维的。因此存在 Cartan 子代数 $\mathcal{G}_0$ 的一组基 $\{H_i, i = 1, \dots, m\}$ 依赖于所有根的 m (协变量) 分量第一个消失了:

$$\alpha = \{0, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}. \quad (24.97)$$

因此, 对于所有的根 α

$$[H_1, E_\alpha] = 0. \quad (24.98)$$

但与此同时,

$$[H_1, H_j] = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (24.99)$$

因此, $\{H_1, 0\}$ 生成 $\mathcal{G}$ 的 Abel 理想, 这与 $\mathcal{G}$ 是半单纯的事实相矛盾。□

如果 α 和 β 都是单纯的, 则 $\alpha \cdot \beta \leq 0$ 的事实意味着两个单纯根之间的角度 $\theta_{\alpha\beta}$ 必须满

足

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta_{\alpha\beta} \leq \pi. \quad (24.100)$$

然后, 我们得到了如下所述定理 24.4 的直接结果。

定理 24.6 如果 α 和 β 是两个单纯根, 则 $\theta_{\alpha\beta}$ 是 $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ 。另外, 如果 $\alpha \cdot \alpha \leq \beta \cdot \beta$, 则

$$\frac{\beta \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} = \begin{cases} \text{不定, } \theta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{2}, \\ 1, \quad \theta_{\alpha\beta} = \frac{2\pi}{3}, \\ 2, \quad \theta_{\alpha\beta} = \frac{3\pi}{4}, \\ 3, \quad \theta_{\alpha\beta} = \frac{5\pi}{6}. \end{cases} \quad (24.101)$$

练习 24.4 运用定理 24.4 的结论证明上述定理。

上述两个定理揭示了半单纯 Lie 代数的单纯根的知识足以确定代数的结构。Dynkin 图只是表示单纯根的简写图形符号。构造 Dynkin 图的规则如下:

- (1) 每个单纯根都用一个空心圆圈表示。
- (2) 成对的圆圈由 n 条线连接, 其中 $n = 0, 1, 2$ 或 3 分别对于 $\theta_{\alpha\beta} = \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ [如 (24.101) 中]。
- (3) 当圆圈通过两条或更多条线连接时, 会从较短的根到较长的根绘制一个箭头。

令 $e_{(i)}$ 为第 i 归一化根:

$$e_{(i)} = \frac{\alpha_{(i)}}{\sqrt{\alpha_{(i)} \cdot \alpha_{(i)}}}. \quad (24.102)$$

那么, 对于 $i \neq j$, 有

$$e_{(i)} \cdot e_{(j)} = \frac{\alpha_{(i)} \cdot \alpha_{(j)}}{\sqrt{(\alpha_{(i)} \cdot \alpha_{(i)}) (\alpha_{(j)} \cdot \alpha_{(j)})}} = \cos \theta_{\alpha_{(i)} \alpha_{(j)}} = -\frac{1}{2} \sqrt{n_{ij}}, \quad (24.103)$$

其中, n_{ij} 是 Dynkin 图中连接表示第 i 和第 j 根的圆圈的线数。然后, 可以将每个图与根空间 P 中的实正定二次型 $x \cdot x$ 相关联, 其中 $x \in P$ 由下式给出:

$$x = x^i e_{(i)}. \quad (24.104)$$

从 (24.103), 我们有

$$x \cdot x = \sum_i (x^i)^2 + 2 \sum_{i < j} x^i x^j e_{(i)} \cdot e_{(j)} = \sum_i (x^i)^2 - \sum_{i < j} x^i x^j \sqrt{n_{ij}}. \quad (24.105)$$

上面的方程的等号右边的正定性要求决定了所有可允许的 Dynkin 图由上述规则构造。我们表述下面的事实而不证明。

引理 24.2 可允许的 Dynkin 图没有环, 并且每个圆圈最多会遇到三行。此外, 由一条线连接的任何一对圆圈都可以合并为一个圆圈, 并且得到的图仍然是可允许的。

运用 (可允许的) Dynkin 图, 我们可以根据下面的定理表示单纯 Lie 代数的所谓 **Cartan**

分类 (Cartan classification)。(半单纯 Lie 代数的分类可以简化为单纯 Lie 代数的分类。)

定理 24.7 通过下面的分类, 复单纯 Lie 代数穷尽, 达到等价: 经典 Lie 代数 (*classical Lie algebra*) 的四个系列

$$A_m \ (m \geq 1), \ B_m \ (m \geq 1), \ C_m \ (m \geq 3), \ D_m \ (m \geq 4),$$

其中, m 是 Lie 代数的秩, 以及五个特殊 Lie 代数 (*exceptional Lie algebra*)

$$G_2, \ F_4, \ E_6, \ E_7, \ E_8,$$

其中, 每种情况下的下标等于代数的秩。这些代数具有如下所示的对应 Dynkin 图 (Figure 24.5)。

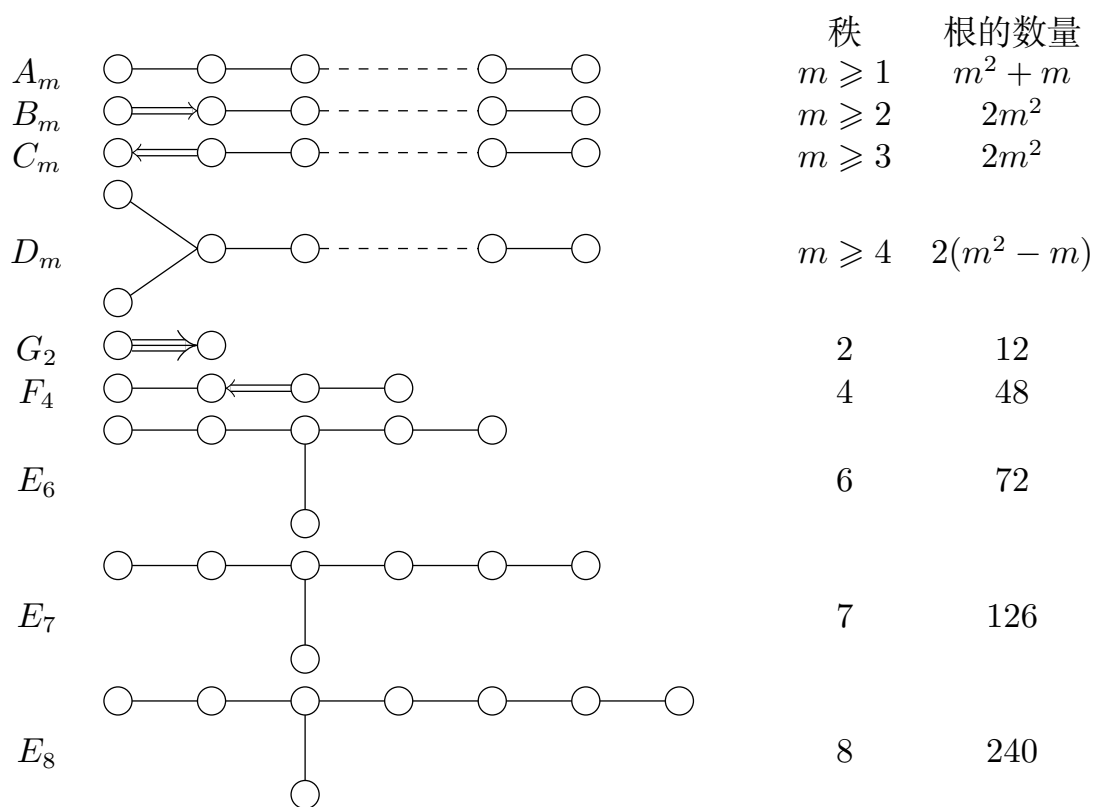


Figure 24.5

每个图中的圆圈的数量等于代数 (或秩) 的根的数量。

练习 24.5 说明 $\bigcirc - \bigcirc = \bigcirc - \bigcirc - \bigcirc$ 不是一个可允许的 Dynkin 图。

练习 24.6 说明 $\mathcal{SO}(4) \sim \mathcal{SO}(3) \oplus \mathcal{SO}(3)$ [c.f. (9.28)] 是半单纯的但不是单纯的。

四个无穷级数的复半单纯 Lie 代数可以用对应的经典 Lie 群的 Lie 代数的复合来辨别, 如下表所示。

Table 24.1

$\mathcal{G}$	约束	维度
$\mathcal{SL}(n) = A_{n-1}$ (实形式 = $\mathcal{SU}(n)$)	$\text{Tr } X = 0$	$n^2 - 1$
$\mathcal{SO}(2n + 1) = B_n$	$X^T + X = 0$	$n(2n + 1)$
$\mathcal{SP}(2n) = C_n$	$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} B^T = B, \\ C^T = C \end{matrix}$	$n(2n + 1)$
$\mathcal{SO}(2n) = D_n$	$X^T + X = 0$	$n(2n - 1)$

$\mathcal{SP}(2n)$ 是辛群 $Sp(2n)$ 的 Lie 代数, X, A, B, C 是满足所列的约束的复矩阵。注意, $\mathcal{SU}(n)$ 是一个实 Lie 代数 (无迹反-hermitian $n \times n$ 矩阵), 其复合是 $\mathcal{SL}(n)$ 。换句话说, 它是 $\mathcal{SL}(n)$ 的实形式 (real form)。

25. 半单纯 Lie 代数表示

Lie 代数表示的一般定义已在定义 7.12 中给出。特别地，可约和不可约表示的基本概念，以及表示的等价，完全类似于群表示 (c.f. 定义 18.1 和 18.3)。在本章中，我们将发展出半单纯 Lie 代数表示理论的特定的基本概念，事实和技术，它的完整的分类已经在上一章的最后给出。这些代数对应于物理学中重要的紧致 Lie 群。

我们从下面的定理开始 (没有证明)，这是定理 22.3 的一个结果。

定理 25.1 紧致 Lie 群的每个表示都等价于 hermitian 算符在么正空间 (定义 hermitian 内积的空间) 的表示；并且每个不可约表示等价于有限 hermitian 矩阵的表示。

注意到，伴随表示，就上一章中的理论已经制定出来而言，并不是由 hermitian 矩阵表示，因为伴随表示的矩阵元素是结构常数 [c.f. (7.18)]，一般不满足 hermitian 性的要求。这个事实也可以如显式看出。Cartan 子代数中的元素 H_i 必然是 hermitian 的 [依赖于 (24.20) 的度量]，因此 α [c.f. (24.32)] 都是实的。但是在取 (24.32) 的 hermitian 共轭时，我们有

$$[H_i, E_\alpha]^\dagger = [H_i E_\alpha - E_\alpha H_i]^\dagger = E_\alpha^\dagger H_i - H_i E_\alpha^\dagger = -[H_i, E_\alpha^\dagger] = \alpha_i E_\alpha^\dagger . \quad (25.1)$$

因此

$$[H_i, E_\alpha^\dagger] = -\alpha_i E_\alpha^\dagger , \quad (25.2)$$

意味着

$$E_\alpha^\dagger = -E_{-\alpha} . \quad (25.3)$$

由于 Cartan 子代数的基 $\{H_i\}$ 中的元素相互对易，因此在任意表示 D 中存在线性算符 $D(H_i)$ 的同时特征向量。

定义 25.1 在 Lie 代数表示 $D : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}(V)$ 中, 其中 V 是一个么正空间, $D(H_i)$, $i = 1, \dots, m (= \mathcal{G}$ 的秩) 的同时特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 的一个集合, 其中 $\{H_i\}$ 是 Cartan 子代数 $\mathcal{G}_0$ 的基, 构成 m -维线性空间中的一个向量的协变分量。这样一个向量被称为表示 D 的一个**权重向量 (weight vector)**。由所有权重向量生成的对应的 m -维空间 Δ_D 被称为表示 D 的**权重空间 (weight space)**。

将一个对应于特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 的同时特征向量写为

$$|\lambda(\nu)\rangle = |\lambda_1, \dots, \lambda_m(\nu)\rangle, \quad (25.4)$$

我们对于权重有下面定义的方程:

$$H_i |\lambda(\nu)\rangle = \lambda_i |\lambda(\nu)\rangle, \quad i = 1, \dots, m, \quad (25.5)$$

其中, 稍微滥用符号, 我们已经写了 H_i 而不是 $D(H_i)$, ν 是一个退化指标。在上一章中介绍的根被看成伴随表示中的权重。

对于根 α , E_α 和 $E_{-\alpha}$ 是 H_i 的特征态 $|\lambda\rangle$ 的升降算符。实际上, 它是从 (24.32) 得出的

$$H_i E_{\pm\alpha} |\lambda\rangle = ([H_i, E_{\pm\alpha}] + E_{\pm\alpha} H_i) |\lambda\rangle = (\lambda_i \pm \alpha_i) E_{\pm\alpha} |\lambda\rangle. \quad (25.6)$$

因此, 如果 $\lambda_i \pm \alpha_i$ 是权重, $E_{\pm\alpha} |\lambda\rangle$ 是具有特征值 $\lambda_i \pm \alpha_i$ 的 H_i 的特征态; 如果 $\lambda_i \pm \alpha_i$ 不是一个权重, 则它等于零向量。与根的情况一样, 权重 λ_i 取决于 Cartan 子代数 $\mathcal{G}_0$ 中的基 $\{H_i\}$ 的选择。与定义 24.2 类似, 我们有下面的内容。

定义 25.2 如果一个权重 λ 的第一个非消失成分是正的, 则称权重 λ 为正。如果两个权重 λ' 和 λ 使得 $\lambda' - \lambda$ 是正的, 则 λ' 被称为比 λ 更高的权重。在一个表示 D 中, 一个权重 λ 是一个比所有其它权重更高的权重, 那么 λ 被称为是表示 D 中**最高权重 (highest weight)**。

让我们在同一个权重空间中定义两个权重向量 λ 和 γ 的内积

$$\lambda \cdot \gamma = \sum_i \lambda_i \gamma_i, \quad (25.7)$$

并且也写成

$$(\lambda + \alpha)_i = \lambda_i + \alpha_i, \quad \lambda \cdot \alpha \equiv \sum_i \lambda_i \alpha_i, \quad (25.8)$$

其中, α 是一个根。然后, 我们有关于权重系统的下面有用的定理 (没有证明), 其中一些定理与上一章为根发展的那些定理类似。

定理 25.2 如果 λ 是任意权重 (某个表示) 并且 α 是任意根, 则 $\frac{2(\lambda \cdot \alpha)}{\alpha \cdot \alpha}$ 是整数, 并且 $\lambda - \frac{2(\lambda \cdot \alpha)}{\alpha \cdot \alpha} \alpha$ 也是相同表示的权重。该权重是权重 λ 在垂直于 α 的超平面 (在权重空间 Δ 中) 的反射 (见 Figure 25.1)。所有根的所有这些反射的集合构成一个群称为代数的 **Weyl 群 (Weyl group)**。(与定理 24.2 比较)。

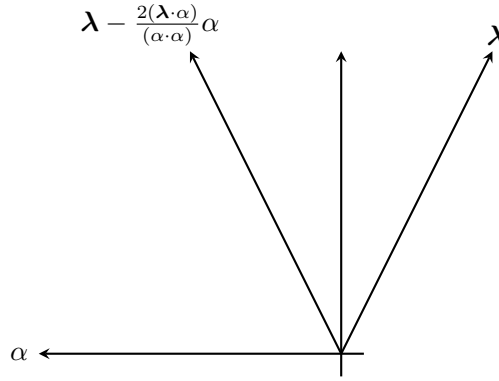


Figure 25.1

练习 25.1 说明上面定义的 Weyl 群确实是一个群。

练习 25.2 运用基本向量代数 (并借助于 Figure 25.1) 来验证 $\lambda - \frac{2(\lambda \cdot \alpha)}{(\alpha \cdot \alpha)}\alpha$ 确实是上面的定理中所述的反射。

定理 25.3 在任意表示空间中至少存在一个权重。

定理 25.4 如果 $|\lambda\rangle$ 是属于一个权重 λ 的特征向量, 并且可以表述为一个集合的特征向量的线性叠加 (属于权重 $\lambda_{(k)}$) 其中没有权重 $\lambda_{(k)}$ 等于 λ , 则 $|\lambda\rangle = 0$ 。

作为这个定理的直接结果, 我们有如下。

定理 25.5 属于不同权重的 H_i 的特征向量是线性无关的。在维度 N 的一个表示空间中, 最多可以有 N 个不同的权重。

如前所述 [c.f. (25.4)], 特定的权重可能是非简并的。如果对应于简并权重 λ 的特征空间是 l -维的, 那么我们说 λ 是 l -重简并, 或者 λ 的**重数 (multiplicity)** 是 l 。

定理 25.6 不可约表示的最高权重是非简并的。如果两个不可约表示具有相同的最高权重, 则这两个表示是等价的。

定理 25.7 权重向量 λ 是一个不可约表示的最高权重, 当且仅当

$$\lambda_{(\alpha)} \equiv \frac{2(\lambda \cdot \alpha)}{(\alpha \cdot \alpha)} \quad (25.9)$$

是对于任意单纯根 α 的非负整数 (包括 0)。如果 $|\Lambda\rangle$ 是对应于最高权重 Λ 的特征向量, 则

$$(E_{-\alpha})^k |\Lambda\rangle \begin{cases} \neq 0 & \text{如果 } k \leq \Lambda_{(\alpha)}, \\ = 0 & \text{如果 } k > \Lambda_{(\alpha)}. \end{cases} \quad (25.10)$$

[回忆 (24.43)]。

作为上述两个定理的结果，我们有下面重要而有用的事实。

定理 25.8 秩 m 的半单纯 Lie 群代数 $\mathcal{G}$ 的一个不可约表示由其最高权重 Λ 唯一确定，并完全确定由 m 个非负整数：

$$\Lambda_{\alpha_{(i)}} = \frac{2\Lambda \cdot \alpha_{(i)}}{\alpha_{(i)} \cdot \alpha_{(i)}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (25.11)$$

每个单纯根一个，其中 $\alpha_{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, 是代数的 m 个单纯根。

通常在 Dynkin 图中的每个圆的顶部写非负整数 $\lambda_{(\alpha_i)}$ 以确定不可约表示。举例，对于代数 $SU(3)$ ，有

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{\alpha_{(1)}} & & \Lambda_{\alpha_{(2)}} \\ \circ & \text{---} & \circ \\ \alpha_{(1)} & & \alpha_{(2)} \end{array} .$$

给定 $\Lambda_{\alpha_{(i)}}$ ，可以从 (25.11) 计算出最高权重 Λ 。假设，对于 $SU(3)$ ，有

$$\Lambda = \zeta_1 \alpha_{(1)} + \zeta_2 \alpha_{(2)}, \quad (25.12)$$

其中

$$\alpha_{(1)} = \beta, \quad \alpha_{(2)} = \alpha. \quad (25.13)$$

(参见 Figure 24.2 中的根图)。由于

$$\frac{\alpha_{(1)} \cdot \alpha_{(2)}}{\alpha_{(1)} \cdot \alpha_{(1)}} = \frac{\alpha_{(1)} \cdot \alpha_{(2)}}{\alpha_{(2)} \cdot \alpha_{(2)}} = -\frac{1}{2}, \quad (25.14)$$

我们有

$$\frac{\Lambda \cdot \alpha_{(1)}}{\alpha_{(1)} \cdot \alpha_{(1)}} = \zeta_1 \frac{\alpha_{(1)} \cdot \alpha_{(1)}}{\alpha_{(1)} \cdot \alpha_{(1)}} + \zeta_2 \frac{\alpha_{(2)} \cdot \alpha_{(1)}}{\alpha_{(1)} \cdot \alpha_{(1)}} = \zeta_1 - \frac{\zeta_2}{2}, \quad (25.15)$$

并且，通过 (25.9)，有

$$\Lambda_{\alpha_{(1)}} = \frac{2\Lambda \cdot \alpha_{(1)}}{\alpha_{(1)} \cdot \alpha_{(1)}} = 2\zeta_1 - \zeta_2. \quad (25.16)$$

类似地，

$$\Lambda_{\alpha_{(2)}} = -\zeta_1 + 2\zeta_2. \quad (25.17)$$

上述两个方程对于为 $SU(3)$ 的最高权重给出了下面的表达式：

$$\Lambda = \left(\frac{2\Lambda_{\alpha_{(1)}} + \Lambda_{\alpha_{(2)}}}{3} \right) \alpha_{(1)} + \left(\frac{\Lambda_{\alpha_{(1)}} + 2\Lambda_{\alpha_{(2)}}}{3} \right) \alpha_{(2)}. \quad (25.18)$$

因此，举例

$$\Lambda_{\overset{1}{\circ} \overset{0}{\circ}} = \frac{2}{3} \alpha_{(1)} + \frac{1}{3} \alpha_{(2)}. \quad (25.19)$$

从最高权重 Λ ，可以计算不可约表示的所有权重，并得到所谓的表示的**权重系统 (weight system)**(参见下面的定理 25.13)。

练习 25.3 说明对于 $SU(2) \sim A_1$ 的不可约表示有 Dynkin 图

$$\begin{array}{c} \Lambda_{(\alpha_+)} = l \\ \bigcirc \\ \alpha_+ \end{array},$$

其中, l 是非负整数并且 $\alpha_+ = 1$ 是唯一的单纯根, 最高权重 (所谓的自旋- j 表示) 由下式给出:

$$\Lambda_{\frac{l}{2}} \equiv j = \frac{l}{2}. \quad (25.20)$$

这是角动量子理论中的一个熟悉的结果。

让我们首先通过基本方法计算出 $SU(2)$ [由 (24.84) 和 (24.85) 给出的角动量代数] 的自旋- j 表示的一些细节。方程 (25.5) 出现为

$$J_3 |m(\nu)\rangle = m |m(\nu)\rangle, \quad (25.21)$$

其中, m 是 J_3 的特征值, ν 是简并指数。则通过 (25.6), 有

$$J_3 J_{\pm} |m(\nu)\rangle = (J_{\pm} J_3 \pm J_{\pm}) |m(\nu)\rangle = (m \pm 1) J_{\pm} |m(\nu)\rangle, \quad (25.22)$$

证明 J_+ 和 J_- 分别是升降算符。由于 j 是最高权重 (最高 J_3 特征值), 我们必须有

$$J_+ |j(\nu)\rangle = 0. \quad (25.23)$$

定义一个归一化常数 $N_j(\nu)$ 通过

$$J_- |j(\nu)\rangle \equiv N_j(\nu) |j-1(\nu)\rangle. \quad (25.24)$$

则对于任意简并指标 μ 和 ν , 有

$$\begin{aligned} \overline{N_j(\mu)} N_j(\nu) \langle j-1(\mu) | j-1(\nu) \rangle &= \langle j(\mu) | J_+ J_- | j(\nu) \rangle \\ &= \langle j(\mu) | [J_+, J_-] | j(\nu) \rangle \\ &= \langle j(\mu) | J_3 | j(\nu) \rangle \\ &= j \langle j(\mu) | j(\nu) \rangle. \end{aligned} \quad (25.25)$$

通过选择 $|j(\mu)\rangle$ 为一个标准正交集:

$$\langle j(\mu) | j(\nu) \rangle = \delta_{\mu\nu}, \quad (25.26)$$

通过令 $|N_j(\nu)|^2 = 1$, 可以对 $|j-1(\mu)\rangle$ 进行标准正交化。我们选择一个相位, 使得

$$N_j(\nu) = N_j = \sqrt{j}. \quad (25.27)$$

则

$$\begin{aligned} J_+ |j-1(\nu)\rangle &= \frac{1}{N_j} J_+ J_- |j(\nu)\rangle = \frac{1}{N_j} [J_+, J_-] |j(\nu)\rangle \\ &= \frac{1}{N_j} J_3 |j(\nu)\rangle = \frac{j}{N_j} |j(\nu)\rangle = N_j |j(\nu)\rangle . \end{aligned} \quad (25.28)$$

上面的方程和 (25.24) 说明 $J_\pm$ 不改变简并指标 ν 。重复 J_- 的作用, 我们发现存在标准正交态 $|j-k(\nu)\rangle$ 使得 [类似于 (25.24) 和 (25.28)]:

$$J_- |j-k(\nu)\rangle = N_{j-k} |j-k-1(\nu)\rangle , \quad (25.29a)$$

$$J_+ |j-k-1(\nu)\rangle = N_{j-k} |j-k(\nu)\rangle . \quad (25.29b)$$

因此, 归一化常数 N_{j-k} (选为实数) 满足

$$\begin{aligned} N_{j-k}^2 &= \langle j-k(\nu) | J_+ J_- | j-k(\nu) \rangle \\ &= \langle j-k(\nu) | [J_+, J_-] | j-k(\nu) \rangle + \langle j-k(\nu) | J_- J_+ | j-k(\nu) \rangle \\ &= N_{j-k+1}^2 + j - k . \end{aligned} \quad (25.30)$$

结合 (25.27), 这种递归关系可以显式展示如下:

$$N_j^2 = j, \quad N_{j-1}^2 - N_j^2 = j-1, \dots, \quad N_{j-k}^2 - N_{j-k+1}^2 = j-k . \quad (25.31)$$

对上面求和, 我们得到

$$N_{j-k}^2 = (k+1)j - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(k+1)(2j-k) . \quad (25.32)$$

令

$$j-k = m , \quad (25.33)$$

我们有

$$N_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} , \quad (25.34)$$

这也是角动量子理论的标准结论。方程 (25.32) 意味着

$$N_{j-2j} = N_{-j} = 0 . \quad (25.35)$$

因此, 在 $2j$ 次应用 J_- 在 $|j(\nu)\rangle$ 之后, 其中 j 是最高权重, 系列 (25.29a) 终止, 并且表示分解为 n 个不可约表示 ($n =$ 简并度), 每个维度 $2j+1$ 。因此, $SU(2)$ 的自旋- j 不可约表示具有 $2j+1$ 的维数, 其中 J_3 的特征值是 $j, j-1, \dots, -j$, 其中对应的特征态标记为 $|jm\rangle$ 。这些特征态是标准正交的:

$$\langle jm' | jm \rangle = \delta_{m'm} ,$$

由于 J_3 是 hermitian [c.f. (13.17) 之前的讨论]。方程 (25.29a) 和 (25.34) 意味着

$$J_+ |jm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle , \quad (25.36a)$$

$$J_- |j, m+1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m\rangle . \quad (25.36b)$$

练习 25.4 说明 $\frac{\sigma_i}{2}$, $i = 1, 2, 3$, 其中 σ_i 是由 (11.16) 给出的 Pauli 自旋矩阵, 给出一个 $SU(2)$ 的自旋- $\frac{1}{2}$ 的表示。

对于开始于最高权重 Λ 的一个不可约表示的权重系统的一般计算, 引入一些额外的术语是有用的。

定义 25.3 在不可约表示 D 中, 如果可以通过 k 个单纯根中减去最高权重 Λ 而从 Λ 得到权重 $\lambda \in \Delta_D$, 则 λ 被称为属于权重空间 Δ_D 的第 k 级 (*level*) $\Delta_D^{(k)}$ 。因此, 最高权重 Λ 属于第 0 级 $\Delta_D^{(0)}$ 。最低级权重, 由 T_D 表示, 被称为不可约表示 D 的高度 (*height*)。因此

$$\Delta_D = \Delta_D^{(0)} \cup \Delta_D^{(1)} \cup \cdots \cup \Delta_D^{(T_D)} . \quad (25.37)$$

让我们用 $S_k(D)$ 表示属于 Δ_D 的第 k 级权重 (包括重数) 的数量。然后, 不可约表示 D 的维数 N 由下式给出

$$N = 1 + S_1(D) + S_2(D) + \cdots + S_{T_D}(D) . \quad (25.38)$$

定义 25.4 整数

$$m_D \equiv \max S_k(D) \quad (25.39)$$

被称为不可约表示的宽度 (*width*) D 。

关于权重的乘法, 我们下面的定理 (给出而没有证明)。

定理 25.9 最高权重为 Λ 的一个表示 D 的一个权重 λ 的重数 ν_λ 由下面的迭代公式给出:

$$\{(\Lambda + g) \cdot (\Lambda + g) - (\lambda + g) \cdot (\lambda + g)\} \nu_\lambda = 2 \sum_{\alpha \in P^+} \sum_{k=0}^{\infty} \{(\lambda + k\alpha) \cdot \alpha\} \nu_{\lambda+k\alpha} , \quad (25.40)$$

其中, P^+ 是正根的集合, 并且

$$g \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P^+} \alpha . \quad (25.41)$$

定理 25.10 一个不可约表示 D 的权重空间 Δ_D 的各种级的重数满足以下条件:

$$S_k(D) = S_{T_D-k}(D) , \quad (25.42)$$

$$S_h(D) \geq S_{h-1}(D) \geq \cdots \geq S_1(D) \geq 1 , \quad (25.43)$$

其中

$$h \equiv \begin{cases} T_D/2 & , T_D \text{ 偶数} , \\ (T_D - 1)/2 & , T_D \text{ 奇数} . \end{cases} \quad (25.44)$$

推论 25.1 一个不可约表示 D 的权重系统的宽度 D 由下式给出

$$m_D = \begin{cases} S_h(D) & , T_D = 2h , \\ S_{h+1}(D) & , T_D = 2h + 1 . \end{cases} \quad (25.45)$$

关于不可约表示的高度和维度的显式结果由下面两个定理给出

定理 25.11 假设 Λ 是半单纯 Lie 代数的不可约表示 D 的最高权重, 则不可约表示 D 的权重系统的高度 T_D 由下式给出:

$$T_D = \sum_{i, \alpha_{(i)} \in \Pi} r_i \Lambda_{\alpha_{(i)}} , \quad (25.46)$$

其中, 求和遍历单纯根 $\alpha_{(i)}$, $\Lambda_{\alpha_{(i)}}$ 由 (25.11) 给出, 系数 r_i 完全根据 Table 25.1 中复单纯 Lie 代数 (c.f. 定理 24.7) 的 Cartan 分类给出。

定理 25.12 最高权重为 Λ 的半单纯 Lie 代数的不可约表示 D 的维数 N 由下式给出

$$N = \prod_{\alpha \in P_+} \left(\frac{\Lambda \cdot \alpha}{g \cdot \alpha} + 1 \right) , \quad (25.47)$$

其中, 连乘在正根, 而 g 在 (25.41) 中定义。

下面的定理给出了当已知最高权重时确定不可约表示的权重系统的过程。

定理 25.13 假设在半单纯 Lie 代数的不可约表示 D 中, 权重 λ 属于 $\Delta_D^{(k-1)}$ 级, 那么

$$\lambda - \alpha \in \Delta_D^{(k)} , \quad \alpha \in \Pi (\alpha \text{ 是一个单纯根}) \quad (25.48)$$

当且仅当

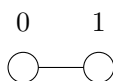
$$\frac{2(\lambda \cdot \alpha)}{\alpha \cdot \alpha} + q \geq 1 , \quad (25.49)$$

其中, 整数 q 由下面的条件确定:

$$\lambda + \alpha, \lambda + 2\alpha, \dots, \lambda + q\alpha$$

是权重, 但 $\lambda + (q+1)\alpha$ 不是一个权重。

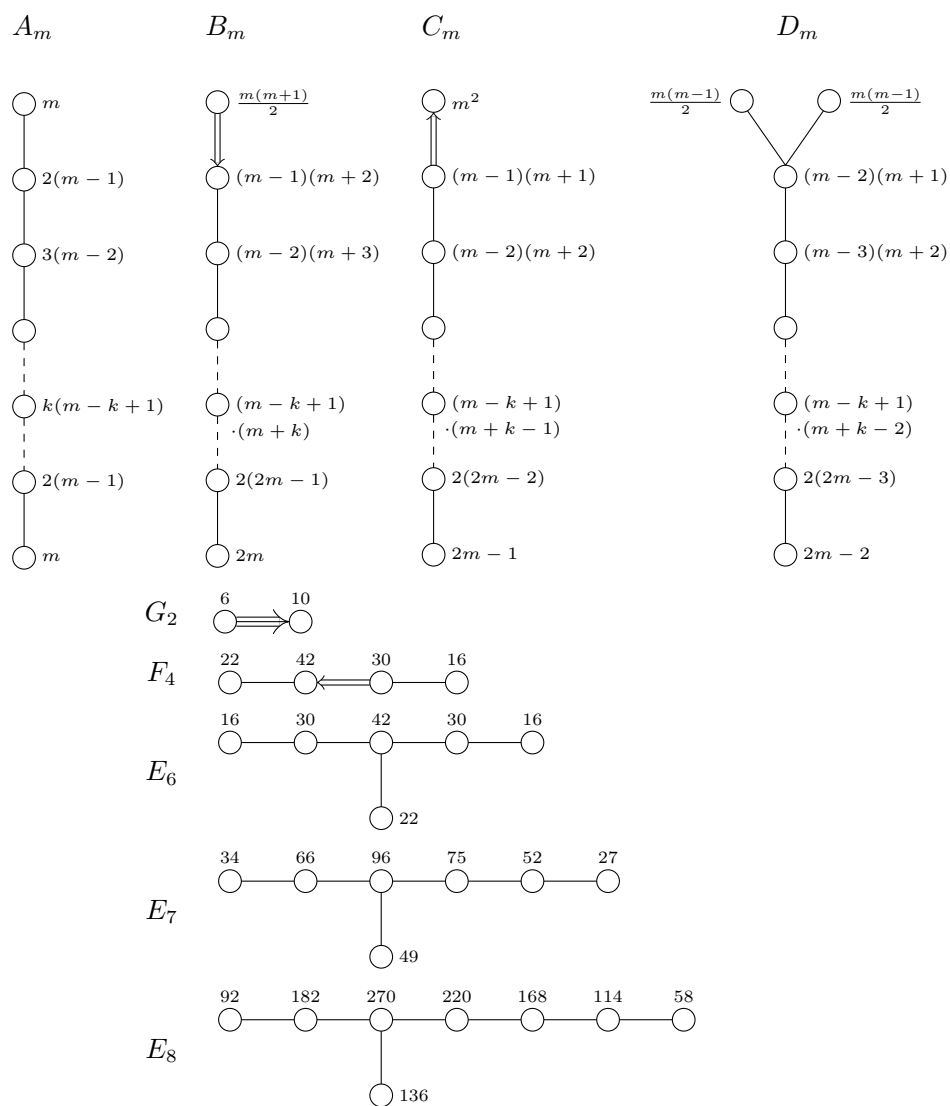
作为一个例子, 让我们计算代数 $A_2 \sim \mathcal{SU}(3)$ 的表示



的权重系统。对于这种情况, $\Lambda_{\alpha_{(1)}}$ 且 $\Lambda_{\alpha_{(2)}}$, 而 (25.18) 意味着最高权重由下式给出:

$$\Lambda = \frac{1}{3}\alpha_{(1)} + \frac{2}{3}\alpha_{(2)} = \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta) , \quad (25.50)$$

Table 25.1



其中, α 和 β 是 Figure 24.2 中的单纯根。方程 (25.46) 与 Table 25.1 一起说明该表示的高度为

$$T_D = 2(0) + 2(1) = 2 ,$$

所以有三级。为了在第一级 $\Delta_D^{(1)}$ 中找到权重, 我们考虑量 $\mathbf{\Lambda} - \alpha$ 和 $\mathbf{\Lambda} - \beta$ 。我们有

$$\frac{2(\mathbf{\Lambda} \cdot \alpha)}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{2(\alpha + 2\beta) \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} \right) = \frac{2}{3} \left(1 + 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 0 , \quad (25.51)$$

$$\frac{2(\mathbf{\Lambda} \cdot \beta)}{\beta \cdot \beta} = \frac{2(\alpha + 2\beta) \cdot \beta}{\beta \cdot \beta} = \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \beta} + 2 \right) = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) = 1 . \quad (25.52)$$

由于 $\mathbf{\Lambda}$ 是最高权重, $\mathbf{\Lambda} - \alpha$ 和 $\mathbf{\Lambda} - \beta$ 不是一个权重。所以对于单纯根 α 和 β , 在 (25.49) 中 $q = 0$ 。接着则是

$$\frac{2(\mathbf{\Lambda} \cdot \alpha)}{\alpha \cdot \alpha} + q = \frac{2(\mathbf{\Lambda} \cdot \alpha)}{\alpha \cdot \alpha} = 0 < 1 , \quad (25.53)$$

$$\frac{2(\mathbf{\Lambda} \cdot \beta)}{\beta \cdot \beta} + q = \frac{2(\mathbf{\Lambda} \cdot \beta)}{\beta \cdot \beta} = 1 , \quad (25.54)$$

并且条件 (25.49) 仅对单纯根 β 满足。因此 $\mathbf{\Lambda} - \alpha$ 不是权重而 $\mathbf{\Lambda} - \beta = \frac{1}{3}(\alpha - \beta)$ 是第一级 $\Delta_D^{(1)}$ 中的唯一权重。为了继续第二级, 我们计算

$$\frac{2(\mathbf{\Lambda} - \beta) \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{2(\alpha - \beta) \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha} \right) = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = 1 , \quad (25.55)$$

$$\frac{2(\mathbf{\Lambda} - \beta) \cdot \beta}{\beta \cdot \beta} = \frac{2(\alpha - \beta) \cdot \beta}{\beta \cdot \beta} = \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha \cdot \beta}{\beta \cdot \beta} - 1 \right) = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) = -1 . \quad (25.56)$$

写出系列

$$\mathbf{\Lambda} - \beta, (\mathbf{\Lambda} - \beta) + \alpha, \dots , \quad \mathbf{\Lambda} - \beta, (\mathbf{\Lambda} - \beta) + \beta, \dots , \quad (25.57)$$

我们看到第一种情况 $q = 0$ ($\mathbf{\Lambda} + \alpha - \beta$ 不是一个权重), 第二种情况 $q = 1$ (因为 $\mathbf{\Lambda} - \beta + \beta = \mathbf{\Lambda}$ 是最高权重)。因此

$$\frac{2(\mathbf{\Lambda} - \beta) \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha} + q = 1 + 0 = 1 , \quad (25.58)$$

$$\frac{2(\mathbf{\Lambda} - \beta) \cdot \beta}{\beta \cdot \beta} + q = -1 + 0 < 1 . \quad (25.59)$$

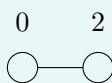
从条件 (25.49) 得出 $\mathbf{\Lambda} - \beta - \alpha = -\frac{1}{3}(2\alpha + \beta)$ 是第二级 $\Delta_D^{(2)}$ 中的唯一权重, 而 $(\mathbf{\Lambda} - \beta) - \beta$ 不是一个权重。我们不需要再进一步, 因为已经确定只有三级。 $A_2 \sim SU(3)$ 的不可约表示 ($\Lambda_\alpha = 0, \Lambda_\beta = 1$) 的整个权重系统由下式给出:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} &= \frac{1}{3}(\alpha + 2\beta) \in \Delta_D^{(0)} , \\ \mathbf{\Lambda} - \beta &= \frac{1}{3}(\alpha - \beta) \in \Delta_D^{(1)} , \\ \mathbf{\Lambda} - \beta - \alpha &= -\frac{1}{3}(2\alpha + \beta) \in \Delta_D^{(2)} . \end{aligned} \quad (25.60)$$

我们有 $S_1(D) = 1, S_2(D) = 1$ 。因此, 这种表示的宽度是 $m_D = S_1(D) = 1$, 并且该表示的维

数是 3 [用过 (25.38)]。

练习 25.5 找到 A_2 的不可约表示

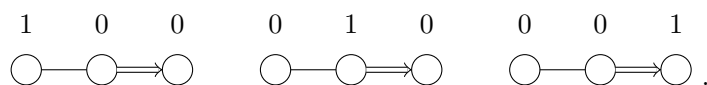


的权重系统。

在半单纯 Lie 代数的所有不可约表示中，所谓的基本表示和初级表示尤为重要。

定义 25.5 除了值为 1, 所有 $\Lambda_{\alpha_{(i)}} (i = 1, \dots, m = \text{代数的秩})$ 为 0 的一个不可约表示被称为一个**基本表示** (*fundamental representation*)。

秩- m 代数有 m 个基本表示。举例, C_3 的三个基本表示为



定义 25.6 值为 1 (对于 $\Lambda_{\alpha_{(i)}}$) 连接到 Dynkin 图的末位圆圈的基本表示称为一个**初级表示** (*primary representation*)。

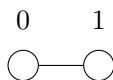
举例, C_3 的两个主要表示是



初级表示的重要性取决于以下事实 (表述而没有证明)。

定理 25.14 半单纯 Lie 代数的所有根都可以用代数的一个初级表示的权重来表达。

举例, A_2 的表示



显然是一个初级表示, 其权重已经计算出来并在 (25.60) 中给出。这些权重记为

$$\lambda_{(1)} \equiv \Lambda, \quad \lambda_{(2)} \equiv \Lambda - \beta, \quad \lambda_{(3)} \equiv \Lambda - (\alpha + \beta).$$

则对于单纯根 α 和 β , 可以求解方程 (25.60), 因此对于 A_2 的所有根, 可以写成 $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}$ 和 $\lambda_{(3)}$ 的形式。

定理 25.15 一个半单纯 Lie 代数的任意不可约表示的最高权重 Λ 可以写成代数的一个初级表示的权重 $\lambda_{(k)}$ 的线性组合:

$$\Lambda = \sum_k c_k \lambda_{(k)}, \quad (25.61)$$

其中, 系数 c_k 仅取决于 m 个量 [c.f. (25.11)]

$$\Lambda_{\alpha_{(i)}} = \frac{2\Lambda \cdot \alpha_{(i)}}{\alpha_{(i)} \cdot \alpha_{(i)}}, \quad i = 1, \dots, m,$$

其中, $\alpha_{(i)}$ 为单纯根和 m 为代数的秩。

定理 25.16 假设 [c.f. (25.41)]

$$g \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in P^+} \alpha ,$$

(所有正根的和的一半), 则有

i) 对于一个单纯根 $\alpha \in \Pi$ 有

$$g_\alpha \equiv \frac{2(g \cdot \alpha)}{\alpha \cdot \alpha} = 1 ; \quad (25.62)$$

ii) g 可以写成初级表示的权重 $\lambda_{(k)}$ 的线性叠加:

$$g = \sum_k g_k \lambda_{(k)} , \quad (25.63)$$

其中, g_k 是代数的数值常数特征。

关于如何根据 Cartan 分类实现上述三个定理的具体细节可以在 Lie 代数的标准参考文献中找到 (参见, 举例, W. Foulton 和 J. Harris, 1991), 并且这里将不给出。

运用定理 25.12 的 (25.47) 的结果, 结合 (25.61) 和 (25.63), 可以用 c_k 和 g_k 表达不可约表示的维度 N , 因此最终仅用 $\Lambda_{\alpha_{(i)}}$ 表达 [c.f. (25.11)]。举例, 对于代数 $A_2 \sim SU(3)$, 各种不可约表示的维度由下式给出

$$N = (1 + \Lambda_{\alpha_{(1)}}) (1 + \Lambda_{\alpha_{(2)}}) \left(1 + \frac{\Lambda_{\alpha_{(1)}} + \Lambda_{\alpha_{(2)}}}{2} \right) . \quad (25.64)$$

维度记为 $N(\lambda_{\alpha_{(1)}}, \lambda_{\alpha_{(2)}})$, 我们因此有

$$\begin{aligned} N(0,0) &= 1 , \\ N(1,0) &= N(0,1) = 3 , \\ N(1,1) &= 8 , \\ N(2,0) &= N(0,2) = 6 , \\ N(1,2) &= N(2,1) = 15 , \\ N(2,2) &= 27 , \\ N(3,0) &= N(0,3) = 10, \text{等.} \end{aligned} \quad (25.65)$$

表示 (j, i) 实际上是 (i, j) 的复共轭表示。这可以看作如下。回想一下定义代数的对易关系 (24.31) 到 (24.34)。使用相同的符号 H_i 和 E_α 来表达特定表示中的各个表示矩阵, 以及事实对于一个一般矩阵 A , 复共轭矩阵 $\bar{A}$ 由 $(A^\dagger)^T$ (hermitian 共轭矩阵的转置) 给出,

$(H_i)^\dagger = H_i$, $E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}$ 和 (24.77), 方程 (24.31) 至 (24.34), 被视为矩阵方程, 等价于

$$[-\overline{H_i}, -\overline{H_j}] = 0, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (25.66)$$

$$[-\overline{H_i}, -\overline{E_{-\alpha}}] = \alpha_i (-\overline{E_{-\alpha}}), \quad (25.67)$$

$$[-\overline{E_{-\alpha}}, -\overline{E_\alpha}] = \alpha^i (-\overline{H_i}), \quad (25.68)$$

$$[-\overline{E_{-\alpha}}, -\overline{E_{-\beta}}] = N_{\alpha\beta} (-\overline{E_{-\alpha-\beta}}). \quad (25.69)$$

因此, 作为表示矩阵

$$H_i \longrightarrow -\overline{H_i}, \quad E_\alpha \longrightarrow -\overline{E_{-\alpha}}, \quad (25.70)$$

也是一个表示, 称为复共轭表示, 记为 $\overline{D}$, 原始的为 D 。 $\overline{D}$ 与 D 的尺寸相同, $\overline{D}$ 的权重的集合是 D 的权重的集合的负数。其次是 $\overline{D}$ 的最高的权重是 D 的最低权重的负数。如果 $\overline{D}$ 等价于 D , 则表示 D 被称为是**实的 (real)**, 否则它被称为是**复的 (complex)**。因此, 如果 D 的最低权重是 D 的最高权重的负数, 则 D 是实数。举例, 对于 $SU(3)$, 很容易看出 $(0, 1)$ 的最高权重是 $(1, 0)$ 的最低权重的负数。因此, $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 是彼此的复共轭表示。在物理学文献中, 通过表示的维度确定表示是很常见的。因此我们写 $(1, 0) = \textcircled{3}$ 和 $(0, 1) = \overline{\textcircled{3}}$ 。现在考虑 $SU(3)$ 的一个表示 (i, j) 。它可以被认为是由初级表示 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 构成的。事实上, (i, j) 的最高权重由下式给出

$$\Lambda_{(i,j)} = i\Lambda_{(1,0)} + j\Lambda_{(0,1)}, \quad (25.71)$$

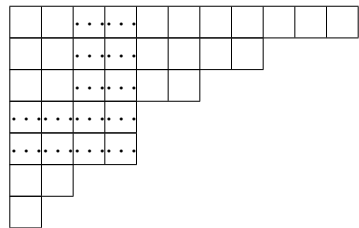
其中, $\Lambda_{(1,0)}$ 和 $\Lambda_{(0,1)}$ 分别是 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 的最高权重。但是 (j, i) 的最低权重是由 $(1, 0)$ 的最低权重的 j 倍加上最低权重 $(0, 1)$ 的最低权重的 i 倍给出的, 或者

$$-j\Lambda_{(0,1)} - i\Lambda_{(1,0)},$$

这只是 (i, j) 的最高权重 $\Lambda_{(i,j)}$ 的负数。因此, (j, i) 是 (i, j) 的复共轭表示。形如 (i, i) 的表示必然是实的。

我们在本章的结尾部分描述了一个过程 (没有证明): 使用 Young 图来确定 Lie 代数的不可约表示的直积的 Clebsch-Gordon 分解为不可约表示的和。该过程与 Chapter 21 中描述的群表示非常相似 [c.f. 讨论引出 (21.13)]。

给定一个最高权重为 Λ 的不可约表示, 并且以 m 个非负整数 $\Lambda_{\alpha_{(1)}}, \dots, \Lambda_{\alpha_{(m)}}$ 为特征, 其中 $\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(m)}$ 是代数的单纯根, 对应一个 Young 图形式如下


(25.72)

最多有 m 行, 第一行有

$$\Lambda_{\alpha_{(m)}} + \Lambda_{\alpha_{(m-1)}} + \dots + \Lambda_{\alpha_{(3)}} + \Lambda_{\alpha_{(2)}} + \Lambda_{\alpha_{(1)}} \text{ 个方格,}$$

第二行有

$$\Lambda_{\alpha(m)} + \Lambda_{\alpha(m-1)} + \cdots + \Lambda_{\alpha(3)} + \Lambda_{\alpha(2)} \text{ 个方格,}$$

等。并且第 m 行有 $\Lambda_{\alpha(m)}$ 个方格。因此总共有

$$\Lambda_{\alpha(1)} + 2\Lambda_{\alpha(2)} + \cdots + m\Lambda_{\alpha(m)}$$

个方格。举例，对应于表示 $(\Lambda_{\alpha(1)} = 1, \Lambda_{\alpha(2)}(2) = 2)$ 的 Young 图是

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}.$$

完全没有方格的图，或仅包含多于 m 个方格的列的图都被视为对应于表示

$$\Lambda_{\alpha(1)} = \Lambda_{\alpha(2)} = \cdots = \Lambda_{\alpha(m)} = 0,$$

这是一维的。Clebsch-Gordon 分解的规则与 Chapter 21[在以 (21.13) 结尾的段落] 中描述的规则完全相同，最后的附加步骤是：任何超过 m ($=$ 代数的秩) 的列可以从图中删除。如果在从图中删除之后没有留下方格，则该图对应于一维表示。我们用以下示例来说明对于 $SU(3)$ ：

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} = (2, 0) \oplus (0, 1), \quad (25.73)$$

或者

$$\textcircled{3} \otimes \textcircled{3} = \textcircled{6} \oplus \overline{\textcircled{3}}; \quad (25.74)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & 1 \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} = (1, 1) \oplus (0, 0), \quad (25.75)$$

或者

$$\overline{\textcircled{3}} \otimes \textcircled{3} = \textcircled{8} \oplus \textcircled{1}; \quad (25.76)$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 1 & 1 \\ \hline & & 2 & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & 1 & 1 \\ \hline & & 2 & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & 2 \\ \hline \end{array} \\ &\oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & 2 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & 1 \\ \hline & & 2 \\ \hline \end{array} \\ &= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \\ &\oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \oplus \bigcirc, \end{aligned} \quad (25.77)$$

或者

$$\textcircled{8} \otimes \textcircled{8} = \textcircled{27} \oplus \textcircled{10} \oplus \overline{\textcircled{10}} \oplus \textcircled{8} \oplus \textcircled{8} \oplus \textcircled{1}. \quad (25.78)$$

练习 25.6 对于 $SU(3)$ 的找到 $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$ 的 Clebsch-Gordon 分解。

最后，我们给出了一个方便的公式来计算由特定 Young 图确定的 $SU(n)$ 的不可约表示

的维度。

定理 25.17 假设对应于 $SU(n)$ 的表示 D 的 Young 图在第一行中有 r_1 个方格，在第二行中有 r_2 个方格， $\dots$ ，在第 $(n-1)$ 行 $[n-1 = SU(n)$ 的秩] 中有 r_{n-1} 个方格。然后通过以下步骤得到 D 的维度 $N_{(D)}$ ：

(1) 将数字 $n, n+1, n+2, \dots, n+(r_1-1)$ 从左到右依次放入第一行方格中；将数字 $n-1, n, n+1, \dots, (n-1)+(r_2-1)$ 从左到右依次放入第二行方格中；将数字 $n-2, n-1, \dots, (n-2)+(r_3-1)$ 从左到右依次放入第三行方格中，等等，直到所有的方格都被填满。

(2) 将方格中的所有数字相乘，称为结果 M 。

(3) 计算 Young 图的所有钩长的乘积 (参见定义 20.3)，称为结果 h 。

(4)

$$N_{(D)} = \frac{M}{h} . \quad (25.79)$$

作为示例，考虑 $SU(3)$ 的 $D_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$ 和 $SU(4)$ 的 $D_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ 。我们有

$$N_{(D_1)} = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & & \\ \hline \end{array} \right) \div \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline \end{array} \right) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 27 , \quad (25.80)$$

$$N_{(D_2)} = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 3 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \right) \div \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 1 & \\ \hline \end{array} \right) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 15 . \quad (25.81)$$

26. $SU(3)$ 和强相互作用

行列式为 1 的 3×3 么正矩阵群 $SU(3)$ 的 Lie 代数 $\mathcal{SU}(3)$ 的不可约表示已经在强相互作用物理中找到了众多有趣的应用。在这些之中我们将重点关注早期的一个，称为强子（重子和介子）的**味道 (flavor)**— $SU(3)$ 夸克模型。

我们将开始于在物理文献中常用的生成元 [对于 $SU(3)$] 的一个标准集合。这些生成元会用所谓的 Gell-Mann 矩阵 (Gell-Mann matrices) $G_i, i = 1, \dots, 8$ 的形式给出，它们是 Pauli 自旋矩阵的推广，并且对应于 $SU(3)$ 的三维 $(1, 0)$ 表示。对于任意 $g \in SU(3), g = \exp(\frac{i}{2}\epsilon^i G_i), i = 1, \dots, 8$ 有

$$\begin{aligned} G_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & G_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & G_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ G_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & G_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & G_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & (26.1) \\ G_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & G_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

生成元为

$$T_i = \frac{G_i}{2}, \quad i = 1, \dots, 8. \quad (26.2)$$

注意到所有的生成元都是无迹 hermitian 矩阵。这些性质的要求来自于 $SU(n)$ 的 Lie 代数中的任意元素；无迹来自于么模性 (行列式 = 1) 的要求，hermitian 性质来自于么正性的要求。

也注意到

$$\mathrm{Tr}(T_i T_j) = \frac{1}{2} \delta_{ij} . \quad (26.3)$$

T_1, T_2 和 T_3 生成 $SU(3)$ 的一个子群同构于 $SU(2)$, 称为**同位旋子群 (isospin subgroup)**。实际上, G_1, G_2, G_3 的左上方 2×2 分块正好是 Pauli 自旋矩阵 σ_1, σ_2 和 σ_3 [c.f. (11.16)]。由于 G_3 是对角化的, 我们将 T_3 作为 Cartan 子代数的一个元素。很容易地看出唯一与 T_3 对易的其它生成元是 T_8 。因此, Cartan 子代数是二维的, 并且我们设

$$H_1 = T_3, \quad H_2 = T_8 . \quad (26.4)$$

由于 T_3 和 T_8 已经是对角化的, 同时特征向量是

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left| 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle, \quad (26.5)$$

其中, $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$ [c.f. (25.5)] 是非简并态满足

$$H_1 |\lambda_1 \lambda_2\rangle = \lambda_1 |\lambda_1 \lambda_2\rangle, \quad H_2 |\lambda_1 \lambda_2\rangle = \lambda_2 |\lambda_1 \lambda_2\rangle . \quad (26.6)$$

该表示的权重向量是

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right),$$

第一个权重最高。我们可以在 $\lambda_1 - \lambda_2$ 平面上绘制这些权重向量 λ (Figure 26.1)。

为了比较, 在同一个平面上绘制根向量 (c.f. Figure 24.2) $\pm\alpha, \pm\beta, \alpha + \beta, -\alpha - \beta$ 也是有用的。注意到在 Figure 26.2 中, 我们也已经用两个叉在原点指出两个零根。

用生成元 E_α 的表达式不难计算出升降算符 T_i 。我们有

$$\begin{aligned} E_{(\pm 1, 0)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_1 \pm iT_2) , \\ E_{(\pm 1/2, \pm \sqrt{3}/2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_4 \pm iT_5) , \\ E_{(\mp 1/2, \pm \sqrt{3}/2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (T_6 \pm iT_7) . \end{aligned} \quad (26.7)$$

练习 26.1 验证 (26.7) 中的三个方程。

开始于 $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\rangle$, 特征向量对应于最高权重, (26.5) 中其它哪个由下式得到

$$\left| 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle = E_{(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle = E_{-\beta} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle, \quad (26.8)$$

$$\begin{aligned} \left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle &= E_{(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})} \left| 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle = E_{-\alpha} \left| 0, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle \\ &= E_{-\alpha} E_{-\beta} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right\rangle . \end{aligned} \quad (26.9)$$

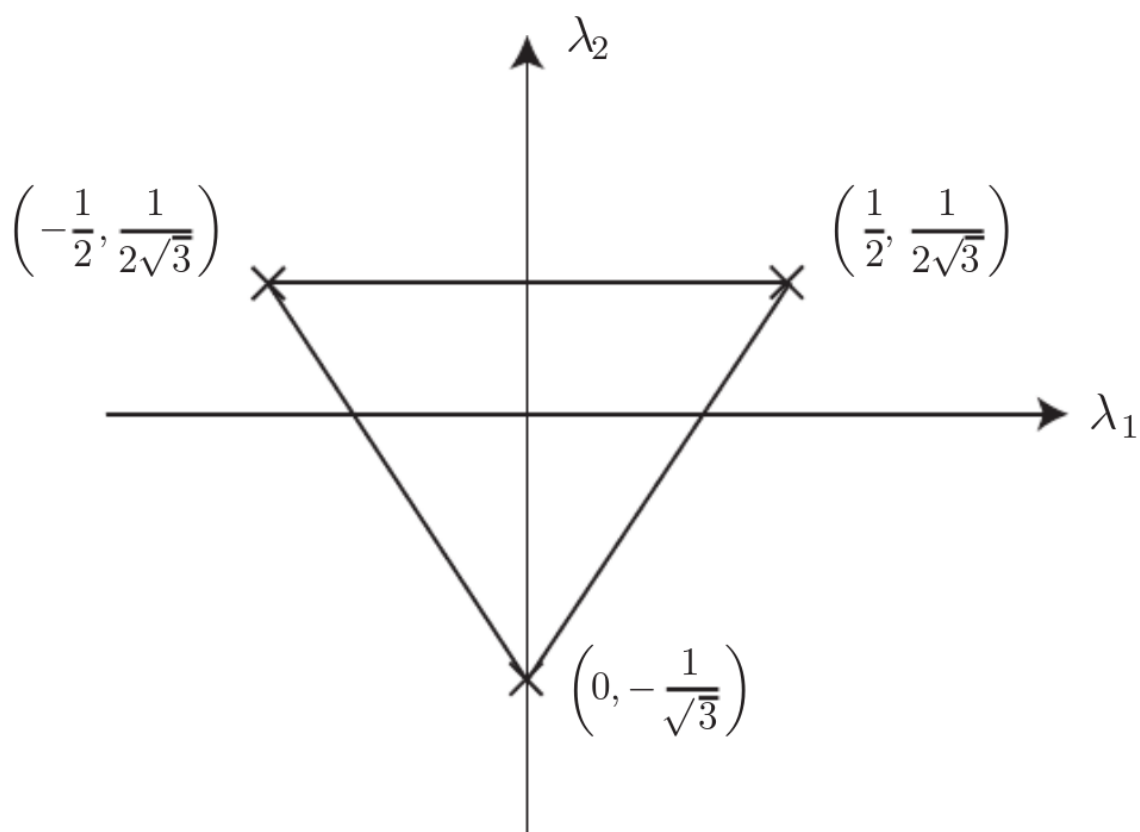
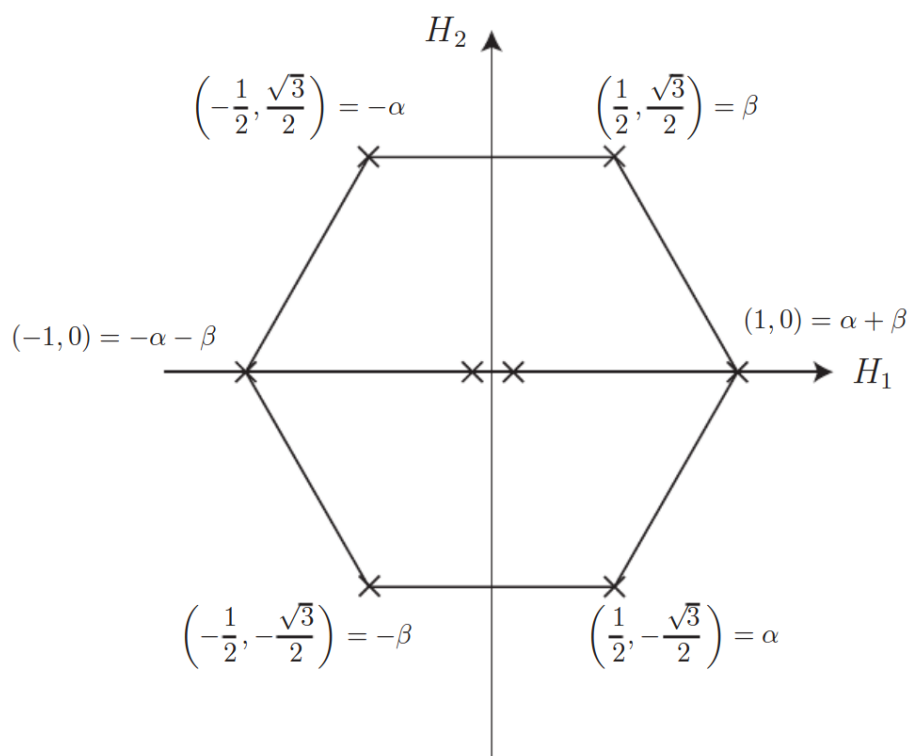
Figure 26.1. $(0, 1) = \textcircled{3}$ 表示

Figure 26.2

每个都是通过应用降算符以独特的方式得到的。由于最高权重的特征向量是非简并的，其它两个特征向量也是非简并的。事实上，对于半单 Lie 代数的任意表示的特征向量的一个类似且更一般的表述是：通过在最高权重特征向量上应用降算符的唯一方法得到的任何状态都是非简并的。

从我们上一章的讨论中 [(25.77) 之后]，另一个主要表示的权重， $(1, 0) = \textcircled{3}$ 的复共轭表示，即： $\overline{\textcircled{3}}$ ，仅是这些 $\textcircled{3}$ 的负数。这些可以表示在 $\lambda_1 - \lambda_2$ 平面如 Figure 26.3。 $\textcircled{3}$ 的最高权重是 $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$ ，如前所示，是 $\textcircled{3}$ 的最低权重 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}})$ 的负数。

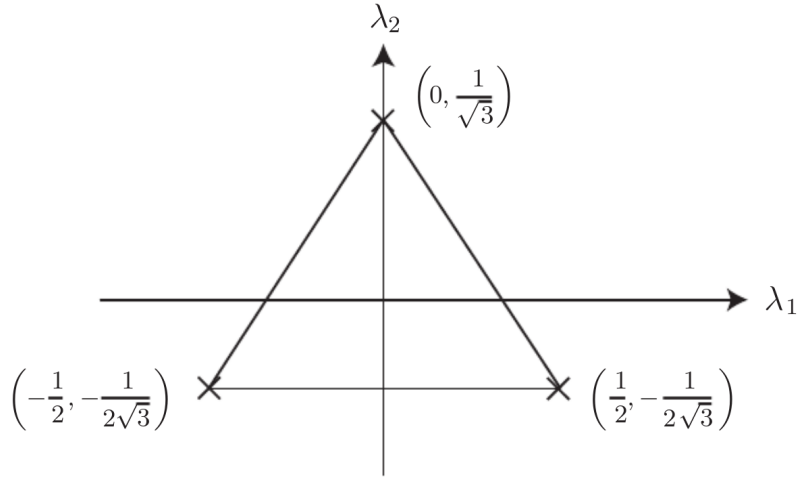


Figure 26.3. $(0, 1) = \overline{\textcircled{3}}$ 表示

回忆一下 $SU(3)$ 的任何不可约表示的最高权重由 (25.18) 给出，简单的根由下式给出

$$\alpha_{(1)} = \beta = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \alpha_{(2)} = \alpha = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (26.10)$$

一旦知道最高权重，定理 25.13 已经给出了确定完全权重系统的一般过程。在没有说明显式计算的情况下，我们将对于权重系统的表示

$$(2, 0) = \textcircled{6}, \quad (3, 0) = \textcircled{10}, \quad (2, 1) = \textcircled{15}$$

分别在 Figure 26.4, 26.5 和 26.6 中呈现结果。

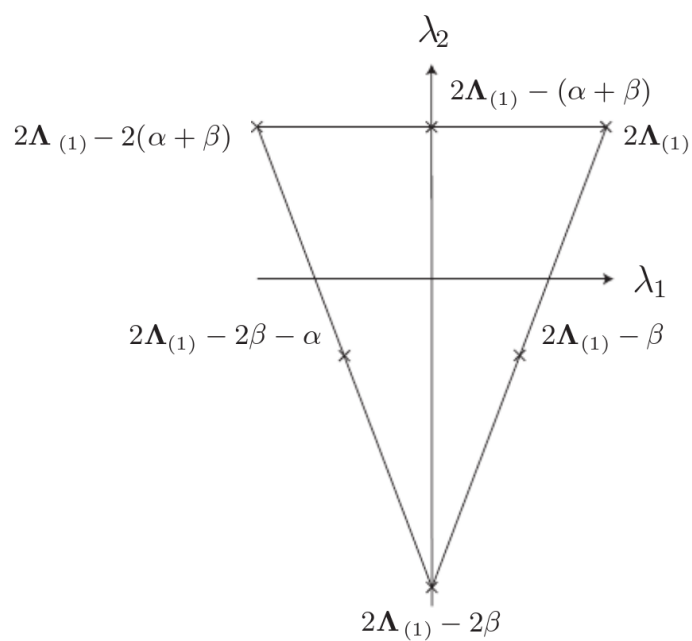
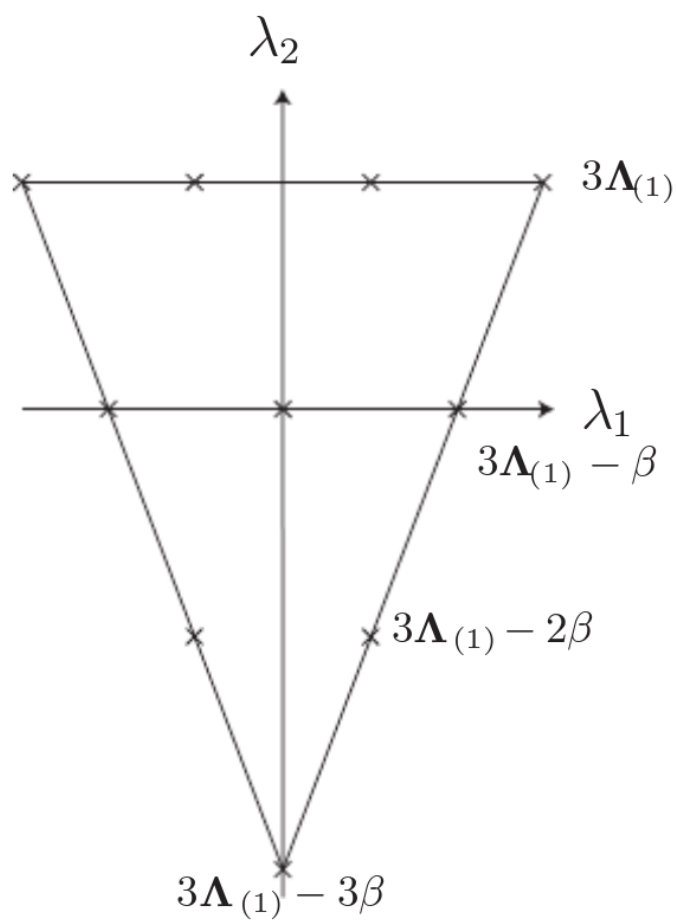
在这些 Figure 中

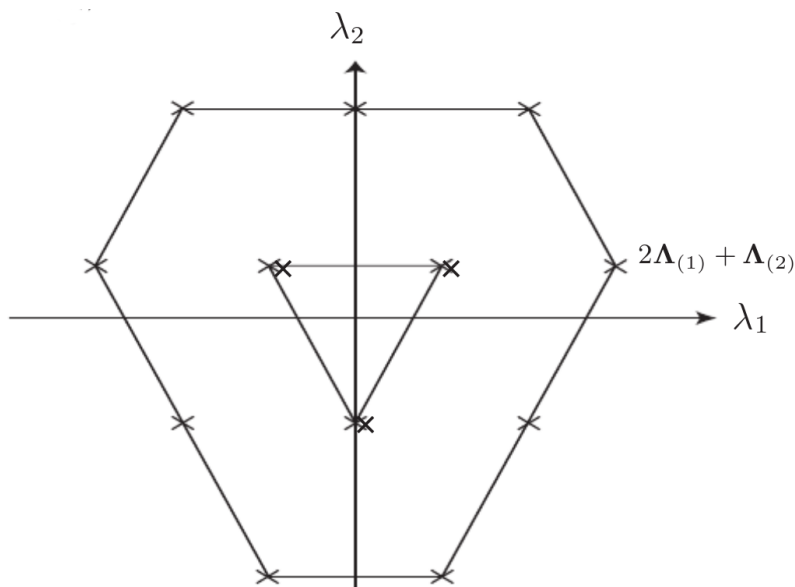
$$\Lambda_{(1)} \equiv \Lambda(1, 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad \Lambda_{(2)} \equiv \Lambda(0, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad (26.11)$$

权重由叉表示，简并权重通过多个叉表示（其中叉的数量等于简并度）。

Figure 26.4, 26.5 和 26.6 表明 $SU(3)$ 的任意不可约表示的权重图是三角形或六边形。任意在权重最外层的权重始终是非简并的。从任何六边形层向内一层向内每进一步增加一个简并度，直到达到三角形层，此时简并度在进一步移动时保持不变。

最初的夸克模型假设所有强子都由三种夸克——up, down, strange——和它们各自的反粒子组成，每个反粒子都是带有内禀自旋 $J = \frac{1}{2}$ 的带电费米子。up, down 和 strange 夸克由

Figure 26.4. $(2,0) = \textcircled{6}$ 表示Figure 26.5. $(3,0) = \textcircled{10}$ 表示

Figure 26.6. $(2, 1) = \textcircled{15}$ 表示

$SU(3)$ [或 $SU(3)$] 的三维不可约表示空间中的标准正交基向量表示, 并且将分别被记为 $|u\rangle, |d\rangle$ 和 $|s\rangle$ 。该表示空间取为 $(1, 0) = \textcircled{3}$ (c.f. Figure 26.1)。反粒子状态通过 $\textcircled{3}$ 的共轭表示类似地表示, 即: $(0, 1) = \overline{\textcircled{3}}$; 并且对应的基态记为 $|\bar{u}\rangle, |\bar{d}\rangle$ 和 $|\bar{s}\rangle$ 。在 $SU(3)$ 下, $\textcircled{3}$ 中的状态根据 Gell-Mann 矩阵给出的生成元 T_i [(26.2)] 进行变换。注意, 同位旋 $SU(2)$ 是味道 $SU(3)$ 的一个子群, 其中 $|u\rangle = |\uparrow\rangle$ 和 $|d\rangle = |\downarrow\rangle$ 组成**同位旋单态 (isospin singlet)**[回顾 (26.3) 后面的讨论]。因此, 可以从 $\textcircled{3} \otimes \overline{\textcircled{3}}$ 表示的积获得复合夸克——反夸克状态。从 $\textcircled{3} \otimes \textcircled{3} \otimes \textcircled{3}$ 得到 3-夸克态。

我们已经从 (25.70) 知道

$$\textcircled{3} \otimes \overline{\textcircled{3}} = \textcircled{8} \oplus \textcircled{1}. \quad (26.12)$$

运用从 (25.68) 的结论, 我们得到

$$\textcircled{3} \otimes \textcircled{3} \otimes \textcircled{3} = (\textcircled{6} \oplus \overline{\textcircled{3}}) \otimes \textcircled{3} = (\textcircled{6} \otimes \textcircled{3}) \oplus (\overline{\textcircled{3}} \otimes \textcircled{3}). \quad (26.13)$$

则我们可以用 Young 图方法来减少不可约表示的直积 [类似于导出 (25.67) 到 (25.71) 的过程] 来得到

$$\begin{aligned} \textcircled{6} \otimes \textcircled{3} &= \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & 1 \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square & \square \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \\ &= (3, 0) \oplus (1, 1) = \textcircled{10} \oplus \textcircled{8}. \end{aligned} \quad (26.14)$$

因此

$$\textcircled{3} \otimes \textcircled{3} \otimes \textcircled{3} = \textcircled{10} \oplus \textcircled{8} \oplus \textcircled{8} \oplus \textcircled{1}. \quad (26.15)$$

夸克——反夸克状态, 被已知为**介子 (meson)**, 在本质上被实现为 $\textcircled{8}$ 的**八重态 (octet)**, 而 3-夸克 (或 3-反夸克) 状态, 重子及其反粒子, 以 $\textcircled{8}$ 中的八重态和 $\textcircled{10}$ 中的**十重态 (decaplet)** 出现。介子和重子一起构成了所谓的**强子 (hadron)**。任何这些多重态中粒子的质量实际上并不完全相同, 因此 $SU(3)$ 对称性仅是近似的。我们将不会详细介绍破坏这种对称性的相互作用

用。

在强子之间，我们有内部对称性 I (同位旋 (isospin)), S (奇异数 (strangeness)), B (重子数 (baryon number)) 和 Q (电荷数 (electric charge))。 S, B 和 Q 标记同构于 $U(1)$ 的三个相互对易规范群的一维表示，因此这些量子数是可相加的。在这些 $U(1)$ 变换 [类似于 (4.10) 和 (4.21)] 下，我们有

$$|\rangle \rightarrow \exp(-i\alpha B)|\rangle, \quad |\rangle \rightarrow \exp(-i\beta Q)|\rangle, \quad |\rangle \rightarrow \exp(-i\gamma S)|\rangle, \quad (26.16)$$

其中, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ 和 $|\rangle$ 表示一个任意的强子态。我们安排夸克 $B = \frac{1}{3}$ 。因此，介子有 $B = 0$ 同时重子有 $B = \pm 1$ 。

I^2 [特征值为 $I(I+1)$] 为 Casimir 算符并且 I_3 (同位旋的第三分量，特征值为 $I, I-1, \dots, -I$) 为生成同位旋子代数 $SU(2)$ 的 Cartan 子代数的唯一元素。如果我们定义超荷 (hypercharge) Y 通过

$$Y \equiv B + S, \quad (26.17)$$

则我们有：对于所有强子，经验规律

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (26.18)$$

此外，观察到在平面图像上绘制已知强子的位置 (I_3, Y) 时，它们很明显的出现八重态和十重态。因此我们有，举例，自旋为 0 的 Π -八重态介子 (Figure 26.7)，自旋为 $\frac{1}{2}$ 的 N -八重态重子 (Figure 26.8) 和自旋为 $\frac{3}{2}$ 的 Δ -十重态共振态 (Figure 26.9)。

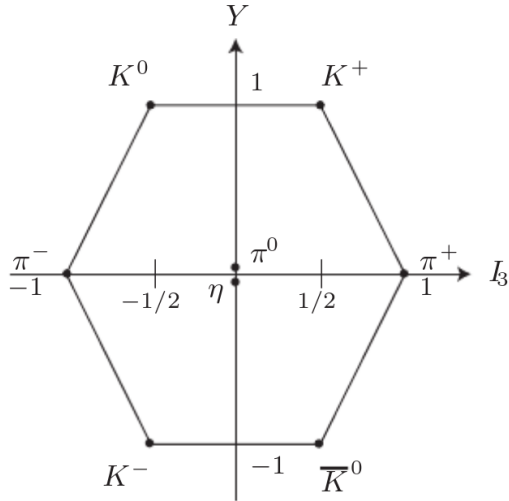


Figure 26.7. Π -八重态 (自旋为 0)

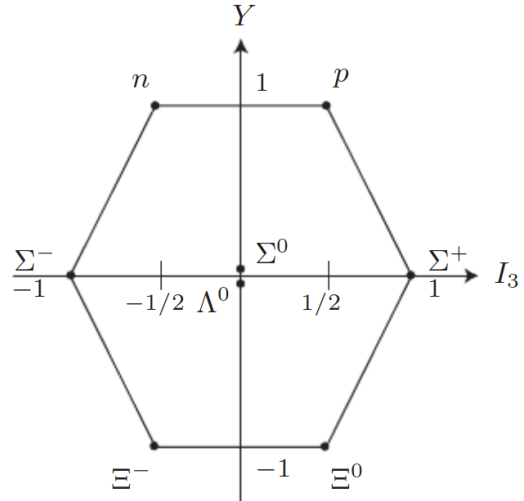


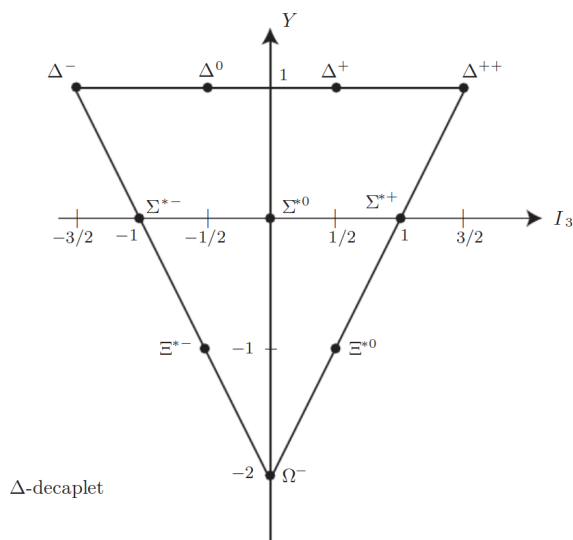
Figure 26.8. N -八重态 (自旋为 0)

将 Figure 26.7, 26.8 和 26.9 与 Figure 26.2 和 26.5 比较，可以看出超荷算符 (也写作 Y) 与 T_8 [(26.2)] 由下式相关联

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} T_8, \quad (26.19)$$

同时

$$I_3 = T_3. \quad (26.20)$$

Figure 26.9. Δ -十重态

练习 26.2 验证 (26.18), 与 Q, I_3 和 Y 相关, 对于 Figure 26.7, 26.8 和 26.9 所示的所有强子都满足。

如前所示, 夸克的三种味道 u, d 和 s 出现在 $Y - I_3$ 图中, 如 Figure 26.10所示。

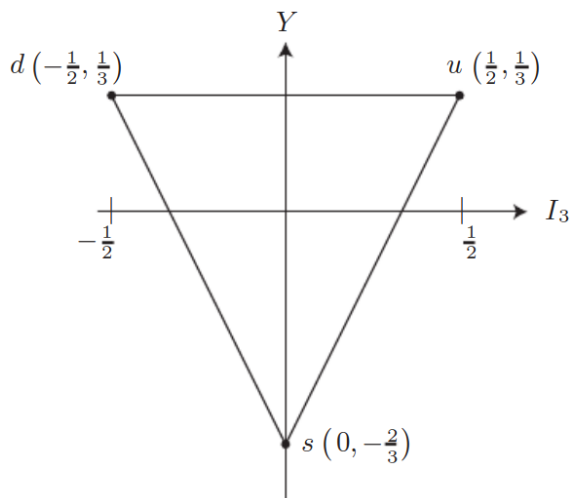


Figure 26.10

方程 (26.18) 说明 u 夸克有 $\frac{2}{3}$ 的电荷, 而 d 和 s 夸克各自有 $-\frac{1}{3}$ 的电荷 (以 e 为单位, 质子所带电荷)。

练习 26.3 说明依赖于夸克的基 [c.f.(26.5)]:

$$\begin{aligned} |u\rangle &= |\lambda_1, \lambda_2\rangle = \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right\rangle, \\ |d\rangle &= |\lambda_1, \lambda_2\rangle = \left|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right\rangle, \\ |s\rangle &= |\lambda_1, \lambda_2\rangle = \left|0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle, \end{aligned} \quad (26.21)$$

其中, λ_1 和 λ_2 分别是 T_3 和 T_8 的特征值, I_3, Y, S 和 Q 的矩阵表示由下式表示

$$I_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (26.22)$$

$$S = Y - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = I_3 + Y/2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (26.23)$$

如前所述, 味道- $SU(3)$ 只是一种近似的对称性。在标准模型 (standard model) 呈现的目前图片中, 有六种味道夸克, 分成三个世代, 每个世代有两种味道: $(u, d), (c, s)$ 和 (t, b) , 其中, 除了 u, d, s 已经遇到了之外, 还有 c, t, b 分别表示 **charm**, **top**, **bottom** 夸克。由于狭义相对论要求的自旋和统计之间的关系, 夸克被要求有另一个内部量子数, 称为颜色 (color), 它可以假设成三个值。颜色是电动力学中电荷的类比, 并被理解为负责强相互作用的规范场的源, 称为**胶子场 (gluon field)**。在物理学文献中, 强相互作用的规范群 (见 Chapter 37) 是 $SU(3)$ [与味道- $SU(3)$ 相对] 称为**颜色- $SU(3)$ (color- $SU(3)$)**。类似于术语 “电动力学”, 强相互作用的动力学理论称为**色动力学 (chromodynamics)**。

在本章结束时, 我们将指定 $SU(3)$ 的各种不可约表示的 Young 图和对应的张量特征标。回忆 (25.66), Young 图最多只有两行需要考虑, 因为 $SU(3)$ 的秩是 2。考虑如此图的一般例子:

$$[m+n, m, 0] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & \cdots & & & \\ \hline & & & \cdots & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline \end{array}, \quad (26.24)$$

根据定理 21.2, 这等价于 $[n, 0, -m]$, 它对应于如下形式的张量

$$x_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m},$$

通过 Levi-Civita 张量升高指标从 $[m+n, m, 0]$ 得到:

$$x_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m} = x_{k_1 \dots k_m i_1 \dots i_n l_1 \dots l_m} \varepsilon^{j_1 k_1 l_1} \dots \varepsilon^{j_m k_m l_m}. \quad (26.25)$$

由于 (26.24) 中 Young 图的对称特征标和 Levi-Civita 张量的反对称性, $x_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m}$ 必须在 $\{j_1, \dots, j_m\}$ 和 $\{i_1, \dots, i_n\}$ 中是完全对称的。此外, 由于 $x_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_m}$ 是不可约的, 它必须满足无迹条件

$$x_{j i_2 \dots i_n}^{j j_2 \dots j_m} = 0. \quad (26.26)$$

我们在下表中总结了 Young 图 and 对应 $SU(3)$ 的一些低秩不可约表示的张量。

Table 26.1. $SU(3)$ 的不可约表示

表示	Young 矩阵	张量
$(0, 0) = \textcircled{1}$	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	1
$(1, 0) = \textcircled{3}$	$\begin{array}{ c c } \hline \square & \\ \hline \end{array}$	$x_i, i = 1, 2, 3$
$(0, 1) = \overline{\textcircled{3}}$	$\begin{array}{ c } \hline \square \\ \hline \end{array}$	x^i
$(2, 0) = \textcircled{6}$	$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	x_{ij}
$(0, 2) = \overline{\textcircled{6}}$	$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	x^{ij}
$(1, 1) = \textcircled{8}$	$\begin{array}{ c c } \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$	$x_j^i (x_i^i) = 0$
$(3, 0) = \textcircled{10}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$	x_{ijk}
$(0, 3) = \overline{\textcircled{10}}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$	x^{ijk}
$(2, 1) = \textcircled{15}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$	$x_{jk}^i (x_{ik}^i - 0)$
$(1, 2) = \overline{\textcircled{15}}$	$\begin{array}{ c c c } \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$	$x_k^{ij} (x_i^{ij} - 0)$
$(2, 2) = \textcircled{27} = \overline{\textcircled{27}}$	$\begin{array}{ c c c c } \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$	$x_{kl}^{ij} (x_{il}^{ij} - 0)$

27. Clifford 代数

在物理学中，Clifford 代数的使用始于 Dirac 试图将相对论 (Lorentz 不变) 二阶 **Klein-Gordon 方程** (Klein-Gordon equation)

$$\nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = m^2 \psi \quad (27.1)$$

($\hbar = c = 1, m =$ 粒子的质量) 分解为一阶系统的相对论性方程组。为此，他提出了一个形如 $\gamma^\mu \partial_\mu$ 的 Lorentz 协变一阶算符满足

$$\left(\sum_{\mu} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} \right)^2 = \partial_t^2 - \nabla^2, \quad (27.2)$$

其中， ∇^2 是 Euclidean $\mathbb{R}^3$ 上的 Laplacian 算符，并且 $\gamma^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ 是未指定的代数对象。在正式计算 (27.2) 的等式左边的时候，我们看到方程要求

$$\sum_{\mu, \nu} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} = \partial_0^2 - \partial_i^2, \quad (27.3)$$

其中， $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ，同时 $i = 1, 2, 3$ 。运用 Minkowski 度规

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (27.4)$$

[这等价于 (8.3) 中的度规], (27.3) 等价于

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}, \quad (27.5)$$

其中, $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}$ 是反对易的 [c.f. (13.36)]. Dirac 找到了满足 (27.5) 的 4×4 矩阵的集合, 并因此构造了方程

$$\sum_\mu \gamma_\mu \partial_\mu \psi - im\psi = 0, \quad (27.6)$$

被称为 **Dirac 方程 (Dirac equation)**。 γ_μ 是 4×4 矩阵的事实要求波函数 ψ 是 4-分量旋量。这引导 Dirac 预言反物质的存在。

回忆由 (11.14) 给出的从 Minkowski 空间 M 到 2×2 hermitian 矩阵 H_2 的集合的同态 $f: M \rightarrow H_2$:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}. \quad (27.7)$$

还有一个相关的同构 $f': M \rightarrow H_2$ 由下式给出

$$f'(x) = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}. \quad (27.8)$$

练习 27.1 说明由 (27.8) 定义的 f' 是一个同构。注意到 [c.f. (11.8)]

$$\det(f'(x)) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = \det(f(x)). \quad (27.9)$$

考虑一个线性映射 $\gamma: M \rightarrow \mathcal{GL}(4, \mathbb{C})$ 由下面定义

$$\gamma(x) \equiv \begin{pmatrix} 0 & f(x) \\ f'(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (27.10)$$

其中等式右边的项是 2×2 矩阵。对于 $M, \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ 的标准基, 由 (11.16) 给出, 我们有

$$\gamma_0 \equiv \gamma(e_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 \equiv \gamma(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (27.11a)$$

$$\gamma_2 \equiv \gamma(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 \equiv \gamma(e_3) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (27.11b)$$

其中, 类似地, 项为 2×2 矩阵, 并且 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 是由 (11.16) 给出的 Pauli 自旋矩阵。很容易看到矩阵 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 满足条件 (27.5)。它们被称为 **Dirac 矩阵 (Dirac matrices)**。

练习 27.2 直接验证 Dirac 矩阵 $\gamma_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ 满足 (27.5)。运用练习 11.5 中 Pauli 自旋矩阵的性质。

Dirac 矩阵 $\gamma_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ 可以被看成是一个定义了如下内积四维向量空间的基向量

$$(\gamma_\mu, \gamma_\nu) = \eta_{\mu\nu} . \quad (27.12)$$

以矩阵乘法作为内部乘法, γ_μ 也生成一个具有单位元 (unit) 等于 4×4 单位矩阵 (表示为 1) 的代数, 称为 **Dirac 代数 (Dirac algebra)**。这是名为 Clifford 代数的一个特殊例子。事实上, 由于 (27.5), 它的代数本身可以被视为 16 维线性向量空间具有基

$$\{1, \gamma_\mu, \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2}, \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3}, \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4}\} ,$$

其中, $\mu_i = 0, 1, 2, 3$ 同时 $\mu_i < \mu_{i+1}$ 。我们现在给出一个 Clifford 代数的一般性定义。

定义 27.1 令 $V_{(s)}^n, s \in \mathbb{Z}^+$ (非负整数), $s \leq n$, 为定义内积 $(\cdot, \cdot)$ 和一组基 $\{e_i\}, i = 1, \dots, n$ 的 n 维实向量空间使得

$$\begin{aligned} (e_i, e_j) &= 0, \quad i \neq j, \\ (e_i, e_i) &= 1, \quad i = 1, \dots, s, \\ (e_i, e_i) &= -1, \quad i = s+1, \dots, n. \end{aligned} \quad (27.13)$$

引入一个内部乘积 $vw, v, w \in V_{(s)}^n$ 满足向量加法结合律与分配律, 并且满足条件

$$\{v, w\} = 2(v, w), \quad (27.14)$$

其中

$$\{v, w\} \equiv vw + wv. \quad (27.15)$$

由 $V_{(s)}^n$ 中向量的所有可能的求和 (内部) 乘积生成的代数被称为 $V_{(s)}^n$ 的 **Clifford 代数 (Clifford algebra)** $C(V_{(s)}^n)$ 。

方程 (27.13) 和 (27.14) 说明了

$$\{e_i, e_j\} = 0, \quad i \neq j, \quad (27.16)$$

$$(e_i)^2 = \begin{cases} 1, & i = 1, \dots, s, \\ -1, & i = s+1, \dots, n, \end{cases} \quad (27.17)$$

其中, 1 是代数的单位元。因此 $C(V_{(s)}^n)$ 本身是一个维度为 $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$ 的线性向量空间具有基

$$\{1, e_{i_1}, e_{i_1} e_{i_2}, \dots, e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_n}\},$$

其中, $i_k = 1, \dots, n, 1 \leq k \leq n$ 并且 $i_j < i_{j+1}$ 。

一个常见的 Clifford 代数

$$C(V_{(0)}^1) = \mathbb{C}, \quad (27.18)$$

为复数的代数。实际上, $V_{(0)}^1$ 的基由元素 1 和 i 组成, 其中 $i^2 = -1$ [c.f. (27.17)]。然后, $C(V_{(0)}^1)$ 的一般元素是 $x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ 的形式。类似地, $C(V_{(0)}^2)$ 是**四元数 (quaternions)** 的代数。

设 $\{1, e_1, e_2\}$ 为 $V_{(0)}^2$ 的基, 满足 (27.13)。那么, $C(V_{(0)}^2)$ 的一般元素的形式为

$$a + be_1 + ce_2 + de_1e_2 ,$$

其中, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 。 $C(V_{(0)}^2)$ 的基向量重命名为

$$i = e_1, \quad j = e_2, \quad k = e_1e_2 . \quad (27.19)$$

则

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 , \quad (27.20)$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j . \quad (27.21)$$

练习 27.3 验证 Dirac 代数为 $C(V_{(1)}^4)$, 并且代数由 Pauli 自旋矩阵生成, 称为 **Pauli 代数 (Pauli algebra)**, 为 $C(V_{(3)}^3)$ 。

定义 27.2 用 $C_p(V_{(s)}^n)$ 表示由 $\binom{n}{r}$ 个乘积 $(e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p})$ 生成的 $C(V_{(s)}^n)$ 的线性子空间。
线性子空间

$$C_+ \equiv \sum_{\oplus p \text{ 偶} \leq n} C_p \quad \text{和} \quad C_- \equiv \sum_{\oplus p \text{ 奇} \leq n} C_p \quad (27.22)$$

分别称为 $C(V_{(s)}^n)$ 的偶数子空间 (*even subspace*) 和奇数子空间 (*odd subspace*)。

练习 27.4 说明 C_+ 和 C_- 的维度都是 2^{n-1} 。

我们将表述下面事实而不证明。

定理 27.1 对于某些 t 的值, Clifford 代数 $C(V_{(s)}^n)$ 的偶子代数 C_+ 同构于 Clifford 代数 $C(V_{(t)}^{n-1})$ 。

从 Dirac 代数 $C(V_{(1)}^4)$, 人们可以成功地展开偶子代数并且得到下面常见的 Clifford 代数的有趣的层次结构:

$$(C(V_{(1)}^4))_+ \sim C(V_{(3)}^3) \quad (\text{Pauli 代数}), \quad (27.23)$$

$$(C(V_{(3)}^3))_+ \sim C(V_{(0)}^2) \quad (\text{四元数}), \quad (27.24)$$

$$(C(V_{(0)}^2))_+ \sim C(V_{(0)}^1) \quad (= \mathbb{C}, \text{复数}), \quad (27.25)$$

$$(C(V_{(0)}^1))_+ \sim C(V_{(0)}^0) \quad (= \mathbb{R}, \text{实数}). \quad (27.26)$$

方程 (27.23), 举个例子可以按如下验证。Dirac 代数的偶子代数的一组基为 [c.f. (27.1)]

$$1, \gamma_0\gamma_1, \gamma_0\gamma_2, \gamma_0\gamma_3, \gamma_1\gamma_2, \gamma_1\gamma_3, \gamma_2\gamma_3, \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 . \quad (27.27)$$

同构由下面给出

$$\gamma_0\gamma_1 \mapsto \sigma_1, \quad \gamma_0\gamma_2 \mapsto \sigma_2, \quad \gamma_0\gamma_3 \mapsto \sigma_3 . \quad (27.28)$$

练习 27.5 验证 (27.24), (27.25) 和 (27.26)。

28. 外积

外积是三维向量空间中的向量叉积到任意维度的向量空间的推广。对于这种积及其产生的代数结构的研究已经引出了非常基本的结论，这些结论在主要是由几何学家 Elie Cartan 发展的所谓的外微分 (exterior differential calculus) 中发挥了至关重要的作用。同张量分析一起，在微分形式 (differential form) 上使用外微分已经彻底改变了现代微分几何，这一学科对物理学变得越来越重要。运用微分形式的强大技术，我们将看到如何以比传统物理学文献更优雅的方式进行向量和张量计算。本章将介绍微分形式研究的代数背景。

回想一下 Chapter 16 介绍的交错张量空间 $\Lambda^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V^*)$ 。一个阶为 r 的交错逆变张量, $x \in \Lambda^r(V)$, 称为一个 r 阶外向量 (exterior vector of degree r), 或外 r -向量 (exterior r -vector)。 $\Lambda^r(V)$ 被称为 r 阶 V 的外空间 (exterior space)。[类似的命名法适用于 $\Lambda^r(V^*)$ 中的交错协变张量]。当然，注意 $x \in \Lambda^r(V)$ 是 $(r, 0)$ 张量，而 $x \in \Lambda^r(V^*)$ 是 $(0, r)$ 张量。为方便，我们设定

$$\Lambda^0(V) = \mathbb{F}, \quad (28.1)$$

其中， $\mathbb{F}$ 是向量空间 V 相关的域，并且

$$\Lambda^1(V) = V. \quad (28.2)$$

关于外矢量的关键事实是存在称为外积 (exterior product) 或楔积 (wedge product) 的算符，使得两个外向量的外积是另一个外向量。

定义 28.1 令 ξ 为一个外 k -向量并且 η 为一个外 l -向量。 ξ 和 η 的外积，写作 $\xi \wedge \eta$ ，是外 $(k+l)$ -向量定义为

$$\xi \wedge \eta = A_{k+l}(\xi \otimes \eta), \quad (28.3)$$

其中， A_{k+l} 是由 (16.22) 给出的交错映射。

注意, 即使 ξ 和 η 是上面的定义单独交错, 它们的张量积 $\xi \otimes \eta$ 也不一定是交错的, 并且必须应用交错映射 A_{k+l} 来实现它。

我们将表述下面的定理而不证明, 这个定理给出了外积运算的代数规则。

定理 28.1 外积满足下面的规则: 假设 $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \Lambda^k, \eta, \eta_1, \eta_2 \in \Lambda^l(V)$ 并且 $\zeta \in \Lambda^k(V)$ 。则我们有

1) 分配律:

$$\begin{cases} (\xi_1 + \xi_2) \wedge \eta = \xi_1 \wedge \eta + \xi_2 \wedge \eta, \\ \xi \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \xi \wedge \eta_1 + \xi \wedge \eta_2; \end{cases} \quad (28.4)$$

2) 反对易规则:

$$\xi \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \xi; \quad (28.5)$$

3) 结合律:

$$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta). \quad (28.6)$$

练习 28.1 证明 (28.4)。

反对易关系立刻说明: 如果 $\xi, \eta \in \Lambda^1(V) = V$, 则

$$\xi \wedge \eta = -\eta \wedge \xi.$$

因此, 如果 $\xi \in \Lambda^1(V)$, 则 $\xi \wedge \xi = 0$ 。通常, 如果楔积中存在重复的外 1-向量, 则楔积消失。

现在假设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组基。根据结合律

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} = A_r(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}), \quad 1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n. \quad (28.7)$$

当且仅当 $i_1, \dots, i_r$ 不同时, 外积是非零的。如果 $r > n$, 则 $i_1, \dots, i_r$ 中指标必有重复, 外积 (28.7) 消失, 即:

$$\text{如果 } r > n = \dim(V), \quad e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} = 0. \quad (28.8)$$

假设一个外 r -向量 $\xi \in \Lambda^r(V)$ 写成分量形式:

$$\xi = \xi^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}. \quad (28.9)$$

由于任意交错映射是线性的, 我们有

$$\xi = A_r \xi = \xi^{i_1 \dots i_r} A_r(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}) = \xi^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}. \quad (28.10)$$

凭借 (28.8), 这意味着

$$\text{对于 } r > n = \dim(V), \quad \Lambda^r(V) = 0. \quad (28.11)$$

对于 $r \leq n$, 定理 16.1 断言依赖于任意指标的分量 $\xi^{i_1 \dots i_r}$ 是反对称的。通过定理 28.1 后面的讨论, 外积 $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ 也一样是成立的。由于 r 个指标 $i_1, \dots, i_r$ 有 $r!$ 个排列, ξ 可以被

表述成

$$\xi = r! \sum_{i_1 < \dots < i_r} \xi^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}, \quad (28.12)$$

其中, 求和仅包括 $i_1 < i_2 < \dots < i_r$ 的项。

我们现在将说明: 对于 $r \leq n$, 集合 $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} | 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}$ 组成了 $\Lambda^r(V)$ 的一组基。方程 (28.12) 已经说明: 任意 $\xi \in \Lambda^r(V)$ 可以被表述成这个集合中向量的一个线性组合。因此, 我们仅需要说明

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

向量在集合中是线性无关的。首先, 我们推导出估计 $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ 的公式。令 $v^{*1}, \dots, v^{*r}$ 是 V^* 中任意 r 个向量。则根据定义

$$\begin{aligned} & (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r})(v^{*1}, \dots, v^{*r}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} (\text{sgn } \sigma) \sigma(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r})(v^{*1}, \dots, v^{*r}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} (\text{sgn } \sigma) (e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r})(v^{*\sigma(1)}, \dots, v^{*\sigma(r)}) \\ &= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r)} (\text{sgn } \sigma) \langle e_{i_1}, v^{*\sigma(1)} \rangle \dots \langle e_{i_r}, v^{*\sigma(r)} \rangle. \end{aligned} \quad (28.13)$$

通过表达成 (16.77) 给出的行列式, 我们看到

$$(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r})(v^{*1}, \dots, v^{*r}) = \frac{1}{r!} \begin{vmatrix} \langle e_{i_1}, v^{*1} \rangle & \dots & \dots & \langle e_{i_1}, v^{*r} \rangle \\ \langle e_{i_2}, v^{*1} \rangle & \dots & \dots & \langle e_{i_2}, v^{*r} \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle e_{i_r}, v^{*1} \rangle & \dots & \dots & \langle e_{i_r}, v^{*r} \rangle \end{vmatrix}. \quad (28.14)$$

这个公式称为对于外积 $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ 的估计公式 (evaluation formula)。特别地

$$(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r})(e^{*j_1}, \dots, e^{*j_r}) = \frac{1}{r!} \det(\langle e_{i_\alpha}, e^{*j_\beta} \rangle) = \frac{1}{r!} \delta_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}, \quad (28.15)$$

其中

$$\delta_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } i_1, \dots, i_r \text{ 是不同的, 且 } \{j_1, \dots, j_r\} \text{ 是 } \{i_1, \dots, i_r\} \text{ 的偶排列;} \\ -1 & \text{如果 } i_1, \dots, i_r \text{ 是不同的, 且 } \{j_1, \dots, j_r\} \text{ 是 } \{i_1, \dots, i_r\} \text{ 的奇排列;} \\ 0 & \text{其它情况.} \end{cases} \quad (28.16)$$

被称为广义 Kronecker δ -符号 (generalized Kronecker δ -symbol)。我们立刻从 (28.5) 看到

$$(e_1 \wedge \dots \wedge e_n)(e^{*1}, \dots, e^{*n}) = \frac{1}{n!}. \quad (28.17)$$

因此 $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \neq 0$ 。(后面我们将看到这对于 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是线性无关的是充分必要条件)。

现在我们将说明集合

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$$

是线性无关的。反向假设, 即: 线性相关的。则存在标量 $a^{i_1 \cdots i_r} \in \mathbb{F}$ (域与 V 有关) 不全为零, 使得

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} a^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = 0. \quad (28.18)$$

假设其中一个非零标量为 $a^{j_1 \cdots j_r}$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$, 并且使用剩余的指标集合可以记为 $\{k_1, k_2, \dots, k_{n-r}\}$, 其中 $k_1 < \cdots < k_{n-r}$. 因此 $(j_1, \dots, j_r, k_1, \dots, k_{n-r})$ 是 $(1, \dots, n)$ 的排列。(28.18) 的两边同时乘以 $e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-r}}$, 我们得到

$$a^{j_1 \cdots j_r} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_r} \wedge e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_{n-r}} \quad (\text{不求和}) = \pm a^{j_1 \cdots j_r} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = 0. \quad (28.19)$$

由于所有其它术语都涉及外积中重复因子的 e_i 而因此消失, 因此在 (28.18) 的等式左边总和只选择了一项。由于 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \neq 0$, 如前所示, 它遵循 $a^{j_1 \cdots j_r} = 0$, 这是一个矛盾。我们得出结论:

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} | 1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n\}$$

是线性无关的, 并组成 $\Lambda^r(V)$ 的一组基。这意味着

$$\dim(\Lambda^r(V)) = \binom{n}{r} \quad (28.20)$$

特别地, 如果 $\dim(V) = n$, $\dim(\Lambda^n(V)) = 1$ 如在 Chapter 16 中所声明的那样。

练习 28.2 当 $\dim(V) = 4$ 时, 显式写下 $\Lambda^3(V)$ 的一组基。

从外空间 $\Lambda^r(V)$, 我们可以构造所谓的外或者 **Grassmann 代数 (Grassmann algebra)**。假设 $\dim(V) = n$ 。考虑如下求和形式

$$\Lambda(V) = \sum_{r=0}^n \Lambda^r(V). \quad (28.21)$$

令 $\xi, \eta \in \Lambda(V)$ 被写成

$$\xi = \sum_{r=0}^n \xi^r, \quad \eta = \sum_{s=0}^n \eta^s, \quad (28.22)$$

其中, $\xi^r \in \Lambda^r(V)$ 和 $\eta^s \in \Lambda^s(V)$ 。定义 ξ 和 η 的外积如下

$$\xi \wedge \eta = \sum_{r,s=0}^n \xi^r \wedge \eta^s. \quad (28.23)$$

则 $\Lambda(V)$ 成为依赖于外积的代数, 称为 V 的**外代数 (exterior algebra)** 或 **Grassmann 代数 (Grassmann algebra)**。

如果 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组基, 则从我们之前的讨论中得出, 以下集合是 $\Lambda(V)$ 的一

组基:

$$\{1, e_i (1 \leq i \leq n), e_{i_1} \wedge e_{i_2} (1 \leq i_1 < i_2 \leq n), \dots, e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_r} (1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n), \dots, e_1 \wedge \dots \wedge e_n\}. \quad (28.24)$$

这个集合元素的总数是 $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}$, 其中在二项式定理中令 $x = 1$ 有

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r, \quad (28.25)$$

等于 2^n 。因此

$$\text{如果 } \dim(V) = n, \quad \dim(\Lambda(V)) = 2^n. \quad (28.26)$$

类似地, 我们有对偶空间 V^* 的 Grassmann 代数:

$$\Lambda(V^*) = \sum_{r=0}^n \Lambda^r(V^*). \quad (28.27)$$

一个元素被称为 r 阶**外形式 (exterior form)**, 或者**外 r -形式 (exterior r -form)**。它是一个 V 上的交错 $\mathbb{F}$ -值 r 阶线性方程。

向量空间 $\Lambda^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V^*)$ 分别是 $T^r(V)$ 和 $T^r(V^*)$ 的子空间。 $T^r(V)$ 和 $T^r(V^*)$ 之间的配对, 互为对偶空间, 已经由 (16.4) 给出。因此, $\Lambda^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V^*)$ 互为对偶并且继承 $T^r(V)$ 和 $T^r(V^*)$ 之间的配对。然而, 我们将定义 $\Lambda^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V^*)$ 之间的配对

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_r, v^{*1} \wedge \dots \wedge v^{*r} \rangle = \det(\langle v_\alpha, v^{*\beta} \rangle), \quad (28.28)$$

其中与继承的配对不同的地方仅是参数 $r!$ 。虽然我们将依旧使用一样的符号 $\langle, \rangle$ 来表示两个不同的配对, 如果我们记住我们正在使用的空间, 就不会产生混淆。

练习 28.3 用估计公式 (28.14) 和行列式性质, 显式说明

$$\langle \quad, \quad \rangle_{T^r(V), T^r(V^*)} = \frac{1}{r!} \langle \quad, \quad \rangle_{\Lambda^r(V), \Lambda^r(V^*)}. \quad (28.29)$$

以下练习将说明外积的几何 (和直观) 含义。

练习 28.4 在 $V = \mathbb{R}^2$ 中, 选择一组标准正交基 $\{e_1, e_2\}$, 定向为 $e_1 \wedge e_2$ 。说明边界为 $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^2$ (Figure 28.1) 的平行四边形的**定向区域 (oriented area)** 由下式给出

$$\langle \xi_1 \wedge \xi_2, e^{*1} \wedge e^{*2} \rangle = (\xi_1 \wedge \xi_2, e_1 \wedge e_2). \quad (28.30)$$

等价地

$$\text{定向区域} = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 \end{vmatrix}, \quad (28.31)$$

其中

$$\xi_1 = \xi_1^1 e_1 + \xi_1^2 e_2, \quad \xi_2 = \xi_2^1 e_1 + \xi_2^2 e_2. \quad (28.32)$$

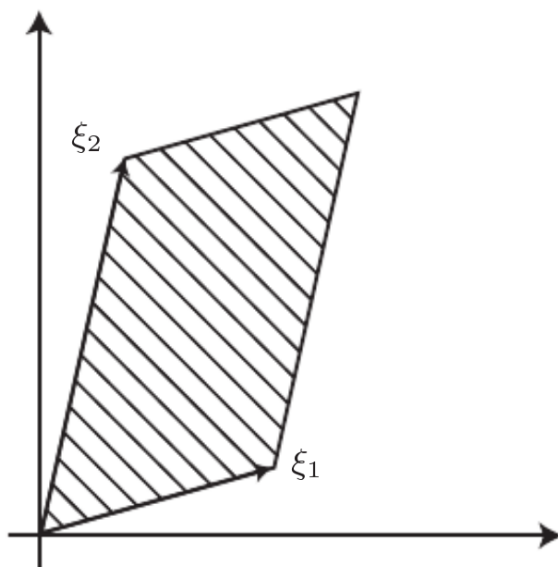


Figure 28.1

形式 $e^{*1} \wedge e^{*2}$ 被称为区域形式 (area form)。

练习 28.5 在 $V = \mathbb{R}^3$ 中, 选择一组标准正交基 $\{e_1, e_2, e_3\}$, 定向为 $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ 。3-形式 $e^{*1} \wedge e^{*2} \wedge e^{*3}$ 被称为体积形式 (volume form)。说明边界为 $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}^3$ (Figure 28.2) 的平行六面体的定向体积 (oriented volume) 由下式给出

$$\langle \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3, e^{*1} \wedge e^{*2} \wedge e^{*3} \rangle = (\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3), \quad (28.33)$$

等价地

$$\text{定向体积} = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 \end{vmatrix}, \quad (28.34)$$

其中

$$\xi_1 = \xi_1^1 e_1 + \xi_1^2 e_2 + \xi_1^3 e_3, \xi_2 = \xi_2^1 e_1 + \xi_2^2 e_2 + \xi_2^3 e_3, \xi_3 = \xi_3^1 e_1 + \xi_3^2 e_2 + \xi_3^3 e_3. \quad (28.35)$$

我们可以很容易的推广上面两个练习中定向区域和定向体积的表述来给出 Euclidean 空间 $\mathbb{R}^n$ 中平行六面体的定向体积, 边缘为 $\xi_1, \dots, \xi_n$:

$$\begin{aligned} V(\xi_1, \dots, \xi_n) &= \langle \xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n, e^{*1} \wedge \dots \wedge e^{*n} \rangle = (\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_n, e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \\ &= \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^1 & \dots & \xi_n^n \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (28.36)$$

其中

$$\xi_i = \xi_i^j e_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (28.37)$$

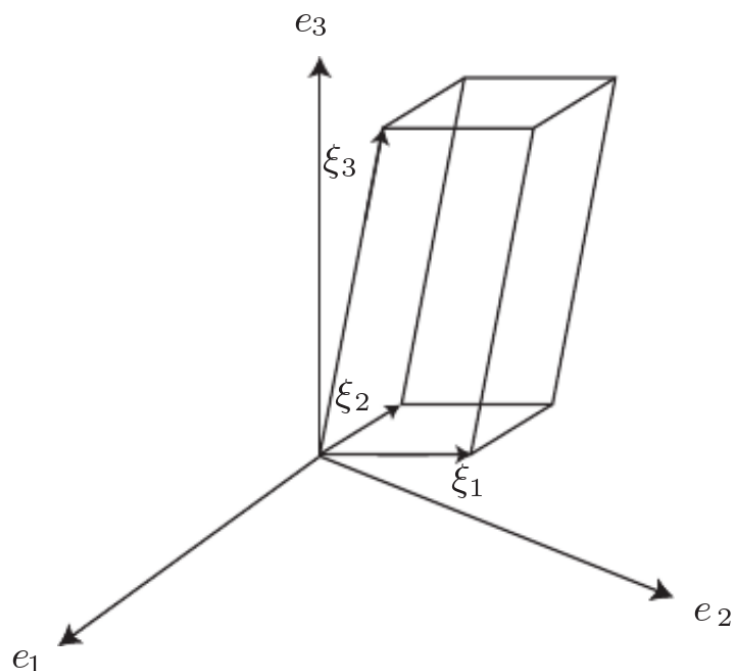


Figure 28.2

在下面的意义下，由外积产生的 Grassmann 代数的代数结构由线性映射保持。假设 $f : V \rightarrow W$ 是从向量空间 V 到在同一个域上的另一个向量空间 W 的映射。则 f 引出一个线性映射 $f^* : \Lambda^r(W^*) \rightarrow \Lambda^r(V^*)$ 定义如下。令 $\varphi \in \Lambda^r(W^*)$ 。对于任意 $v_1, \dots, v_r \in V$ ，我们有

$$(f^*\varphi)(v_1, \dots, v_r) = \varphi(f(v_1), \dots, f(v_r)) . \quad (28.38)$$

f^* 被称为从 $\Lambda^r(W^*)$ 到 $\Lambda^r(V^*)$ 的**拉回 (pullback)** 映射，并且唯一地由 f 决定。很显然是线性的。(拉回映射的概念已经在 Chapter 16 中介绍过，作为定义一个线性算符的行列式的先决条件)。

练习 28.6 证明 f^* 是线性的，即：对于 $a, b \in \mathbb{F}$ 和 $\varphi_1, \varphi_2 \in \Lambda^r(W^*)$ 有

$$f^*(a\varphi_1 + b\varphi_2) = af^*(\varphi_1) + bf^*(\varphi_2) . \quad (28.39)$$

定理 28.2 假设 $f : V \rightarrow W$ 是一个线性映射。则 f^* 和外积对易，即：对于任意 $\varphi \in \Lambda^r(W^*)$ 和 $\psi \in \Lambda^s(W^*)$ 有

$$f^*(\varphi \wedge \psi) = (f^*\varphi) \wedge (f^*\psi) . \quad (28.40)$$

证明：选择任意 $v_1, \dots, v_{r+s} \in V$ 。则

$$\begin{aligned}
 f^*(\varphi \wedge \psi)(v_1, \dots, v_{r+s}) &= (\varphi \wedge \psi)(f(v_1), \dots, f(v_{r+s})) \\
 &= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r+s)} (\text{sgn } \sigma) \varphi(f(v_{\sigma(1)}), \dots, f(v_{\sigma(r)})) \psi(f(v_{\sigma(r+1)}), \dots, f(v_{\sigma(r+s)})) \\
 &= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(r+s)} (\text{sgn } \sigma) (f^*\varphi)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) (f^*\psi)(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}) \\
 &= ((f^*\varphi) \wedge (f^*\psi))(v_1, \dots, v_{r+s}) .
 \end{aligned} \tag{28.41}$$

便得到方程 (28.40)。

□

从上面的定理，很明显 f^* 是从外代数 $\Lambda(W^*)$ 到外代数 $\Lambda(V^*)$ 的同态，即：

$$f^* : \Lambda(W^*) \longrightarrow \Lambda(V^*)$$

保持两个外 (Grassmann) 代数的代数结构。

外代数的概念最初由 H. Grassmann 引入，目的是研究向量空间的线性子空间。在伟大的几何学家 Elie Cartan 的手中，它随后被发展为外微分理论，并应用于微分方程和微分几何的研究。目前，外积和微分形式的外微分已经成为现代微分几何中的强大且不可替代的工具。

我们将用五个外积的有用的定理来总结，这些定理将只表述而不证明。

定理 28.3 当且仅当

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_r = 0 . \tag{28.42}$$

向量 $v_1, \dots, v_r \in V$ 的集合是线性相关的。

定理 28.4 — Cartan 引理 (Cartan's Lemma). 假设 $\{v_1, \dots, v_r\}$ 和 $\{w_1, \dots, w_r\}$ 是 V 中向量的两个集合使得

$$\sum_{\alpha=1}^r v_\alpha \wedge w_\alpha = 0 . \tag{28.43}$$

如果 $v_1, \dots, v_r$ 是线性无关的，则每个 w_α 可以被表述成一个 v_β 的线性组合：

$$w_\alpha = a_\alpha^\beta v_\beta, \quad 1 \leq \alpha \leq r , \tag{28.44}$$

其中， $a_\alpha^\beta = a_\beta^\alpha$ 。[矩阵 (a_α^β) 是对称的]。

下一个定理给出充分必要条件：对于一个任意 $\omega \in \Lambda^s(V)$ 可以被表述为线性无关向量的线性组合，其中外向量作为“参数”。

定理 28.5 令 $\omega \in \Lambda^s(V)$ 并且 $v_1, \dots, v_r$ 是 V 中 r 个线性无关的向量。 ω 可以表述成形式

$$\omega = v_1 \wedge \psi_1 + \dots + v_r \wedge \psi_r , \tag{28.45}$$

其中, $\psi_1, \dots, \psi_r \in \Lambda^{s-1}(V)$, 当且仅当

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge \omega = 0 . \quad (28.46)$$

通常我们将 (28.45) 表述成

$$\omega = 0 \bmod (v_1, \dots, v_r) . \quad (28.47)$$

定理 28.6 假设 $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k\}$ 和 $\{v'_1, \dots, v'_k, w'_1, \dots, w'_k\}$ 是 V 中向量的两个集合使得 $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k\}$ 是线性无关的并且

$$\sum_{\alpha=1}^k v_{\alpha} \wedge w_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^k v'_{\alpha} \wedge w'_{\alpha} . \quad (28.48)$$

则集合 $\{v'_1, \dots, v'_k, w'_1, \dots, w'_k\}$ 也是线性无关的并且集合中的任意向量可以表述成 $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_k$ 的线性组合。

除了估计公式 (28.14) 和方程 (28.28) 给出外向量空间与其对偶之间的配对之外, 以下定理还说明了外代数中行列式的自然出现。

定理 28.7 假设 $v_1, \dots, v_k \in V$, 并且 $w_1, \dots, w_k$ 是它们的线性组合由下式给出

$$w_{\alpha} = t_{\alpha}^{\beta} v_{\beta} .$$

则

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_k = \det(t_{\alpha}^{\beta}) v_1 \wedge \dots \wedge v_k . \quad (28.49)$$

练习 28.7 证明上面的定理。

练习 28.8 证明下面。

假设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是一个 n 维向量空间 V , 其中 V^* 的对偶基 $\{e^{*1}, \dots, e^{*n}\}$ 。则 $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r} | 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n\}$ 和 $\{e^{*j_1} \wedge \dots \wedge e^{*j_r} | 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n\}$ 分别是 $\Lambda^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V^*)$, 并且互为对偶基。它们之间的配对由下式给出

$$\langle e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}, e^{*j_1} \wedge \dots \wedge e^{*j_r} \rangle = \det(\langle e_{i_{\alpha}}, e^{*j_{\beta}} \rangle) = \delta_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} , \quad (28.50)$$

其中 $\delta_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}$ 是由 (28.16) 给出的 Kronecker δ -符号。在这种情况下

$$\delta_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } \{j_1, \dots, j_r\} = \{i_1, \dots, i_r\} , \\ 0 & \text{如果 } \{j_1, \dots, j_r\} \neq \{i_1, \dots, i_r\} . \end{cases} \quad (28.51)$$

29. Hodge-Star 算符

由 (28.28) 给出的对偶空间 $\Lambda^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V^*)$ 引出了 $\Lambda^r(V)$ 中的内积:

$$\begin{aligned} (v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, w_1 \wedge \cdots \wedge w_r) &\equiv \langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, w^{*1} \wedge \cdots \wedge w^{*r} \rangle \\ &= \det(\langle v_\alpha, w^{*\beta} \rangle), \end{aligned} \quad (29.1)$$

同时

$$w^{*\alpha} = g(w_\alpha), \quad (29.2)$$

其中, $g: V \rightarrow V^*$ 是 V 中非简并内积引入的规范同构 [c.f. 在 Chapter 8 和 (8.26b) 中讨论]。因此, 引入的规范同构 $g: \Lambda^r(V) \rightarrow \Lambda^r(V^*)$ 由下式给出:

$$g(w_1 \wedge \cdots \wedge w_r) = w^{*1} \wedge \cdots \wedge w^{*r}. \quad (29.3)$$

当且仅当 V 中引入的初始内积 $(,)$ 是非简并的, 内积 (29.1) 是非简并的。

练习 29.1 证明上述表述。

V 中非简并的内积和 V 的定向概念生成一个线性映射

$$\star: \Lambda^r(V) \longrightarrow \Lambda^{n-r}(V),$$

其中, $r \leq n$ 并且 $\dim(V) = n$, 称为 **Hodge star 算符 (Hodge star operator)**, 或者简称 **star 算符 (star operator)**。我们将首先解释一个向量空间的定向。

定义 29.1 假设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 和 $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ 是由一个非奇异矩阵 (a_i^j) 联系起来的 V 的两

组基:

$$e'_i = a_i^j e_j . \quad (29.4)$$

如果 $\det(a_i^j) > 0$, 则两组基被称为等价, 或者决定了相似的定向。则所有基的集合被分成两个等价类, 每个等价类被称为 V 的定向 (*orientation*)。

根据定理 28.7, 如果 $\dim(V) = n$, 如 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, 每个 V 的定向由 $V^n(V)$ 中的一个非零向量确定。

现在假设 $\lambda \in \Lambda^r(V)$, 其中 $r \leq n$ 。则: 对于任意 $\omega \in \Lambda^{n-r}(V)$, 有

$$\lambda \wedge \omega \in \Lambda^n(V) . \quad (29.5)$$

由于 $\Lambda^n(V)$ 是一维的并且 $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ 是 $\Lambda^n(V)$ 的一组基, 我们可以写

$$\lambda \wedge \omega = f_\lambda(\omega) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n , \quad (29.6)$$

其中, $f_\lambda : \Lambda^{n-r}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ 是由 λ 特征的 $\Lambda^{n-r}(V)$ 上的一个线性函数, 并且因此是对偶空间 $\Lambda^{n-r}(V)$ 中的元素, 即:

$$f_\lambda \in (\Lambda^{n-r}(V))^* = \Lambda^{n-r}(V^*) . \quad (29.7)$$

$\Lambda^{n-r}(V)$ 中的内积 [由 (29.1) 给出] 则引出一个规范同构:

$$g : \Lambda^{n-r}(V) \longrightarrow \Lambda^{n-r}(V^*) , \quad (29.8)$$

并且因此 $\Lambda^{n-r}(V)$ 中一个独有的元素, 称为 λ 的 **Hodge-star**, 使得

$$g(\star \lambda) = f_\lambda , \quad (29.9)$$

并且对于任意 $\omega \in \Lambda^{n-r}(V)$

$$(\omega, \star \lambda) = \langle \omega, f_\lambda \rangle = f_\lambda(\omega) . \quad (29.10)$$

方程 (29.6) 可以被重写成如下。如果 $\lambda \in \Lambda^r(V)$, 则: 对于任意 $\omega \in \Lambda^{n-r}(V)$, 有

$$\boxed{\lambda \wedge \omega = (\star \lambda, \omega) \sigma} , \quad (29.11)$$

在这个方程中

$$\sigma = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \quad (29.12)$$

确定了 V 的一个定向。实际上, 上面两个方程也可以被看出 Hodge-star 算符的定义式。我们注意到定义取决于两件事:

- 1) V 中一个给定的内积 $(,)$, 引出 $\Lambda^r(V)$ 中的一个内积;
- 2) V 中一个给定的定向 σ 。

在给出 star 算符的一般结论之前, 让我们定义标量积符号的概念 (可能是非正定的, 如在 Minkowski 空间中的 Lorentz 度规相关的概念)。

定义 29.2 假设 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是定义了内积的向量空间的一个标准正交基, 可能非正定的, 所以

$$(e_i, e_j) = \pm \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (29.13)$$

如果在上面的一群方程中, 数字 $+1$ 出现 P 次, 数字 -1 出现 N 次, 则整数

$$S = P - N \quad (29.14)$$

称为内积的符号 (*signature*)。

练习 29.2 说明内积的符号不依赖于标准正交基的选择。

我们现在准备表述关于 $\star$ 算符 (没有证明) 一些有用的结果。这些不是很难证明。

假设 $\dim = n, \sigma = e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ 确定 V 的定向, V 被赋予符号 S 的内积 $(\cdot, \cdot)$ 并且 λ, μ 是 $\Lambda^r(V)$ 中的任意外向量。则

$$\star \sigma = 1 \quad (\text{标量 } 1) \quad (29.15)$$

$$\star 1 = (-1)^{\frac{(n-S)}{2}} \sigma, \quad (29.16)$$

$$(\sigma, \sigma) = (-1)^{\frac{(n-S)}{2}}, \quad (29.17)$$

$$\star \star \lambda = (-1)^{r(n-r) + \frac{(n-S)}{2}} \lambda, \quad (29.18)$$

$$(\lambda, \mu) = \star \star \star (\mu \wedge \star \lambda) = \star \star \star (\lambda \wedge \star \mu), \quad (29.19)$$

$$\mu \wedge \star \lambda = \lambda \wedge \star \mu = (-1)^{\frac{(n-S)}{2}} (\lambda, \mu) \sigma, \quad (29.20)$$

$$(\star \lambda, \star \mu) a = \star (\lambda \wedge \star \mu) = \star (\mu \wedge \star \lambda). \quad (29.21)$$

在本章的其余部分, 我们将通过两个经常遇到的示例来说明 $\star$ 算符的用法。

考虑定义了 Euclidean 标量积的 $V = \mathbb{R}^3$ 。选择一组标准正交基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 和定向 $\sigma = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, 由 Figure 29.1 中的右手参考系表示。

标量积由下式给出

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (29.22)$$

由于 $S = 3 = n$

$$(\sigma, \sigma) = 1. \quad (29.23)$$

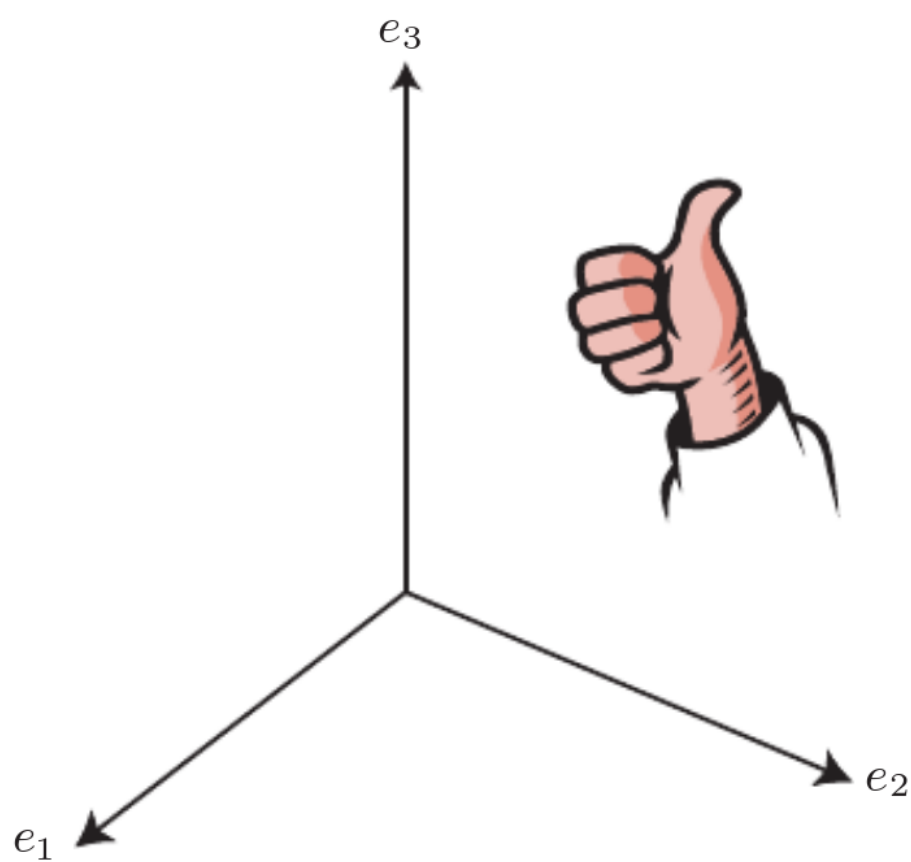


Figure 29.1

应用 (29.11), 我们有

$$\sigma = (e_1 \wedge e_2) \wedge e_3 = (\star(e_1 \wedge e_2), e_3) \sigma, \quad \text{所以 } \star(e_1 \wedge e_2) = e_3; \quad (29.24)$$

$$\sigma = (e_2 \wedge e_3) \wedge e_1 = (\star(e_2 \wedge e_3), e_1) \sigma, \quad \text{所以 } \star(e_2 \wedge e_3) = e_1; \quad (29.25)$$

$$\sigma = (e_3 \wedge e_1) \wedge e_2 = (\star(e_3 \wedge e_1), e_2) \sigma, \quad \text{所以 } \star(e_3 \wedge e_1) = e_2; \quad (29.26)$$

$$-\sigma = (e_1 \wedge e_3) \wedge e_2 = (\star(e_1 \wedge e_3), e_2) \sigma, \quad \text{所以 } \star(e_1 \wedge e_3) = -e_2; \quad (29.27)$$

$$-\sigma = (e_3 \wedge e_2) \wedge e_1 = (\star(e_3 \wedge e_2), e_1) \sigma, \quad \text{所以 } \star(e_3 \wedge e_2) = -e_1; \quad (29.28)$$

$$-\sigma = (e_2 \wedge e_1) \wedge e_3 = (\star(e_2 \wedge e_1), e_3) \sigma, \quad \text{所以 } \star(e_2 \wedge e_1) = -e_3; \quad (29.29)$$

$$\sigma = e_2 \wedge (e_3 \wedge e_1) = (\star e_2, e_3 \wedge e_1) \sigma, \quad \text{所以 } \star e_2 = e_3 \wedge e_1; \quad (29.30)$$

$$\sigma = e_2 \wedge (e_3 \wedge e_1) = (\star e_2, e_3 \wedge e_1) \sigma, \quad \text{所以 } \star e_2 = e_3 \wedge e_1; \quad (29.31)$$

$$\sigma = e_3 \wedge (e_1 \wedge e_2) = (\star e_3, e_1 \wedge e_2) \sigma, \quad \text{所以 } \star e_3 = e_1 \wedge e_2. \quad (29.32)$$

更进一步

$$\star(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = 1, \quad (29.33)$$

$$\star 1 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3. \quad (29.34)$$

方程 (29.24) 到 (29.29) 验证了在 Chapter 28 开头的表述: 外积是三维向量代数中平凡叉积的推广。这一关联实际上是通过 $\star$ -算符和 $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ 的特殊事实实现的。

现在让我们来看看 V 是四维 Minkowski 时空的情况, 其标量积由 Lorentz 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 确定 [c.f. (2.20)]. 令 e_1 为时间轴, e_2, e_3 和 e_4 分别为 x, y 和 z 空间轴。选择 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 为基, 同时 $\sigma = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$ 为定向。Lorentz 标量积由下式给出

$$\begin{cases} (e_1, e_1) = -1, \\ (e_i, e_i) = +1, & i = 2, 3, 4, \\ (e_i, e_j) = 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (29.35)$$

符号 S 是 2。因此, 从 (29.17) 有

$$(\sigma, \sigma) = (-1)^{\frac{(4-2)}{2}} = -1. \quad (29.36)$$

一如既往, 从 (29.15)

$$\star\sigma = \star(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) = 1. \quad (29.37)$$

我们可以再一次应用 (29.11) 来确定 r -向量的 $\star$, 其中 $r = 1, 2, 3$ 。因此

$$\begin{aligned}
 \sigma &= (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \wedge e_4 = (\star(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3), e_4) \sigma, & \text{所以 } \star(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) &= e_4; \quad (29.38) \\
 -\sigma &= (e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) \wedge e_3 = (\star(e_1 \wedge e_2 \wedge e_4), e_3) \sigma, & \text{所以 } \star(e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) &= -e_3; \quad (29.39) \\
 \sigma &= (e_1 \wedge e_3 \wedge e_4) \wedge e_2 = (\star(e_1 \wedge e_3 \wedge e_4), e_2) \sigma, & \text{所以 } \star(e_1 \wedge e_3 \wedge e_4) &= e_2; \quad (29.40) \\
 -\sigma &= (e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \wedge e_1 = (\star(e_2 \wedge e_3 \wedge e_4), e_1) \sigma, & \text{所以 } \star(e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) &= e_1; \quad (29.41) \\
 \sigma &= (e_1 \wedge e_2) \wedge (e_3 \wedge e_4) = (\star(e_1 \wedge e_2), e_3 \wedge e_4) \sigma, & \text{所以 } \star(e_1 \wedge e_2) &= e_3 \wedge e_4; \quad (29.42) \\
 -\sigma &= (e_1 \wedge e_3) \wedge (e_2 \wedge e_4) = (\star(e_1 \wedge e_3), e_2 \wedge e_4) \sigma, & \text{所以 } \star(e_1 \wedge e_3) &= -e_2 \wedge e_4; \quad (29.43) \\
 \sigma &= (e_1 \wedge e_4) \wedge (e_2 \wedge e_3) = (\star(e_1 \wedge e_4), e_2 \wedge e_3) \sigma, & \text{所以 } \star(e_1 \wedge e_4) &= e_2 \wedge e_3; \quad (29.44) \\
 \sigma &= (e_2 \wedge e_3) \wedge (e_1 \wedge e_4) = (\star(e_2 \wedge e_3), e_1 \wedge e_4) \sigma, & \text{所以 } \star(e_2 \wedge e_3) &= -e_1 \wedge e_4; \quad (29.45) \\
 -\sigma &= (e_2 \wedge e_4) \wedge (e_1 \wedge e_3) = (\star(e_2 \wedge e_4), e_1 \wedge e_3) \sigma, & \text{所以 } \star(e_2 \wedge e_4) &= e_1 \wedge e_3; \quad (29.46) \\
 \sigma &= (e_3 \wedge e_4) \wedge (e_1 \wedge e_2) = (\star(e_3 \wedge e_4), e_1 \wedge e_2) \sigma, & \text{所以 } \star(e_3 \wedge e_4) &= -e_1 \wedge e_2; \quad (29.47) \\
 \sigma &= e_1 \wedge (e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) = (\star e_1, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4) \sigma, & \text{所以 } \star e_1 &= e_2 \wedge e_3 \wedge e_4; \quad (29.48) \\
 -\sigma &= e_2 \wedge (e_1 \wedge e_3 \wedge e_4) = (\star e_2, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4) \sigma, & \text{所以 } \star e_2 &= e_1 \wedge e_3 \wedge e_4; \quad (29.49) \\
 \sigma &= e_3 \wedge (e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) = (\star e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4) \sigma, & \text{所以 } \star e_3 &= -e_1 \wedge e_2 \wedge e_4; \quad (29.50) \\
 -\sigma &= e_4 \wedge (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) = (\star e_4, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \sigma, & \text{所以 } \star e_4 &= e_1 \wedge e_2 \wedge e_3. \quad (29.51)
 \end{aligned}$$

最后

$$\star 1 = -e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4. \quad (29.52)$$

30. 微分形式与外微分

在 Chapter 8 中，我们对在流形中特定点处的微分流形的切空间的概念进行了初步讨论。这是微分几何中非常基本且直观的概念，并且是引入微分形式的起点。在这个发展过程中，我们目标不是完整性也不是数学严格性，而是要依靠直观的方法。

一个有限维可微流形 M 的局部表现像一个有限维 Euclid 空间的一个邻域，因此局部的一个点 $x \in M$ 可以由 n 个坐标 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 的一个集合表征，其中 n 是流形的维度。这种表征通常不能全局应用，并且需要不同的 Euclid 空间“补丁 (patch)”来覆盖一个流形。考虑以一个二维球体为例，在局部，一个点可以通过两个坐标 (纬度和经度) 来描述；但是不能在整个表面上使用同一个集合的坐标。(北极的经度是多少?) 显然，参考地图制作，我们说的是可微流形由**坐标卡 (chart)** 覆盖，每个坐标卡记为 (U, u^i) ，包括邻域 $U \subset M$ 和 U 中有效的坐标 $u^1, \dots, u^n$ 的一个集合。如果两个坐标卡 (U, u^i) 和 (W, w^i) 使得 U 和 W 交叠，即 $U \cap W \neq \emptyset$ ，则所有 w 的必须是所有 u 的光滑函数，反之亦然。因此， M 中的一个点和同一点可能有不同的坐标集合来进行描述。坐标卡 $(U, u^i), (V, v^i), (W, w^i), \dots$ 的一个集合使得 $\{U, V, W, \dots\}$ **覆盖 (cover)** M ，并满足除了上面提到的可微性条件之外的确定附加条件 (这里将不详细说明)，被称为可微流形 M 的**图册 (atlas)**，并且确定了流形所谓的**可微结构 (differentiable structure)**。

让我们现在定义在一个点 $x \in M$ 处的切向量的概念。考虑一个曲线 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ 经过 x 使得 $\gamma(0) = x$ 。(Figure 30.1) 曲线 $\gamma(t)$ 在点 x 处的**切向量 (tangent vector)** X 是第 i 个分量为 ξ^i 的向量，分量 ξ^i 描述的是第 i 个坐标沿着 $\gamma(t)$ 变化多“快”：

$$\xi^i \equiv \left. \frac{d}{dt} (x^i \circ \gamma) \right|_{t=0}. \quad (30.1)$$

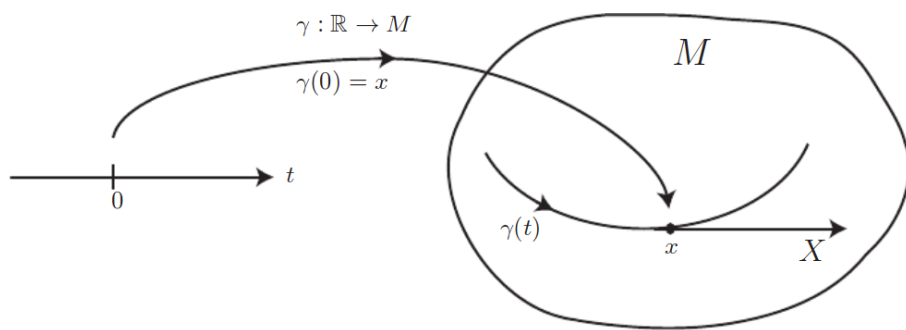


Figure 30.1

现在考虑一个函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 。我们可能问: f 在 x 处沿着 γ 改变多“快”? 答案是

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0} = (\partial_i f) \xi^i. \quad (30.2)$$

这个量被称为 f 沿着 X 方向在 x 处的**方向导数 (directional derivative)**。(30.2) 的等号右边暗示 $(\partial_i f) \xi^i$ (i 求和) 是分量为 ξ^i 的一个逆变向量和分量为 $\partial_i f$ 的一个协变向量的配对。实际上, 这个协变向量是函数 f 的常微分:

$$df = \partial_i f dx^i, \quad (30.3)$$

并且 (30.2) 中的配对记为

$$\langle X, df \rangle = (\partial_i f) \xi^i. \quad (30.4)$$

因此我们可以写

$$X = \xi^i e_i, \quad (30.5)$$

其中, $\{e_i\}$ 和 $\{dx^i\}$ 是对偶基的集合。我们如何能用局域坐标 x^i 写 e_i ? 答案由对偶性要求给出:

$$\langle e_i, dx^j \rangle = \delta_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}. \quad (30.6)$$

换句话说,

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (30.7)$$

并且我们有

$$\boxed{X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i \partial_i}. \quad (30.8)$$

$x \in M$ 处的**切空间 (tangent space)**, 记为 $T_x M$, 是由基集合 $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ 生成的线性向量空间, 其中作为 $T_x M$ 的对偶空间, 记为 $T_x^* M$ 并且称为由 $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ 基生成 $x \in M$ 处的**余切空间 (cotangent space)**。两个基 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 和 $\{dx^j\}$ 互为对偶基 [对比 (8.15)]:

$$\boxed{\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j \right\rangle = \delta_i^j}. \quad (30.9)$$

对于很明显的原因, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 和 $\{dx^j\}$ 分别称为 $T_x M$ 和 $T_x^* M$ 的**坐标基 (coordinate bases)**(或

者自然基 (natural bases))。

R $T_x M$ 中的坐标基向量是用微分算符表达的, 一开始出现可能很奇怪。但这是完全合理的, 如果我们记得 $T_x M$ 与 $T_x^* M$ 对偶, 实际上是 $T_x^* M$ 上线性函数的空间。因此, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 作用于 $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ 产生一个标量 $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ 。

在坐标变换下

$$x^i \longrightarrow x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n,$$

通过链式法则, 我们有

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x'^j} \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \partial'_j, \quad (30.10)$$

和

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} dx'^j. \quad (30.11)$$

我们可以重写上面两个方程为

$$\partial_i = a_i^j \partial'_j, \quad (30.12)$$

和

$$dx^i = (a^{-1})^i_j dx'^j, \quad (30.13)$$

其中

$$a_i^j \equiv \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}, \quad (30.14)$$

是对于坐标的局域改变的 **Jacobi 矩阵 (Jacobian matrix)**。变换规则 (30.12) 和 (30.13) 分别与 Chapter 1 的 Table 1.1 中给出的关于协变 (下指标) 对象和逆变 (上指标) 对象相一致。

基于在一个特定点 $x \in M$ 的一个切空间 $T_x M$ 和一个余切空间 $T_x^* M$ 的记号, 我们可以在 $x \in M$ 处第一次构造 (r, s) -型张量空间

$$T_s^r(x) = \underbrace{T_x \otimes \dots \otimes T_x}_{r\text{次}} \otimes \underbrace{T_x^* \otimes \dots \otimes T_x^*}_{s\text{次}} \quad (30.15)$$

并且则有 (r, s) -型**张量丛 (tensor bundle)**

$$T_s^r = \bigcup_{x \in M} T_s^r(x). \quad (30.16)$$

具体来说, T_s^r 是流形 M 所有点处的 (r, s) -型张量空间的一个“级联 (concatenation)”。每个 $T_s^r(x)$ 被称为 x 点处丛 T_s^r 的**纤维 (fiber)**。自然投影

$$\pi : T_s^r \longrightarrow M, \quad (30.17)$$

映射了所有 $T_s^r(x)$ 中的点到 $x \in M$ 点, 是一个光滑满射。它被称为**丛投影 (bundle projection)**(Figure 30.2)。

张量丛 T_s^r 的构造是一个复杂的过程, 对此的细节处理超出了本书的范畴 (参见陈省身, 陈维桓和 Lam, 1999 年)。我们在这里仅提供非常简短和直观的描述。它主要包括下面两个步骤:

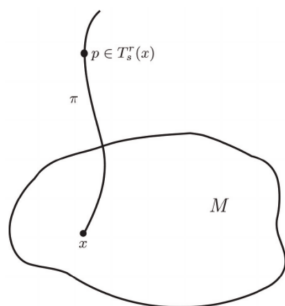


Figure 30.2

1. 确定一个拓扑结构和一个可微结构使得张量丛在局域是一个乘积:

$$\varphi_U : U \times V_s^r \longrightarrow \bigcup_{x \in U} T_s^r(x); \quad (30.18)$$

2. 确定一种方法: 使得纤维在 M 的坐标卡的交叠中与“伸出 (sticking out)”的点“粘在 (glued)”一切, 从而保持纤维的线性结构。(见 Figure 30.3)

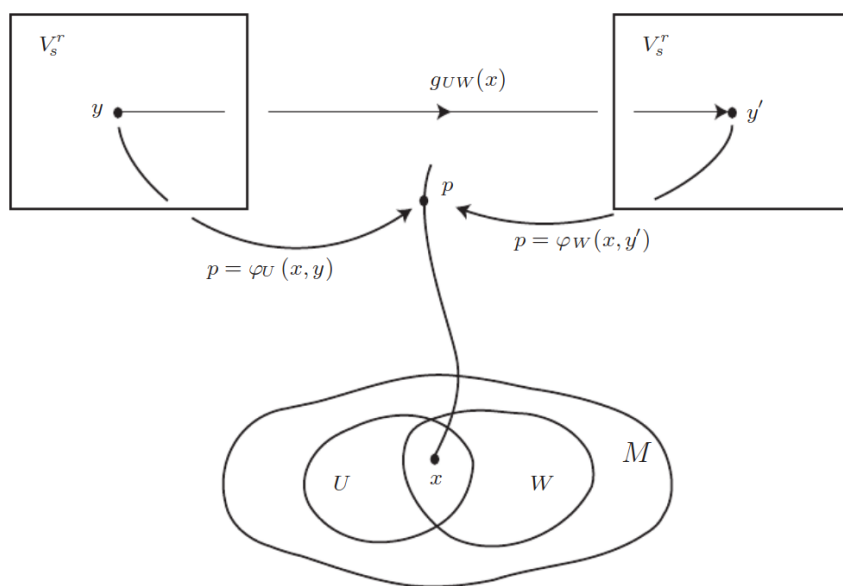


Figure 30.3

在 Figure 30.3 中, 函数

$$g_{UW} : U \cap W \longrightarrow GL(V_s^r), \quad (30.19)$$

其中, $GL(V_s^r)$ 是 V_s^r 上的一般线性群 (general linear group), 被称为 T_s^r 的转换函数 (transition functions) (“胶水 (glueing)” 函数)。它们决定了丛的结构。

在 T_s^r 中, 我们有切丛 (tangent bundle) T_0^1 [也记为 $T(M)$] 和余切丛 (cotangent bundle) T_1^0 [也记为 $T^*(M)$]. 更进一步, 我们可以在 M 上构造所谓的外向量丛 (exterior vector bundle) 和外形式丛 (exterior form bundle), 分别由下式给出

$$\Lambda^r(M) \equiv \bigcup_{x \in M} \Lambda^r(T_x) \quad \text{和} \quad \Lambda^r(M^*) \equiv \bigcup_{x \in M} \Lambda^r(T_x^*) \quad (30.20)$$

$T_s^r, \Lambda^r(M)$ 和 $\Lambda^r(M^*)$ 是**向量丛 (vector bundle)** 的特殊情况 (纤维丛的纤维是向量空间)。它们通常记为 $\pi: E \rightarrow M$, 其中 π 是自然投影 [c.f. (30.17)], E 被称为**总空间 (total space)** (或者**丛空间 (bundle space)**), 同时 M 被称为**基流形 (base manifold)**。

请注意, 总空间 E 本身应被考虑为一个流形 (具有自己的可微分结构), 而不必考虑为基流形和纤维的乘积。实际上, 一个纤维丛局域上只是乘积 [见 (30.18)]; 并且一般不能在全局表示。在全局是一个乘积的丛是产品被称为一个**平凡丛 (trivial bundle)**, 并且纤维丛的许多理论都致力于表征各种非平凡性 (见 Chapter 41)。非平凡丛在现代理论物理学中起着最重要的作用: 它们构成了描述许多有趣的物理对象的数学基础, 例如, 磁单极子, 瞬子甚至分子碰撞系统。

一个光滑映射 $s: M \rightarrow E$ 使得

$$\pi \circ s = id: M \rightarrow M, \quad (30.21)$$

其中, id 是单位映射, 被称为向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 的一个**光滑部分 (smooth section)**。 $\pi: E \rightarrow M$ 的所有光滑部分的集合记为 $\Gamma(E)$, 是一个重要的向量空间。它也是一个 $C^\infty(M)$ **模 (module)**, 即: 在 M 上的光滑函数的环上的模。向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 的一部分也被称为一个流形 M 上的一个**向量场 (vector field)**。

我们现在终于准备好给出微分形式的定义, 或更具体地说, 是外微分形式, 在这上可以进行外微分的所有重要操作。

开始于一个 n 维光滑流形 M , 并构造 M 上的丛的外 r -形式 [c.f. (30.20)]:

$$\Lambda^r(M^*) = \bigcup_{x \in M} \Lambda^r(T_x^*).$$

这是 M 上的向量丛, 因此构想其上光滑部分的空间很有意义。我们将这个向量空间记为 $A^r(M)$:

$$A^r(M) \equiv \Gamma(\Lambda^r(M^*)). \quad (30.22)$$

正如之前提到的, $A^r(M)$ 也是一个 $C^\infty(M)$ 模。

定义 30.1 $C^\infty(M)$ 模 $A^r(M)$ 的元素被称为 M 上的**外微分 r -形式 (exterior differential r -forms)**。换句话说, M 上的外微分 r -形式是 M 上 r 阶一个光滑反对称协变张量场 [一个 $(0, r)$ -型张量场]。

从 $A^r(M)$ 我们可以构造直和

$$A(M) = \bigoplus_{r=0}^n A^r(M) = A^0(M) \oplus \cdots \oplus A^n(M), \quad (30.23)$$

实际上是外形式丛的所有光滑部分的空间

$$\Lambda(M^*) = \bigcup_{x \in M} \Lambda(T_x^*). \quad (30.24)$$

$A(M)$ 的元素被称为 M 上的**外微分形式 (exterior differential forms)**。因此, 每个外微分

形式 $\omega \in A(M)$ 可以被写成

$$\omega = \omega^0 + \omega^1 + \cdots + \omega^n, \quad (30.25)$$

其中, $\omega^r \in A^r(M)$, $0 \leq r \leq n$ 。

R 从技术上讲, 微分形式不需要是外形式。术语“外 (exterior)”是指问题中形式的反对称性。当没有混乱出现时, 或者从上下文中很明显看出来时, 我们将根据情况只说的是微分形式, 而不是外微分形式。

现在, 我们使用外 (楔) 积对 $A(M)$ 施加一个乘法规则 (见定义 28.1)。单点 $x \in M$ 处的外形式的楔积可以通过逐点关联简单地推广到外微分形式 $A(M)$ 的空间: 对于任意 $x \in M$, $\omega_1, \omega_2 \in A(M)$, 定义

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(x) = \omega_1(x) \wedge \omega_2(x), \quad (30.26)$$

其中, 等号右边是两个外形式的一个楔积。有了这种乘法规则, 空间 $A(M)$ 则变成了依赖于加法、标量乘法和楔积的一个**分次代数 (graded algebra)**。楔积定义了一个映射

$$\wedge : A^r(M) \times A^s(M) \longrightarrow A^{r+s}(M), \quad (30.27)$$

其中, 当 $r + s > n$ 时 $A^{r+s}(M) = 0$ 。

令 (U, x^i) 是 M 的一个坐标卡。一个外微分 r -形式 ω 可以用 M 的局域坐标 $x^1, \dots, x^n$ 表述在 U 的领域为

$$\omega = a_{i_1 \dots i_r}(x^1, \dots, x^n) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}, \quad (30.28)$$

其中, 每一个 $a_{i_1 \dots i_r}$ 是 U 上的一个光滑函数 (即: 局域坐标 $x^1, \dots, x^n$ 的一个光滑函数), 并且依赖于它的指标的任意排列 (c.f 定理 16.1) 被要求是反对称的。注意到在 (30.28) 运用了 Einstein 求和约定。

由于在一个点 $x \in M$ 处的 $\Lambda^r(M)$ 和 $\Lambda^r(M^*)$ 的纤维互为对偶空间, 我们可以根据 (28.28) 在它们之间引入一个配对。用 $\Lambda^r(T_x)$ 的自然基 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \right\}$, $i_1 \leq \cdots \leq i_r$ 和 $\Lambda^r(T_x^*)$ 的 $\{dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}\}$, 我们有

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \right\rangle = \delta_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_r}, \quad (30.29)$$

其中, Kronecker delta 符号已经在 (28.51) 中定义了。因此, 用局域坐标写 ω 的分量可以被表述为

$$a_{i_1 \dots i_r} = \frac{1}{r!} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, \omega \right\rangle. \quad (30.30)$$

练习 30.1 验证 (30.30)。

外微分形式的空间 $A(M)$ 在可微流形的研究中起着至关重要的作用, 这是由于最有用的算符的存在, 即: $A(M)$ 上的所谓外微分算符 (exterior derivative operator) d , 具有性质 $d^2 = 0$ 。所以我们只表述下面的定理而不证明。

定理 30.1 令 M 是一个 n -维光滑流形。则存在一个唯一的映射

$$d: A(M) \longrightarrow A(M), \quad d(A^r(M)) \subset A^{r+1}(M),$$

满足下面的性质:

- 1) 对于任意 $\omega_1, \omega_2 \in A(M)$, $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$
- 2) 假设 $\omega_1 \in A^r(M)$ 。则对于任意 $\omega_2 \in A(M)$,

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2. \quad (30.31)$$

- 3) 如果 f 是 M 上的一个光滑函数, 即: 如果 $f \in A^0(M)$, 则 df 很确定是 f 的微分。
- 4) 如果 $f \in A^0(M)$, 则 $d^2 f = 0$ 。

映射 d 被称为**外微分 (exterior derivative)**。

方程 (30.31) 是外微分的“乘法规则”。我们注意到 d 是一个局域算符, 也就是说, 如果 $\omega_1, \omega_2 \in A(M)$ 和它对于 M 邻域 U 的限制条件等于 $(\omega_1|_U = \omega_2|_U)$, 则 $d\omega_1|_U = d\omega_2|_U$ 。

为了学习如何计算外微分, 让我们开始于将算符 d 应用到 $\omega = a_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in A^r(M)$ 。运用定理 30.1 性质 2) [(30.31)] 和 4), 我们立刻有

$$d\omega = (da_{i_1 \dots i_r}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}. \quad (30.32)$$

在运用 (30.31) 时, 它等式右边的第二项丢掉, 因为 x^i 是 U 上一个光滑函数 (坐标函数), 并且因此性质 4) 适用于它。

当 ω_1 和 ω_2 都是单项式时 [性质 1) 处理 ω_2 不是单项式的情况], 运用 (30.32) 检查性质 2) 的有效性是有指导性的:

$$\omega_1 = a dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \in A^r(M), \quad \omega_2 = b dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} \in A^s(M),$$

使得

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = a b dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}.$$

则通过 (30.32)

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(ab) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} \\ &= (bda + adb) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s} \\ &= (da \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (b dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}) \\ &\quad + (-1)^r (a dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}) \wedge (db \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_s}) \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2, \end{aligned} \quad (30.33)$$

其中, 在第三个等号位置 db 项已通过 r 个 “slots” 向右对易, 因此根据外积的反对易规则 [(28.5)] 得到 $(-1)^r$ 倍。

方程 (30.32) 也可以被用来检查定理 30.1 的性质 4)。令 f 是 M 上的一个光滑函数。则

通过 3) 对于 df (U 上) 的局域表述为

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i . \quad (30.34)$$

从 (30.32) 得到

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i = 0 , \end{aligned} \quad (30.35)$$

在第三个等号的等号右边的第二项中, 我们进行了交换 $i \leftrightarrow j$ 来得到第四个等号的等号右边的第二项, 而最后一个等号来自于事实

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} , \quad (30.36)$$

反过来又源自 f 的 C^∞ (光滑性) 本质。

根据定理 30.1 中确定的外微分的性质, 我们立即得到下面重要且有用的结论:

定理 30.2 — Poincare 引理 (Poincare's Lemma).

$$d^2 = 0 , \quad (30.37)$$

即: 对于任意 $\omega \in A(M)$, $d(d\omega) = 0$ 。

证明: 我们只需要证明单项式 $\omega \in A^r(M)$ 的引理, 因为 d 通过定理 30.1 的性质 1) 是线性的。另外, 由于 d 是局域算符, 我们只需要考虑

$$\omega = a dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^r .$$

通过 (30.22)

$$d\omega = da \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^r$$

再次微分并应用定理 30.1 的性质 2) 和 4), 我们有

$$d(d\omega) = d(da) \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^r - da \wedge d(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^r) = -da \wedge d(dx^1) \wedge \cdots \wedge dx^r + \dots = 0 ,$$

由于每个 x^i 是 $U(M)$ 的邻域) 上的一个局域坐标函数, 因此, 通过性质 4), $d^2 x^i = 0$ 。 $\square$

我们将重写 (30.32) 为经常用于外微分计算的形式:

$$\begin{aligned} \text{如果 } \omega|_U &= a_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \in A^r(M) , \\ \text{则有 } d\omega|_U &= \frac{\partial a_{i_1 \dots i_r}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} . \end{aligned} \quad (30.38)$$

下面是与微分形式和切向量场有关的一个有用的事实。

定理 30.3 令 ω 为一个光滑流形 M 上的一个微分 1-形式；并且 X 和 Y 是 M 上的光滑切向量场。则

$$\langle X \wedge Y, d\omega \rangle = X \langle Y, \omega \rangle - Y \langle X, \omega \rangle - \langle [X, Y], \omega \rangle, \quad (30.39)$$

其中

$$[X, Y] = XY - YX. \quad (30.40)$$

注意：符号 $X \langle Y, \omega \rangle$ 意味着光滑切向量场 X 对光滑函数 $\langle Y, \omega \rangle$ 的作用，产生另一个平滑函数。

证明：由于配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是双线性函数，因此足以证明 $\omega = gdf$ 的定理，其中 g 和 f 都是 M 上的光滑函数。因此

$$d\omega = dg \wedge df.$$

通过 (28.28) 和 (30.4)，

$$\langle X \wedge Y, dg \wedge df \rangle = \begin{vmatrix} \langle X, dg \rangle & \langle X, df \rangle \\ \langle Y, dg \rangle & \langle Y, df \rangle \end{vmatrix} = X(g)Y(f) - X(f)Y(g). \quad (30.41)$$

由于

$$\langle X, \omega \rangle = \langle X, gdf \rangle = g \cdot X(f), \quad (30.42)$$

我们有

$$Y \langle X, \omega \rangle = Y(g)X(f) + g \cdot Y(X(f)). \quad (30.43)$$

类似地，

$$X \langle Y, \omega \rangle = X(g)Y(f) + g \cdot X(Y(f)). \quad (30.44)$$

从 (30.39) 的等式右边得到的是

$$\begin{aligned} & X \langle Y, \omega \rangle - Y \langle X, \omega \rangle - \langle [X, Y], \omega \rangle \\ &= X(g)Y(f) - Y(g)X(f) + g[X(Y(f)) - Y(X(f))] - g\langle [X, Y], df \rangle \\ &= X(g)Y(f) - Y(g)X(f), \end{aligned} \quad (30.45)$$

可以从 (30.41) 中第二个等号的等式右边准确地得到。 □

上面的定理可以很直接概括如下。

推论 30.1 令 $\omega \in A^r(M)$ 是 M 上的一个光滑外微分 r -形式，并且 $X_1, \dots, X_{r+1}$ 是 M 上的光滑切向量场。则

$$\begin{aligned} \langle X_1 \wedge \cdots \wedge X_{r+1}, d\omega \rangle &= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{i+1} X_i \left\langle X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_{r+1}, \omega \right\rangle \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq r+1} (-1)^{i+j} \left\langle [X_i, X_j] \wedge \cdots \wedge \hat{X}_i \wedge \cdots \wedge \hat{X}_j \wedge \cdots \wedge X_{r+1}, \omega \right\rangle, \end{aligned} \quad (30.46)$$

其中, $\hat{X}_i$ 指明省略的项。

练习 30.2 通过归纳 (或其他方法) 证明上面的公式。

对于本章的其余部分, 我们将通过将微分形式和外微分通过将它应用于 3-维向量微积分来演示它的能力和优雅。我们将看到算符 d 完全包含了向量微积分算符 “div, grad, curl 以及所有”。我们将暂时性恢复使用直角坐标 (x, y, z) 。

令 f 是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个光滑函数 (一个 0-形式)。则

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (30.47)$$

在向量微积分, 我们称分量为 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ 的向量场是 f 的**梯度 (gradient)**, 记为 ∇f , 或者 $\text{grad } f$ 。

现在考虑一个 1-形式

$$\omega = A dx + B dy + C dz, \quad (30.48)$$

其中, A, B, C 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数。则根据 (30.38),

$$\begin{aligned} d\omega &= dA \wedge dx + dB \wedge dy + dC \wedge dz \\ &= \frac{\partial A}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial A}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial C}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial C}{\partial y} dy \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \end{aligned} \quad (30.49)$$

如果我们令 $\mathbf{X}$ 是向量场 (A, B, C) , 则向量场有分量

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

恰好是向量微积分中向量场 $\mathbf{X}$ 的**旋量 (curl)**, 其记为 $\nabla \times \mathbf{X}$ 。

最后考虑 2-形式

$$\psi = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy, \quad (30.50)$$

其中, 再一次, A, B, C 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数。我们有, 通过应用 (30.38),

$$d\psi = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz. \quad (30.51)$$

上面方程中括号里面的量恰好是向量场 $\mathbf{X} = (A, B, C)$ 的**散度 (divergence)**, 在向量微积分中记为 $\nabla \cdot \mathbf{X}$ 或者 $\text{div } \mathbf{X}$ 。

因此, div, grad 和 curl 是一个运算符和相同算符的所有不同表示, 即: 外微分 d 。

从 Poincare 引理 ($d^2 = 0$) 开始, 向量微积分中的两个基本公式便立即得到。令 f 为 $\mathbb{R}^3$

上的一个光滑函数, 并且 $\mathbf{X}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个光滑切向量场。则我们有

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0, \quad (30.52)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0. \quad (30.53)$$

换句话说, 一个旋量的散度和一个梯度的旋量总是等于零。

方程 (30.53) 简单等价于 $d^2f = 0$, 其中 f 作为 $\mathbb{R}^3$ 上的一个光滑函数, 被考虑为 $A^0(\mathbb{R}^3)$ 的一个元素, 即: $\mathbb{R}^3$ 上的零-形式。为了看到 (30.52) 是如何从 Poincare 引理得出的, 我们首先引入局域标架场 (local frame field) 的想法。根据 (30.9) 和紧跟在该方程之前的讨论, 在每个点 $p \in \mathbb{R}^3$, $\{(dx)_p, (dy)_p, (dz)_p\}$ 是 $T_p^*(\mathbb{R}^3) = \Lambda^1(T_p(\mathbb{R}^3))$ 的正交标架 (基集合), $\left\{\frac{\partial}{\partial x}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p\right\}$ 是 $T_p(\mathbb{R}^3) = \Lambda^1(T_p(\mathbb{R}^3))$ 的正交标架, 并且两组基互为对偶。如果令点 p 在局域坐标邻域 U 上变化 (在 $\mathbb{R}^3$ 上, U 实际上可以是整个空间 $\mathbb{R}^3$), 我们将得到所谓的 $T^*(\mathbb{R}^3)$ 的 $\{dx, dy, dz\}$ 和 $T(\mathbb{R}^3)$ 的 $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}$ 。因此, $\mathbb{R}^3$ 上的任意向量场, 或等效地, 切丛 $T(\mathbb{R}^3)$ 的一部分可以被写成

$$\mathbf{X} = A \frac{\partial}{\partial x} + B \frac{\partial}{\partial y} + C \frac{\partial}{\partial z}, \quad (30.54)$$

其中, A, B, C 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数。相应地, 我们有 1-形式

$$\omega = A dx + B dy + C dz,$$

是切丛 $T^*(\mathbb{R}^3)$ 的一部分, 或 $A^1(\mathbb{R}^3) = \Gamma(\Lambda^1(\mathbb{R}^{3*}))$ 的一个元素。根据 (30.49), $d\omega$ 则是一个 2-形式, 其分量是向量场 $\nabla \times \mathbf{X}$ 的分量。则我们有, 从 (30.51),

$$0 = d^2\omega = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) dx \wedge dy \wedge dz. \quad (30.55)$$

因此得到 (30.52)。

定理 30.1 中给出的外微分的规则, 特别是“乘积规则”, 可以用于轻松推导向量运算中的许多有用的恒等式。我们将得出下面四个基本结论:

$$(1) \quad \nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f, \quad (30.56)$$

$$(2) \quad \nabla \times (f\mathbf{v}) = \nabla f \times \mathbf{v} + f\nabla \times \mathbf{v}, \quad (30.57)$$

$$(3) \quad \nabla \cdot (f\mathbf{v}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{v} + f\nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (30.58)$$

$$(4) \quad \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}). \quad (30.59)$$

(1) 的证明: 假设 $f, g \in A^0(\mathbb{R}^3)$, 即: f 和 g 都是在 $\mathbb{R}^3$ 零-形式或者光滑函数。则有

$$f \wedge g = fg \quad (30.60)$$

也是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个零-形式。现在, 通过 (30.31)

$$d(fg) = d(f \wedge g) = df \wedge g + (-1)^0 f \wedge dg = gdf + fdg, \quad (30.61)$$

这是一个 1-形式, 其分量是 $\nabla(fg)$ 的分量。因此

$$\begin{aligned} & (\nabla(fg))^1 dx + (\nabla(fg))^2 dy + (\nabla(fg))^3 dz \\ &= \left(g \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx + \left(g \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial g}{\partial y}\right) dy + \left(g \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial g}{\partial z}\right) dz . \end{aligned} \quad (30.62)$$

通过比较 dx, dy, dz 的系数, 得到 (30.56)。 $\square$

(2) 的证明: 令

$$\mathbf{v} = v^1 \frac{\partial}{\partial x} + v^2 \frac{\partial}{\partial y} + v^3 \frac{\partial}{\partial z} , \quad (30.63)$$

和 ω 是 1-形式由下式给出

$$\omega = v^1 dx + v^2 dy + v^3 dz . \quad (30.64)$$

则

$$f\omega = f \wedge \omega , \quad (30.65)$$

其中, $f \in A^0(\mathbb{R}^3)$ (一个零-形式), 是一个 1-形式。我们有

$$d(f \wedge \omega) = df \wedge \omega + f d\omega . \quad (30.66)$$

通过 (30.49), 等号左边可以被写成

$$d(f\omega) = (\nabla \times (fv))^1 dy \wedge dz + (\nabla \times (fv))^2 dz \wedge dx + (\nabla \times (fv))^3 dx \wedge dy , \quad (30.67)$$

同时等号右边假设形式

$$\begin{aligned} df \wedge \omega + f d\omega &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \wedge (v^1 dx + v^2 dy + v^3 dz) \\ &\quad + f(\nabla \times \mathbf{v})^1 dy \wedge dz + f(\nabla \times \mathbf{v})^2 dz \wedge dx + f(\nabla \times \mathbf{v})^3 dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} v^3 - \frac{\partial f}{\partial z} v^2 + f(\nabla \times \mathbf{v})^1 \right) dy \wedge dz \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial z} v^1 - \frac{\partial f}{\partial x} v^3 + f(\nabla \times \mathbf{v})^2 \right) dz \wedge dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial f}{\partial x} v^2 - \frac{\partial f}{\partial y} v^1 + f(\nabla \times \mathbf{v})^3 \right) dx \wedge dx \\ &= \{((\nabla f) \times \mathbf{v})^1 + f(\nabla \times \mathbf{v})^1\} dz \wedge dz \\ &\quad + \{((\nabla f) \times \mathbf{v})^2 + f(\nabla \times \mathbf{v})^2\} dz \wedge dx \\ &\quad + \{((\nabla f) \times \mathbf{v})^3 + f(\nabla \times \mathbf{v})^3\} dx \wedge dy . \end{aligned} \quad (30.68)$$

比较 (30.67) 的等号右边和 (30.68) 的等号右边的最后的表达, 我们到达了 (30.57)。 $\square$

(3) 的证明: 令

$$\mathbf{v} = v^1 \frac{\partial}{\partial x} + v^2 \frac{\partial}{\partial y} + v^3 \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{和} \quad \psi = v^1 dy \wedge dz + v^2 dz \wedge dx + v^3 dx \wedge dy . \quad (30.69)$$

则对于 $f \in A^0(\mathbb{R}^3)$, 即: $\mathbb{R}^3$ 上的一个光滑函数,

$$d(f\psi) = df \wedge \psi + f d\psi . \quad (30.70)$$

通过 (30.51), 因为 $f\psi$ 是一个 2-形式,

$$d(f\psi) = \nabla \cdot (f\mathbf{v}) dx \wedge dy \wedge dz , \quad (30.71)$$

同时

$$\begin{aligned} df \wedge \psi &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \wedge (v^1 dy \wedge dz + v^2 dz \wedge dx + v^3 dx \wedge dy) \\ &= ((\nabla f) \cdot \mathbf{v}) dx \wedge dy \wedge dz , \end{aligned} \quad (30.72)$$

和

$$f d\psi = f(\nabla \cdot \mathbf{v}) dx \wedge dy \wedge dz . \quad (30.73)$$

则可以从最后四个方程得出方程 (30.58)。 $\square$

(4) 的证明: 令

$$\mathbf{u} = u^1 \frac{\partial}{\partial x} + u^2 \frac{\partial}{\partial y} + u^3 \frac{\partial}{\partial z} , \quad (30.74)$$

$$\mathbf{v} = v^1 \frac{\partial}{\partial x} + v^2 \frac{\partial}{\partial y} + v^3 \frac{\partial}{\partial z} , \quad (30.75)$$

是 $\mathbb{R}^3$ 上的两个切向量场。则有

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{u} = (v^2 u^3 - v^3 u^2) \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + (v^3 u^1 - v^1 u^3) \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + (v^1 u^2 - v^2 u^1) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} . \quad (30.76)$$

现在令

$$\psi = (v^2 u^3 - v^3 u^2) dy \wedge dz + (v^3 u^1 - v^1 u^3) dz \wedge dx + (v^1 u^2 - v^2 u^1) dx \wedge dy , \quad (30.77)$$

$$\theta = v^1 dx + v^2 dy + v^3 dz , \quad (30.78)$$

$$\phi = u^1 dx + u^2 dy + u^3 dz . \quad (30.79)$$

则有

$$\psi = \theta \wedge \phi , \quad (30.80)$$

和

$$d\psi = d\theta \wedge \phi + (-1)^1 \theta \wedge d\phi . \quad (30.81)$$

另一方面, 通过 (30.51)

$$d\psi = \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) dx \wedge dy \wedge dz , \quad (30.82)$$

同时

$$\begin{aligned} d\theta \wedge \phi &= ((\nabla \times \mathbf{v})^1 dy \wedge dz + (\nabla \times \mathbf{v})^2 dz \wedge dx + (\nabla \times \mathbf{v})^3 dx \wedge dy) \wedge (u^1 dx + u^2 dy + u^3 dz) \\ &= (\mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})) dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned} \quad (30.83)$$

并且类似地,

$$\theta \wedge d\phi = (\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})) dx \wedge dy \wedge dz. \quad (30.84)$$

则可以从最后四个方程得出方程 (30.59)。

□

31. $\mathbb{R}^3$ 中的移动标架和曲线坐标

在本章中，我们将使用最后发展出来的外微分微积分技术在 $\mathbb{R}^3$ 上研究一些几何。将介绍几个重要的几何概念，并且我们将提出一种统一的方法来根据曲线坐标推导出向量微积分算符的表达式。这些在向量微积分的有限情境下是有用的，它们的真正重要性在于它们对任意流形的一般适用性。

设 $(O; \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中固定的标准正交标架，其原点在 O 点处，并且 $(p; e_1, e_2, e_3)$ 是一个移动的标准正交标架，其原点在移动点 p 处并且具有与固定标架相同的定向。(见 Figure 31.1，它显示了基于球坐标的一个移动标架)。

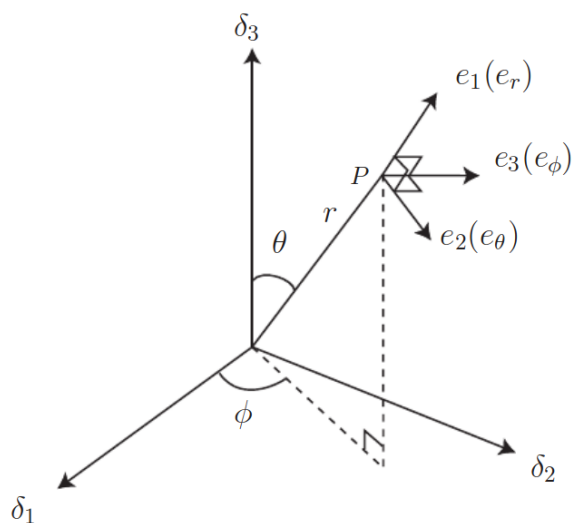


Figure 31.1

一般来说, 我们可以写

$$\overrightarrow{Op} = a^i \delta_i, \quad (31.1)$$

$$\text{和} \quad e_i = a_i^j \delta_j, \quad (31.2)$$

其中, a^i 和矩阵元素 a_i^j 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数。对于球坐标的情况, a^i 和 a_i^j 由下式显式给出

$$\overrightarrow{Op} = (r \sin \theta \cos \phi) \delta_1 + (r \sin \theta \sin \phi) \delta_2 + (r \cos \theta) \delta_3, \quad (31.3)$$

和

$$\begin{aligned} e_1 = e_r &= (\sin \theta \cos \phi) \delta_1 + (\sin \theta \sin \phi) \delta_2 + (\cos \theta) \delta_3, \\ e_2 = e_\theta &= (\cos \theta \cos \phi) \delta_1 + (\cos \theta \sin \phi) \delta_2 - (\sin \theta) \delta_3, \\ e_3 = e_\phi &= -(\sin \phi) \delta_1 + (\cos \phi) \delta_2. \end{aligned} \quad (31.4)$$

注意到 a^i 和 a_i^j 都是 $\mathbb{R}^3$ 上的 0-形式。如果我们记

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T, \quad (31.5)$$

$$e = (e_1, e_2, e_3)^T, \quad (31.6)$$

$$a = (a^1, a^2, a^3), \quad (31.7)$$

$$A = (a_i^j), \quad (31.8)$$

其中, T 意味着矩阵的转置, 则 (31.1) 和 (31.2) 可以被写成矩阵记号分别为

$$\overrightarrow{Op} = a \cdot \delta, \quad (31.9)$$

$$\text{和} \quad e = A \cdot \delta, \quad (31.10)$$

其中, 点意味着矩阵乘法。假设现在我们将 p 处的标架移动到一个稍微相邻的位置 $(p + dp; e_i + de_i)$ 。向量 dp 和 de_i 可以仍旧用标架 $(p; e_1, e_2, e_3)$ 表述:

$$dp = \omega^i e_i, \quad (31.11)$$

$$de_i = \omega_i^j e_j, \quad (31.12)$$

其中, ω^i, ω_i^j 是 $\mathbb{R}^3$ 上的所有 1-形式。实际上, dp 和 de_i 是所谓的**向量值 1-形式 (vector-valued 1-form)**。如果我们记

$$\theta = (\omega^1, \omega^2, \omega^3), \quad (31.13)$$

$$\omega = (\omega_i^j), \quad (31.14)$$

则我们可以在矩阵符号下写

$$dp = \theta \cdot e, \quad (31.15)$$

$$de = \omega \cdot e. \quad (31.16)$$

向量值 1-形式 θ 和矩阵值 1-形式 (matrix-valued 1-form) ω 可以简单地从 (31.1) 和 (31.2) 的外微分, 或等价的 (31.9) 和 (31.10)。因此

$$dp = da \cdot \delta = da \cdot A^{-1} \cdot e, \quad (31.17)$$

$$de = dA \cdot \delta = dA \cdot A^{-1} \cdot e, \quad (31.18)$$

其中, 我们运用了 $d\delta = 0$ 的事实, 这是由于 $(O; \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ 是一个固定标架。从 (31.15) 和 (31.16) 得到

$$\theta = da \cdot A^{-1}, \quad (31.19)$$

$$\omega = dA \cdot A^{-1}. \quad (31.20)$$

现在, 对方程 $A \cdot A^{-1} = 1$ 取外微分, 我们得到

$$dA \cdot A^{-1} + A \cdot d(A^{-1}) = dA \cdot A^{-1} + (dA \cdot A^{-1})^T = 0, \quad (31.21)$$

其中, 我们已经使用了 $A^{-1} = A^T$ 的事实 (因为 A 是一个正交矩阵)。接着得到 ω 是 1-形式的反对称矩阵:

$$\boxed{\omega_i^j + \omega_j^i = 0}. \quad (31.22)$$

现在 dp 也可以被表达, 通过运用依赖于固定标架 $(O; \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ 的局域 (矩形) 坐标 $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ 表达为

$$dp = dx^i \delta_i = \omega^i e_i, \quad (31.23)$$

$$\text{或者} \quad dp = dx \cdot \delta = \theta \cdot e = \theta \cdot A \cdot \delta, \quad (31.24)$$

其中, 最后的等号来自于 (31.10)。从而

$$dx = \theta \cdot A, \quad (31.25)$$

$$\text{或者} \quad dx^i = \omega^j a_j^i. \quad (31.26)$$

从定理 28.7, 体积形式 (参见练习 28.5) $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ 可以被写为

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \det(a_i^j) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3. \quad (31.27)$$

由于矩阵 (a_i^j) 是正交的, $\det(a_i^j) = \pm 1$ 。 $(p; e_1, e_2, e_3)$ 与 $(O; \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ 相同定向的要求, 然而, 限定了 $\det(a_i^j) = +1$ (c.f. 定义 29.1)。因此

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3, \quad (31.28)$$

这是体积形式在旋转下不变性的说明 (保持定向的正交变换)。

通过对 (31.15) 和 (31.16) 取外微分来简单得到两个非常重要的方程, 并对这些方程的等

号左边运用 Poincare 引理 ($d^2 = 0$)。我们有, 通过运用外微分的乘积法则 [(30.31)],

$$d\theta \cdot e - \theta \wedge de = 0, \quad (31.29)$$

$$d\omega \cdot e - \omega \wedge de = 0. \quad (31.30)$$

通过对 de 使用 (31.16), 上面的方程化简为

$$d\theta = \theta \wedge \omega, \quad (31.31)$$

$$d\omega = \omega \wedge \omega, \quad (31.32)$$

或写成分量

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad (31.33)$$

$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \quad (31.34)$$

注意到 (31.32) 是一个矩阵方程, 其中 ω 是一个 1-形式的矩阵。因此在那个方程中, $\omega \wedge \omega$ 不必为零 (因为它可能如此, 如果 ω 是一个单独的 1-形式)。方程 (31.31) 和 (31.32) 被称为结构方程 (structure equation)。后者也被称为 **Maurer-Cartan 方程 (Maurer-Cartan equation)**。与 (31.22) 一同, 它们完全决定了 $\mathbb{R}^3$ 的几何。

1-形式的矩阵 (ω_i^j) 被称为 1-形式的**联络矩阵 (connection matrix)**。方程 (31.22) 是联络 ω 的**度规兼容性 (metric-compatibility)** 的条件, (31.31) 是联络 ω 的**挠率自由度 (torsion freeness)** 的条件, 而 (31.32) 是联络 ω 的**零曲率 (zero-curvature)** 的条件。这些重要的几何概念将在本书的后半部分中被发展并且更详细地说明, 当我们正式介绍一个**向量丛上的联络 (connection on a vector bundle)** 的几何概念的时候, 这一概念位于物理中规范场理论背后的数学框架的核心。(见 Chapter 35 和 Chapter 39)。

练习 31.1 根据 (31.4), 对于球坐标,

$$A = (a_i^j) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (31.35)$$

显式说明 $A^{-1} = A^T$ 。

练习 31.2 从 (31.4), 通过外微分说明, 即: 在球坐标中通过计算 de_1, de_2 和 de_3 , 1-形式的联络矩阵 (ω_i^j) 由下式给出

$$(\omega_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & d\theta & \sin \theta d\phi \\ -d\theta & 0 & \cos \theta d\phi \\ -\sin \theta d\phi & -\cos \theta d\phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (31.36)$$

注意, 如 (31.22) 预期一样, (ω_i^j) 是反对称的。

练习 31.3 显式说明 (31.35) 和 (31.36) 满足 (31.19), 即:

$$\omega = (dA) \cdot A^{-1} .$$

练习 31.4 通过对 (31.3) 的外微分并与 (31.11) 比较结果, 说明对于球坐标,

$$\omega^1 = dr , \quad \omega^2 = r d\theta , \quad \omega^3 = r \sin \theta d\phi . \quad (31.37)$$

因此, 球坐标中体积形式 (一个 3-形式) 被给出通过类似的结果

$$dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\phi . \quad (31.38)$$

我们可以写出

$$\omega^1 = \lambda_1 dr , \quad \omega^2 = \lambda_2 d\theta , \quad \omega^3 = \lambda_3 d\phi , \quad (31.39)$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数, 由下式给出

$$\lambda_1 = 1 , \quad \lambda_2 = r , \quad \lambda_3 = r \sin \theta . \quad (31.40)$$

方程 (31.11)[或者 (31.15)] 暗含着 ω^i 对偶于 e_j , 即:

$$\langle e_i, \omega^j \rangle = \delta_i^j . \quad (31.41)$$

练习 31.5 通过写

$$\delta_1 = \frac{\partial}{\partial x} , \quad \delta_2 = \frac{\partial}{\partial y} , \quad \delta_3 = \frac{\partial}{\partial z} ,$$

并运用类似变换方程

$$x = r \sin \theta \cos \phi , \quad y = r \sin \theta \sin \phi , \quad z = r \cos \theta , \quad (31.42)$$

显式说明对于分别由 (31.4) 和 (31.37) 给出的 e^i 和 ω^j 的表达式, 满足对偶条件 (31.41)。

移动标架 $\{e_i\}$ 的总体被称为一个**标架场 (frame field)**, 并且因此 $\{\omega^i\}$ 被称为**余标架场 (coframe field)**。根据 (31.37) 和对偶条件 (31.41), 球坐标中的单位向量 $e_r = e_1, e_\theta = e_2$ 和 $e_\phi = e_3$ 由下式给出

$$e_r = \frac{\partial}{\partial r} , \quad e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} , \quad e_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} . \quad (31.43)$$

注意到 $\frac{\partial}{\partial \theta}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \phi}$ 不是单位向量。

我们现在将运用外微分来得到球坐标中梯度、Laplace 算符、散度和旋度的向量微积分算

符的类似公式。这些由下式给出

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} e_\phi, \quad (31.44)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) \right\}, \quad (31.45)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}, \quad (31.46)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right\} e_r \\ & + \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right\} e_\theta + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right\} e_\phi, \end{aligned} \quad (31.47)$$

其中, f 是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个光滑函数并且

$$\mathbf{A} = A_x \delta_1 + A_y \delta_2 + A_z \delta_3 = A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_\phi e_\phi \quad (31.48)$$

是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个光滑向量场。算符 $\nabla, \nabla^2, \nabla \cdot$ 和 $\nabla \times$ 分别是梯度、Laplace 算符、散度和旋度, 前两个作用在标量场上, 后两个作用在向量场上。

要推导出上面四个公式, 实际上更方便的是直接考虑由局域坐标确定的任意曲线坐标系, 使得

$$dp = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3, \quad (31.49)$$

$$\omega^1 = \lambda_1 dx^1, \quad \omega^2 = \lambda_2 dx^2, \quad \omega^3 = \lambda_3 dx^3, \quad (31.50)$$

$$\langle e_i, \omega^j \rangle = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (31.51)$$

并且体积元素由下式给出

$$dx \wedge dy \wedge dz = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (31.52)$$

对于球坐标 $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$, (31.50) 和 (31.51) 说明

$$e_i = \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (31.53)$$

其中, 我们已经使用了 [c.f. (30.9)]

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j \right\rangle = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (31.54)$$

有了上面的设定, 我们现在可以继续通过 (31.37) 将 (31.44) 推广到任意曲线坐标。

先考虑**梯度 (gradient)**。我们有

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial f}{\partial x^3} dx^3 = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial f}{\partial x^1} \omega^1 + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial f}{\partial x^2} \omega^2 + \frac{1}{\lambda_3} \frac{\partial f}{\partial x^3} \omega^3, \quad (31.55)$$

其中, 第二个等号来自于 (31.50)。鉴于 (31.51)(e_i 和 ω^j 之间的对偶性), 我们立即有: 通过回想起 (30.39) 后面的讨论,

$$\nabla f = \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial f}{\partial x^1} e_1 + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial f}{\partial x^2} e_2 + \frac{1}{\lambda_3} \frac{\partial f}{\partial x^3} e_3 . \quad (31.56)$$

通过使用 (31.40) 产生了 (31.44)。

接下来考虑 **Laplace 算符 (Laplacian)**。在直角坐标 (x, y, z) 中, 我们有

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} . \quad (31.57)$$

我们将说明

$$\nabla^2 f \, dx \wedge dy \wedge dz = d(\star df) , \quad (31.58)$$

其中, $\star$ 是 Hodge-star 算符。开始于

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz , \quad (31.59)$$

我们有, 从 Chapter 29 中的结论,

$$\star df = \frac{\partial f}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dx \wedge dy . \quad (31.60)$$

取外微分上 [运用 (30.28)], 它得到

$$d(\star df) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dx \wedge dy \wedge dz . \quad (31.61)$$

现在运用曲线坐标。方程 (31.52) 和 (31.58) 说明

$$d(\star df) = \nabla^2 f \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 . \quad (31.62)$$

运用 (31.55) 和 (31.50), 我们有

$$\begin{aligned} \star df &= \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial f}{\partial x^1} \omega^2 \wedge \omega^3 + \frac{1}{\lambda_2} \frac{\partial f}{\partial x^2} \omega^3 \wedge \omega^1 + \frac{1}{\lambda_3} \frac{\partial f}{\partial x^3} \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^2} \right) dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3} \left(\frac{\partial f}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 . \end{aligned} \quad (31.63)$$

因此, 对上面的方程再次取外微分 [使用 (30.38)], 我们得到

$$d(\star df) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1} \frac{\partial f}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_2} \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3} \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) \right\} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 . \quad (31.64)$$

但是通过 (31.50),

$$dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \frac{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} . \quad (31.65)$$

因此, 我们最终有, 从 (31.62), 下面的曲线坐标 x^1, x^2, x^3 中函数 f 的 Laplace 算符公式:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1} \frac{\partial f}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_3}{\lambda_2} \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_3} \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) \right\} \quad (31.66)$$

通过对 λ_1, λ_2 和 λ_3 运用 (31.40), 它立刻对于球坐标给出了 (31.45)。

让我们现在来考虑散度。假设

$$\mathbf{A} = A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 \quad (31.67)$$

是一个 $\mathbb{R}^3$ 上的一个向量场, 其中 A^1, A^2, A^3 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数。有了 $\mathbf{A}$ 的分量构造 2-形式

$$\psi = A^1 \omega^2 \wedge \omega^3 + A^2 \omega^3 \wedge \omega^1 + A^3 \omega^1 \wedge \omega^2. \quad (31.68)$$

我们则有, 从 (30.43),

$$d\psi = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3. \quad (31.69)$$

重写 (31.68) 为

$$\psi = \lambda_2 \lambda_3 A^1 dx^2 \wedge dx^3 + \lambda_1 \lambda_3 A^2 dx^3 \wedge dx^1 + \lambda_1 \lambda_2 A^3 dx^1 \wedge dx^2, \quad (31.70)$$

我们可以“用一个 d 打 ψ (hit ψ with a d)” (外微分) 来得到

$$d\psi = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} (\lambda_2 \lambda_3 A^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\lambda_1 \lambda_3 A^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\lambda_1 \lambda_2 A^3) \right\} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \quad (31.71)$$

再次运用 (31.65) 产生曲线坐标中一个向量场的散度的如下表达式:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} (\lambda_2 \lambda_3 A^1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (\lambda_1 \lambda_3 A^2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (\lambda_1 \lambda_2 A^3) \right\}, \quad (31.72)$$

借助 (31.40), 可以立刻从中得到球坐标的特殊公式 (31.46)。

最终, 我们考虑旋度 (curl)。令 $\mathbf{A}$ 为由 (31.67) 给出的一个向量场。它的对偶 1-形式是

$$\alpha = A^1 \omega^1 + A^2 \omega^2 + A^3 \omega^3. \quad (31.73)$$

根据 (30.40) 后面的讨论, $\nabla \times \mathbf{A}$ 从 α 得到, 通过关系

$$\star (d\alpha) = (\nabla \times \mathbf{A})^1 \omega^1 + (\nabla \times \mathbf{A})^2 \omega^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^3 \omega^3. \quad (31.74)$$

写出

$$\alpha = \lambda_1 A^1 dx^1 + \lambda_2 A^2 dx^2 + \lambda_3 A^3 dx^3, \quad (31.75)$$

我们可以取外微分来得到

$$\begin{aligned}
 d\alpha &= \frac{\partial}{\partial x^2} (\lambda_1 A^1) dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial}{\partial x^3} (\lambda_1 A^1) dx^3 \wedge dx^1 \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x^1} (\lambda_2 A^2) dx^1 \wedge dx^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} (\lambda_2 A^2) dx^3 \wedge dx^2 \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial x^1} (\lambda_3 A^3) dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial}{\partial x^2} (\lambda_3 A^3) dx^2 \wedge dx^3 \\
 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} (\lambda_3 A^3) - \frac{\partial}{\partial x^3} (\lambda_2 A^2) \right\} dx^2 \wedge dx^3 \\
 &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial x^3} (\lambda_1 A^1) - \frac{\partial}{\partial x^1} (\lambda_3 A^3) \right\} dx^3 \wedge dx^1 \\
 &\quad + \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} (\lambda_2 A^2) - \frac{\partial}{\partial x^2} (\lambda_1 A^1) \right\} dx^1 \wedge dx^2 \\
 &= \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^2} (\lambda_3 A^3) - \frac{\partial}{\partial x^3} (\lambda_2 A^2) \right\} \omega^2 \wedge \omega^3 \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^3} (\lambda_1 A^1) - \frac{\partial}{\partial x^1} (\lambda_3 A^3) \right\} \omega^3 \wedge \omega^1 \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} (\lambda_2 A^2) - \frac{\partial}{\partial x^2} (\lambda_1 A^1) \right\} \omega^1 \wedge \omega^2 .
 \end{aligned} \tag{31.76}$$

注意到

$$\star(\omega^2 \wedge \omega^3) = \omega^1, \quad \star(\omega^3 \wedge \omega^1) = \omega^2, \quad \star(\omega^1 \wedge \omega^2) = \omega^3, \tag{31.77}$$

方程 (31.74) 则允许我们来写

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \begin{vmatrix} \lambda_1 e_1 & \lambda_2 e_2 & \lambda_3 e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ \lambda_1 A^1 & \lambda_2 A^2 & \lambda_3 A^3 \end{vmatrix}. \tag{31.78}$$

方程 (31.40) 和上面方程立刻产生球坐标中对于 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的 (31.47)。

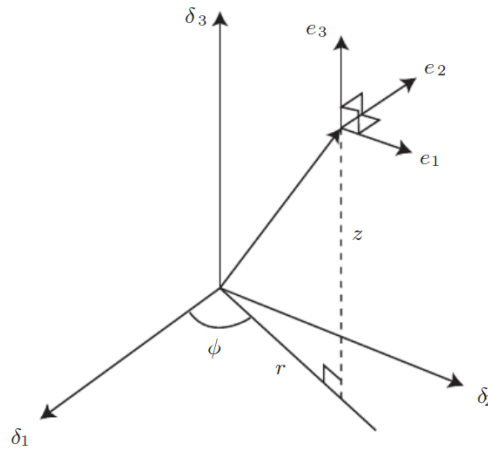


Figure 31.2

练习 31.6 说明对于柱坐标, 其中 $x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = z$ (见 Figure 31.2),

$$\omega^1 = dr, \quad \omega^2 = r d\phi, \quad \omega^3 = dz, \quad (31.79)$$

或者

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = r, \quad \lambda_3 = 1. \quad (31.80)$$

32. 微分形式的积分和 Stokes 定理

在外向量上由 (28.38) 定义的拉回映射可以轻松扩展到微分形式的拉回映射。这种扩展在微分形式的积分理论中起着至关重要的作用，这是对 $\mathbb{R}^n$ 中确定区域上多重积分的流形的推广。

假设 $f : M \rightarrow N$ 是一个从一个光滑流形 M 到一个光滑流形 N 的光滑映射。则它在外微分形式的对应空间之间引出一个线性映射：

$$f^* : A(N) \rightarrow A(M), \quad (32.1)$$

被称为 f 的**拉回 (pullback)**，由下面的步骤依次定义。

定义 32.1 假设 $f : M \rightarrow N$ 是光滑流形 M 和 N 之间的一个光滑映射， $x \in M$ ，并且 $y = f(x) \in N$ 。拉回映射

$$f^* : T_y^*(N) \rightarrow T_x^*(M), \quad (32.2)$$

由下式给出

$$f^*(d\phi)_y = (d(\phi \circ f))_x, \quad (32.3)$$

其中， $(d\phi)_y \in T_y^*(N)$ 和 ϕ 是 N 上的一个函数。

(32.2) 中的映射 f^* 有时被称为映射 f 的**微分 (differential)**。从 f^* ，我们可以立即得到它的伴随 f_* ，或者由 f 引出的**切映射 (tangent map)** 或**导数映射 (derivative map)**。

定义 32.2 令 $f : M \rightarrow N$ 是一个光滑映射， $X \in T_x(M)$ ，并且 $d\phi \in T_y^*(N)$ 。则切映射

$$f_* : T_x(M) \rightarrow T_y(N) \quad (32.4)$$

由下式给出

$$\langle f_* X, d\phi \rangle_y = \langle X, f^*(d\phi) \rangle_x. \quad (32.5)$$

注意到上面方程中的“上星”和“下星”映射 f^* 和 f_* 之间的伴随关系。这些映射显然是线性的。切映射 f_* 的作用在 Figure 32.1 中直观地说明，其中 X 是在 $x \in M$ 处的 M 的切向量，而 $f_* X$ 是在 $y = f(x) \in N$ 处的 N 的切向量。 M 中的曲线 γ 被 f 映射到 N 中的曲线 $f(\gamma)$ 。

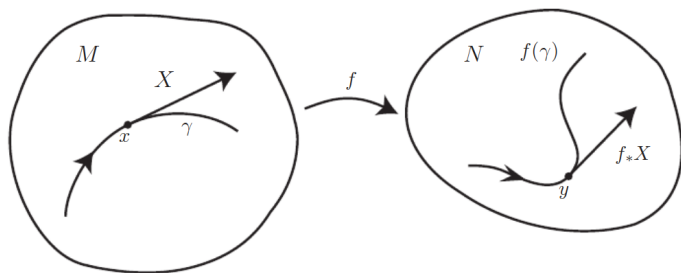


Figure 32.1

练习 32.1 假设 $\dim(M) = m$ 和 $\dim(N) = n$ 。令 $(x^1, \dots, x^m)$ 和 $(y^1, \dots, y^n)$ 分别是 $x \in M$ 和 $y \in N$ 附近的局域坐标。映射 $f: M \rightarrow N$ 可以通过 n 个函数在 x 点附近表示

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^m), \quad 1 \leq \alpha \leq n. \quad (32.6)$$

说明 f^* 和 f_* 在自然基底 $\{dy^\alpha, 1 \leq \alpha \leq n\}$ 和 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, 1 \leq i \leq m\}$ 上的作用由下式给出：

$$f^*(dy^\alpha) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \right)_x dx^i, \quad (32.7)$$

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i} \right)_x \frac{\partial}{\partial y^\beta}. \quad (32.8)$$

上面的结果表明： f_* 和 f^* 在自然 (坐标) 基底下有相同的矩阵表示。

现在我们准备提供在先前 (32.1) 承诺的拉回映射的定义。

定义 32.3 假设 $f: M \rightarrow N$ 是一个光滑映射， $X_1, \dots, X_r$ 是 r 个 M 上任意光滑切向量场，并且 $\beta \in A^r(N)$, $r \geq 1$ 一个是 N 上的微分 r -形式。 $\beta, f^*\beta$ 的拉回有下面的方式逐点给出

$$\langle X_1 \wedge \dots \wedge X_r, f^*\beta \rangle_x = \langle f_*X_1 \wedge \dots \wedge f_*X_r, \beta \rangle_{f(x)}, \quad (32.9)$$

其中， x 是 M 中一个任意的点。如果 $\beta \in A^0(N)$ ，则

$$f^*\beta = \beta \circ f \in A^0(M). \quad (32.10)$$

当微分形式和切向量场用自然坐标表述时，上面的配对可以通过 (30.29) 计算。

通过定理 28.2，我们立刻有

定理 32.1 对于任意 $\omega, \eta \in A(N)$ (流形 M 上的外微分形式) 和一个给定光滑函数 $f: M \rightarrow N$, f^* 分布在外积上, 即:

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta. \quad (32.11)$$

拉回映射 f^* 的重要也依赖于它与外微分对易的事实。具体地说, 我们有下面有用的定理, 将只表述而不证明。

定理 32.2 令 $f: M \rightarrow N$ 是一个光滑映射。则

$$f^* \circ d = d \circ f^*: A(N) \rightarrow A(M). \quad (32.12)$$

等价地, 我们有下面的交换图表。

$$\begin{array}{ccc} A(N) & \xrightarrow{d} & A(N) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ A(M) & \xrightarrow{d} & A(M) \end{array}$$

定义微分形式的积分的下一步是引入**可定向流形 (orientable manifold)** 的概念。

定义 32.4 如果一个 n -维光滑流形 M 上存在一个连续且非零微分 n -形式 ω , M 称为**可定向 (orientable)**。给定这样一个 ω , M 称为**已定向 (oriented)**(通过 ω)。仅一个正函数因子不同的两个这样的形式被称为 M 赋予相同**定向 (orientation)**。

从上面的定义中立刻得到如果一个连通流形 M 是可定向的, 则 M 上刚好存在两个定向。

练习 32.2 解释为什么上面的表述是正确的。

假设一个 n -维可定向流形通过一个外形式 ω 已定向, 并且 $(U; x^i)$ 是 M 中的一个局域坐标系统。则 $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 和 $\omega|_U$ (ω 局限于 U) 是一样的在一个非零函数因子的意义下。如果因子是正的, 则我们称 $(U; x^i)$ 是一个与 M 定向**一致 (consistent)** 的坐标系统。很明显, 对于任意已定向流形, 存在一个坐标覆盖与流形定向一致 (这里意思是说在覆盖中的任意坐标系统与 M 的定向一致, 并且任意两个具有非空交点的坐标邻域之间的坐标变化的 Jacobi 行列式总是正的)。

接下来, 我们引入一个**函数的支撑 (support of a function)** 和一个**外微分形式的支撑 (support of an exterior differential form)** 的概念。

定义 32.5 假设 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是 M 上的一个实函数。 f 的支撑是 M 中点集的闭包, 其中 f 不为零:

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}, \quad (32.13)$$

其中, 集合 $\{ \}$ 的闭包记为 $\overline{\{ \}}$ 。

定义 32.6 假设 $\omega \in A(M)$ (ω 是 M 上的一个外微分形式)。 ω 的支撑, 记为 $\text{supp } \omega$, 由下式给出

$$\text{supp } \omega = \overline{\{x \in M \mid \omega_x \neq 0\}}. \quad (32.14)$$

下面的定理提供了定义一个外微分形式的积分的关键技术。这个定理的证明需要一些基

拓拓扑学的使用, 因此这里将不会给出 (见陈省身, 陈维垣和 Lam, 1999)。

定理 32.3 — 单位分解 (Partition of Unity). 假设 Σ 是一个光滑流形 M 的一个开覆盖。则存在 M 上的一族光滑函数 $\{g_\alpha\}$ 满足下面条件:

- 1) $1 \leq g_\alpha \leq 1$, 并且对于每个 α , $\text{supp } g_\alpha$ 是紧致的。此外, 对于每个 α , 存在一个开集 $W_i \subset \Sigma$ 使得 $g_\alpha \subset W_i$ 。
- 2) 对于每个 $x \in M$, 存在 x 的一个邻域 U 与 $\text{supp } g_\alpha$ 相交仅对于有限个 α 。
- 3)

$$\sum_{\alpha} g_{\alpha} = 1 .$$

条件 2) 确保: 对于任意 $x \in M$, 条件 3) 中只有有限个非零项。函数族 $\{g_\alpha\}$ 被称为隶属于坐标覆盖 Σ 的一个**单位分解 (partition of unity)**。

有了上面背景, 我们现在可以定义 M 上有紧致支撑一个外微分形式的积分。为了阐明该过程, 将在下面 (a) 到 (d) 步骤中完成。在这些步骤中, 我们将假定 M 是一个已定向流形, 并且 $\dim(M) = n$ 。

(a) 首先定义 M 上的一个 n -形式 φ 的积分。选择一个坐标覆盖 $\Sigma = \{W_i\}$, 这与 M 的定向相一致。如果 $\text{supp } \varphi$ 恰好是坐标邻域 $U \subset \Sigma$ 中有局域坐标 x^i 与 M 的定向相一致, 则 φ 可以表述为

$$\varphi = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n . \quad (32.15)$$

在这种情况下, 我们定义

$$\int_M \varphi \equiv \int_U f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n , \quad (32.16)$$

其中, 等号右边的积分是一般 Riemann 积分。

(b) 如果 $\text{supp } \varphi$ 不落在一个特定的 $U \subset \Sigma$ 中, 我们使用隶属于 Σ 的单位分解 $\{g_\alpha\}$ 如下。

先写出

$$\varphi = \left(\sum_{\alpha} g_{\alpha} \right) \varphi = \sum_{\alpha} (g_{\alpha} \cdot \varphi) . \quad (32.17)$$

显然, $\text{supp}(g_{\alpha} \cdot \varphi) \subset \text{supp } g_{\alpha}$ 。通过定理 32.3 的条件 1), 存在一些坐标邻域 $W_i \subset \Sigma$ 使得

$$\text{supp } (g_{\alpha} \cdot \varphi) \subset \text{supp } g_{\alpha} \subset W_i ,$$

因此, 我们可以定义

$$\int_M g_{\alpha} \cdot \varphi \equiv \int_{W_i} g_{\alpha} \cdot \varphi , \quad (32.18)$$

其中, 等号右边的积分是一般 Riemann 积分。这意味着: 如果 $g_{\alpha} \cdot \varphi$ 依赖于 W_i 中坐标系 $x^1, \dots, x^n$ 被表述为

$$g_{\alpha} \cdot \varphi = h(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n , \quad (32.19)$$

则 (32.18) 的等号右边的积分由下式给出

$$\int_{W_i} g_\alpha \cdot \varphi = \int_{W_i} h(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n. \quad (32.20)$$

由 (32.18) 给出的定义说得通因为方程的等号右边与 W_i 的选择独立。实际上, 如果 $\text{supp}(g_\alpha \cdot \varphi)$ 分别包含在两个坐标邻域 W_i 和 W_j 中, 分别具有坐标系 $(x^1, \dots, x^n)$ 和 $(y^1, \dots, y^n)$, 则坐标变化的 Jacobi 行列式满足

$$J = \frac{\partial(y^1, \dots, y^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} > 0, \quad (32.21)$$

并且

$$g_\alpha \cdot \varphi = h(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \quad (\text{in } W_i), \quad (32.22)$$

$$g_\alpha \cdot \varphi = h'(y^1, \dots, y^n) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \quad (\text{in } W_j). \quad (32.23)$$

定理 28.7 和方程 (32.21) 说明

$$h' \cdot J = h' |J| = h. \quad (32.24)$$

另一方面, 通过 Riemann 积分中变量改变的规则, 我们有

$$\int_{W_i \cap W_j} h' dy^1 \dots dy^n = \int_{W_i \cap W_j} h' |J| dx^1 \dots dx^n = \int_{W_i \cap W_j} h dx^1 \dots dx^n. \quad (32.25)$$

因此

$$\int_{W_i} g_\alpha \cdot \varphi = \int_{W_j} g_\alpha \cdot \varphi. \quad (32.26)$$

(c) 由于 $\text{supp } \varphi$ 根据假设是紧致的, 它仅通过单位分解定理 (定理 32.3) 的条件 2) 与有限 $\text{supp } g_\alpha$ 相交。因此, (32.17) 的等号右边是有限项的求和 (α 上)。使用 (32.18), 我们现在定义

$$\boxed{\int_M \varphi \equiv \sum_\alpha \int_M g_\alpha \cdot \varphi}. \quad (32.27)$$

上面的方程等号右边取决于单位分解的一个特定选择, 但实际上不是这样的。实际上, 假设 $\{g'_\beta\}$ 是隶属于坐标覆盖 Σ 的另一个单位分解。则通过定理 32.3 的条件 3),

$$\begin{aligned} \sum_\beta \int_M g'_\beta \cdot \varphi &= \sum_\beta \sum_\alpha \int_M g_\alpha \cdot g'_\beta \cdot \varphi \\ &= \sum_\alpha \int_M \sum_\beta g'_\beta \cdot g_\alpha \cdot \varphi = \sum_\alpha \int_M g_\alpha \cdot \varphi. \end{aligned} \quad (32.28)$$

(d) 在 n -维流形 M 上定义了具有紧致支撑的 n -形式的积分后, 我们现在可以定义具有紧致支撑的 r -形式的积分, 对于 $r < n$, 在 M 的任何 r -维子流形 N 上。(这时, 我们将只求我们对**嵌入子流形 (embedded submanifold)** 的概念的直观理解, 比如, 将二

维表面嵌入到三维 Euclid 空间中)。令

$$h: N \longrightarrow M$$

是 r -维流形 N 嵌入到 n -维流形 M 中, $r < n$; 并且 φ 是 M 上有紧致支撑的微分 r -形式。然后, 从定义 32.3 中, 拉回 $h^*\varphi$ 是具有紧致支撑的 N 上的一个微分 r -形式。所以积分

$$\int_N h^*\varphi$$

是完美定义的根据上面 [c.f. (32.27)] 对应的 (a) 到 (c) 步。我们则在子流形 $h(N)$ 上定义了 φ 的积分

$$\boxed{\int_{h(N)} \varphi \equiv \int_N h^*\varphi} . \quad (32.29)$$

这样就完成了具有紧致支撑的一个微分形式积分的定义。

令 $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ 是具有紧致支撑的 $M(n$ -维) 上的外微分 n -形式。则 $\varphi_1 + \varphi_2$ 有紧致支撑, $c\varphi$ 也有, 对于任意实数 c 。通过定义 (32.27), 很明显

$$\int_M (\varphi_1 + \varphi_2) = \int_M \varphi_1 + \int_M \varphi_2 , \quad (32.30)$$

$$\int_M c\varphi = c \int_M \varphi . \quad (32.31)$$

因此, 积分 $\int_M$ 可以被看成具有紧致支撑 M 上所有 n -形式的集合上的一个**线性泛函 (linear functional)**。方程 (32.27) 实际上是流形情况下 Riemann (多重) 积分的一个推广。

微分形式的积分上的中心定理是 **Stokes 定理 (Stokes Theorem)**, 正如我们将看到的那样, 它是将 $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 的区域上积分的几个熟悉定理 (包括向量微积分定理) 推广到任意维度的流形中的区域上的积分。

在开始定理之前, 我们将首先了解更熟悉的积分定理是以何种不同的姿态展现的。

■ **例 32.1** 假设 $D = [a, b]$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个封闭区间并且 f 是 D 上的一个 C^1 的函数 (连续可微函数)。**微积分基本定理 (Fundamental Theorem of Calculus)** 则说:

$$\int_D df = f(b) - f(a) = \int_{\partial D} f , \quad (32.32)$$

其中, D 的**已定向边界 (oriented boundary)**, 记为 ∂D , 由 $\{b\} - \{a\}$ 给出。注意到上面方程第二个等号的右边是一个零维空间上一个零-形式的积分, 同时第一个等号的左边是一个 1-维空间上一个 1-形式的积分。这些积分都是 (32.27) 的特殊情况。 ■

■ **例 32.2** 假设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的有界区域, 它的定向和 $\mathbb{R}^2$ 的给定定向一致。 D 的已定向边界, 由 D 的定向引入, 记为 ∂D 。这意味着 ∂D 的定向与指向 D 内部的法向量一起组成了与 $\mathbb{R}^2$ 的给定定向相一致的坐标系 (见 Figure 32.2)。

在 Figure 32.2 中, D 是环形区域。 ∂D 的定向是 $(-1)^2 dx^1$ [当我们对任意维度一个边界上的诱导定向进行更一般的定义时, 我们将解释系数 $(-1)^2$]。坐标系 (x^1, x^2) 则有一个定向 $dx^1 \wedge dx^2$, 与 $\mathbb{R}^2$ 的给出的定向 $dx \wedge dy$ 相一致。

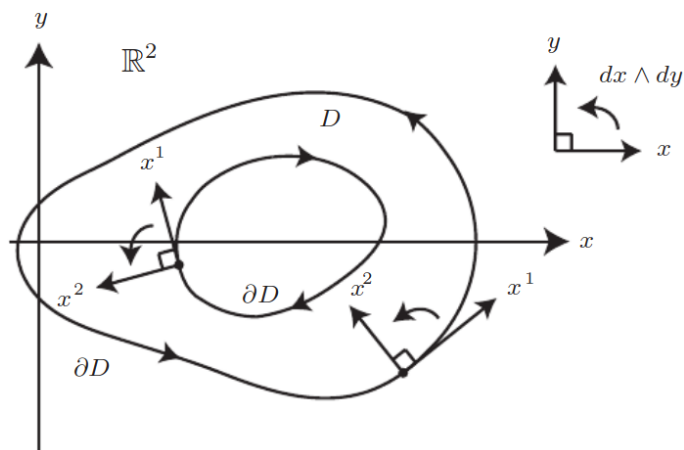


Figure 32.2

现在假设 P 和 Q 都是 D 上的 C^1 函数。则 **Green 定理 (Green's Theorem)** 表述为

$$\int_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy . \quad (32.33)$$

上面方程两边的被积函数被简单联系起来。如果我们令 ω 是 1-形式

$$\omega = Pdx + Qdy , \quad (32.34)$$

则

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy . \quad (32.35)$$

因此, Green 定理 (32.33) 也可以被写为

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega . \quad (32.36)$$

注意上面方程和 (32.32) 中表述的微积分基本定理之间的相似性。 ■

■ **例 32.3** 假设 D 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界区域, 其定向与 $\mathbb{R}^3$ 中的给出的区域一致。这次我们使用外法向作为正方向来引入 D 边界上的定向, 再次记为 ∂D (见 Figure 32.3)。

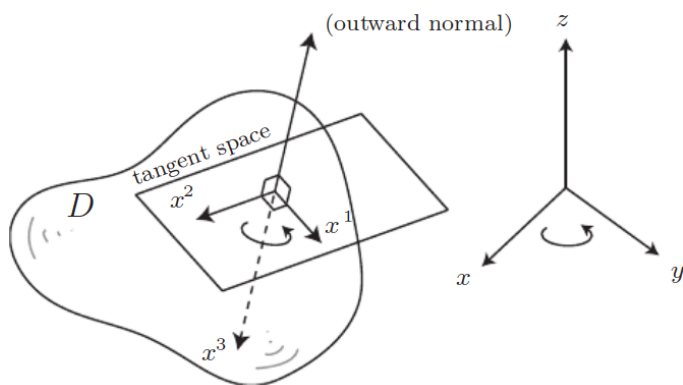


Figure 32.3

在 Figure 32.3 中, ∂D 的诱导定向由 $(-1)^3 dx^1 \wedge dx^2 = dx^2 \wedge dx^1$ 给出。[再次, 将在稍后解释系数 $(-1)^3$]。连同外发向一起, 我们有定向 $dx^2 \wedge dx^1 \wedge (-dx^3) = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, 与 $dx \wedge dy \wedge dz$ 相一致, 即 $\mathbb{R}^3$ 中给出的那个。

假设 P, Q, R 是 D 上的 C^1 函数。则 **Gauss 定理 (Gauss's Theorem)** 表述为

$$\int_{\partial D} (Pdydz + Qdzdx + Rdx dy) = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (32.37)$$

再一次, 被积函数通过外微分简单地联系起来。令 φ 是 2-形式

$$\varphi = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy. \quad (32.38)$$

则 (32.37) 可以被写为

$$\int_{\partial D} \varphi = \int_D d\varphi. \quad (32.39)$$

在一般向量符号中, Gauss 定理出现为

$$\int_{\partial D} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} = \int_D \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r, \quad (32.40)$$

其中, $\mathbf{A}$ 是向量场

$$\mathbf{A} = Pe_x + Qe_y + Re_z, \quad (32.41)$$

同时 $d\mathbf{a}$ 是 ∂D 中沿着外法向一个区域元素。■

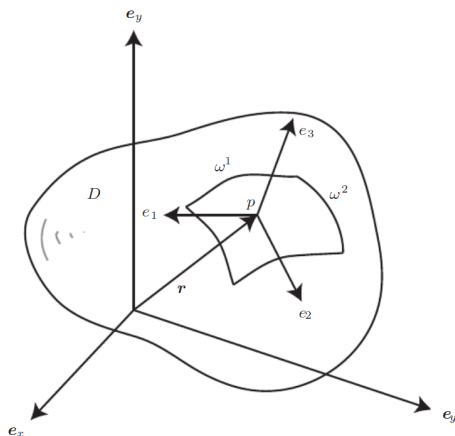


Figure 32.4

练习 32.3 考虑 Figure 32.4, 其中 (e_1, e_2, e_3) 是 D 的一个边界点 p 处的标准正交标架。如果我们令 p 移动到一个无限靠近 ∂D 上的位置, 则

$$dp = d\mathbf{r} = dx e_x + dy e_y + dz e_z = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2, \quad (32.42)$$

其中, $\omega^1 = \lambda_1 dx^1, \omega^2 = \lambda_2 dx^2$ [c.f. (31.39)] 是 ∂D 上的 1-形式。说明区域元素 $\omega^1 \wedge \omega^2 e_3$

由下式给出

$$\omega^1 \wedge \omega^2 e_3 = (dy \wedge dz)e_x + (dz \wedge dx)e_y + (dx \wedge dy)e_z. \quad (32.43)$$

这个方程允许我们将 (32.40) 的等号左边和 (32.37) 的等号左边等价。

■ **例 32.4** 假设 Σ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的已定向曲面，其边界 $\partial\Sigma$ 是一个已定向闭合曲线，使得 Σ 的正定向与外法向量一起组成右手坐标系。当然，我们假设 $\mathbb{R}^3$ ，其中嵌入了 Σ ，是通过这样的系统已定向 (Figure 32.5)。

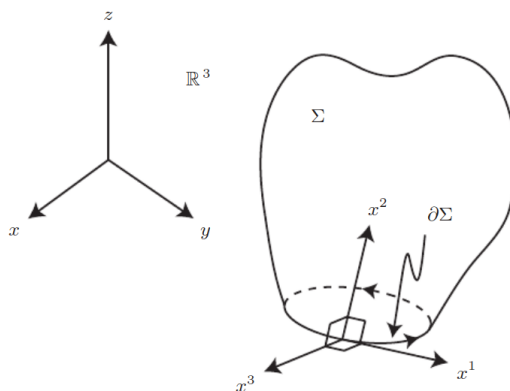


Figure 32.5

在 Figure 32.5 中， Σ 的定向由 $dx^1 \wedge dx^2$ 给出， $\partial\Sigma$ 上的诱导定向为 $(-1)^2 dx^1 = dx^1$ ，并且 $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \sim dx \wedge dy \wedge dz$ ，其中 $\sim$ 表示定向等价。

假设 P, Q, R 是包含 E 的域上的 C^1 函数。则 3 维矢量演算的 Stokes 定理表述为

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_{\Sigma} \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \right\}. \end{aligned} \quad (32.44)$$

如果我们定义 1-形式 ω 为

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz, \quad (32.45)$$

方程 (32.44) 简化为

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega. \quad (32.46)$$

在一般向量符号中，上面的 Stokes 定理出现为

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}, \quad (32.47)$$

其中， $\mathbf{A}$ 是由 (32.41) 给出的向量场， $d\mathbf{l}$ 是沿着 $\partial\Sigma$ 的正向一个无穷小位移向量，并且 $d\mathbf{a}$ 是 Σ 中一个区域元素 (沿着外法向)。 ■

我们注意到上面四个例子中最后的结论, (32.32), (32.36), (32.39) 和 (32.46), 都有一样的形式。这暗示它们是一个更一般定理的特殊情况, 确实如此。一般的定理也被已知为 **Stokes 定理 (Stokes Theorem)**, 并用于任意维度流形中的区域。我们现在将表述而不证明这一重要定理。(对于证明, 见陈省身, 陈维垣和 Lam, 1999)。

定理 32.4 — Stokes 定理 (Stokes Theorem). 假设 D 是 n -维度已定向流形 M 中具有边界的一个区域, 而 ω 是具有紧致支撑 M 上的一个外微分 $(n-1)$ -形式。则

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega, \quad (32.48)$$

其中, ∂D 是 D 的边界具有诱导定向。如果 $\partial D = \emptyset$ (空集), 则等号右边上积分为零。

∂D 的诱导定向的概念需要一些解释, 其中 D 是一个 n -维光滑流形 M 的一个嵌入子流形。首先我们表述

定义 32.7 假设 M 是一个 n -维光滑流形。具有边界 D 的区域 (region with boundary D) 是 M 的子集, 有两类点:

- 1) 内部点 (interior points), 其中每一个在 D 中包含的 M 中都有一个邻域;
- 2) 边界点 (boundary points), 对于其中每一个, 存在坐标卡 (U, x^i) 使得 $x^i(p), i = 1, \dots, n$, 并且

$$U \cap D = \{q \in U | x^n(q) \geq 0\}.$$

(对于 $n=3$ 的情况, 见 Figure 32.6)

具有上面性质的坐标系 x^i 被称为对于边界点 p 的一个可适坐标系 (adapted coordinate system)。 D 的所有边界点的集合称为 D 的边界, 记为 ∂D 。

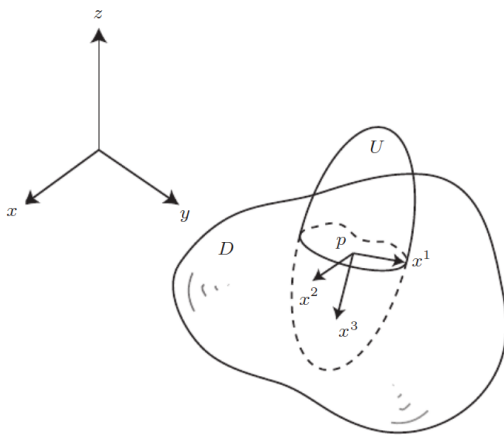


Figure 32.6

令 M 是一个已定向 n -维流形, 并且 D 是 M 中具有边界的区域。在点 $p \in \partial D$ 处, 选择一个可适坐标系 x^i 使得 $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ 与 M 给定的定向相一致。则 $(x^1, \dots, x^{n-1})$ 是 ∂D 在 p 处的局域坐标系。 ∂D 的定向由下式确定

$$(-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \quad (32.49)$$

被称为边界 ∂D 上的诱导定向 (induced orientation)。很容易看出, 在例 32.1到32.4中, 所有边界上的诱导定向都满足 (32.49)。

写

$$\int_{\partial D} \omega = (\partial D, \omega), \quad (32.50)$$

$$\int_D d\omega = (D, d\omega), \quad (32.51)$$

其中，等号右边的括号中每项都可以看成作用于另一项的线性函数，我们看到 Stokes 定理描述了边界算符 (boundary operator) ∂ 与外微分算符 d 之间的对偶。因此， d 也称为上边界算符 (coboundary operator)。 ∂ 和 d 也可以互相看成伴随算符。

我们将用在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中边界算符 ∂ 是如何作用在确定标准形状，称为单形的讨论总结本章。 $n = 1, 2, 3$ 的情况将提供对形式规则的一个直观理解。

定义 32.8 一个 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 r -单纯形 (r -simplex), $r \leq n$ ，通过有序符号记为

$$S_r = (p_0 p_1 \dots p_r), \quad r \leq n, \quad (32.52)$$

是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个已定向边界由下面的点集组成

$$S_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = m_0 p_0 + \dots + m_r p_r, m_i \geq 0, \sum_{i=0}^r m_i = 1 \right\}, \quad (32.53)$$

其中

$$p_0 = (0, \dots, 0),$$

$$p_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\vdots$$

$$p_r = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \quad ("1" \text{ 在第 } r \text{ 个位置}),$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中所有点。

(32.53) 中的点 x 可以解释为质量分别为 $m_0, \dots, m_r$ ，分别位于 $p_0, \dots, p_r$ 的一个质点系统的“质心 (center of mass)”。

例， S_0, S_1, S_2, S_3 显示在 Figure 32.7 中。

直观地，我们可以写

$$\partial S_0 = \partial(p_0) = 0, \quad (32.54)$$

$$\partial S_1 = \partial(p_0 p_1) = p_1 - p_0, \quad (32.55)$$

$$\partial S_2 = \partial(p_0 p_1 p_2) = p_1 p_2 - p_0 p_2 + p_0 p_1 = p_1 p_2 + p_2 p_0 + p_0 p_1, \quad (32.56)$$

$$\partial S_3 = \partial(p_0 p_1 p_2 p_3) = p_1 p_2 p_3 - p_0 p_2 p_3 + p_0 p_1 p_3 - p_0 p_1 p_2. \quad (32.57)$$

在 Figure 32.7 中最后一个方程中， S_3 是棱锥并且等号右边中的每一项 (带符号) 是棱锥的已定向面，其定向与由 (32.49) 定义的诱导定向一致。根据诱导定向围绕面的角落，根据右手定则给出一个外法向。

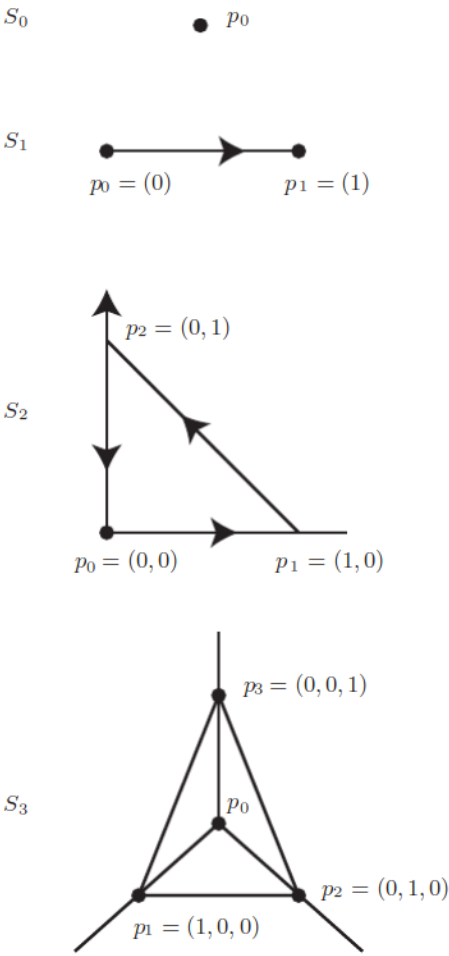


Figure 32.7

我们可以从上面的方程中进行概括。具有诱导定向的边界 ∂S_r 由下式定义

$$\partial S_r = \sum_{i=0}^r (-1)^i (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_r) , \quad (32.58)$$

其中, $\hat{p}_i$ 意味着 p_i 需要从表达式中省略。上面总和中的每一项称为 S_r 的一个**已定向面 (oriented face)**。

练习 32.4 说明方程 (32.54) 到 (32.57) 与 (32.58) 一致。

33. 同调和 De Rham 上同调

在本章中，我们将简要介绍 de Rham 上同调的概念，它来自于外微分算符，并且在一个流形的可微结构与其拓扑结构关联中起着非常重要的作用。同调的相关概念，纯拓扑结构，也将会被讨论。

定义 33.1 形式 $\omega \in A^r(M)$ 被称为是**闭的** (*closed*), 如果 $d\omega = 0$; 它被称为**恰当的** (*exact*), 如果对于一些 $\alpha \in A^{r-1}(M)$ 有 $\omega = d\alpha$ 。

由于 $d^2 = 0$ [通过 Poincare 引理 (Theorem 30.2)], 每一个恰当形式是闭的; 但一个闭形式不一定是恰当的。

定义 33.2 令 $Z^r(M)$ 和 $B^r(M)$ 分别是闭的向量空间和 M 上的恰当微分 r -形式。则商空间

$$H^r(M) \equiv Z^r(M)/B^r(M) \quad (33.1)$$

被称为流形 M 的第 r *de Rham* 上同调群 (*de Rham cohomology group*)。

如果 $\alpha \in Z^r(M)$, 则 $[\alpha] \in H^r(M)$ 表示由代表 α 确定的类。如果两个元素 $\alpha, \alpha' \in Z^r(M)$ 满足 $\alpha - \alpha' \in B^r(M)$ 则属于同一个类 (互为上同调), 即: 如果对于一些 $\beta \in A^{r-1}(M)$, 有 $\alpha - \alpha' = d\beta$ 。 $H^r(M)$ 的群算符 (一个加法) 被定义为

$$[\alpha] + [\beta] \equiv [\alpha + \beta], \quad (33.2)$$

使得 $H^r(M)$ 是一个 Abel 群。如果 $[\alpha] \in H^r(M)$ 和 $[\beta] \in H^s(M)$, 我们也可以定义一个外积为

$$[\alpha] \wedge [\beta] \equiv [\alpha \wedge \beta], \quad (33.3)$$

它是 $H^{r+s}(M)$ 中的一个元素。为了使得这个定义有意义, 我们必须检查 $1)d(\alpha \wedge \beta) = 0$; 和

2) 如果 $[\alpha] = [\alpha']$ 和 $[\beta] = [\beta']$, 则 $[\alpha \wedge \beta] = [\alpha' \wedge \beta']$ 。实际上, 通过 (30.31),

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta = 0, \quad (33.4)$$

由于 $d\alpha = d\beta = 0$ 。令 $\alpha' - \alpha = da$ 和 $\beta' - \beta = db$ 。则

$$\begin{aligned} \alpha' \wedge \beta' - \alpha \wedge \beta &= (\alpha + da) \wedge (\beta + db) - \alpha \wedge \beta \\ &= da \wedge \beta + \alpha \wedge db + da \wedge db \\ &= d(a \wedge \beta) + (-1)^r d(\alpha \wedge b) + d(a \wedge db) \\ &= d(a \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge b + a \wedge db), \end{aligned} \quad (33.5)$$

从此而来 $[\alpha' \wedge \beta'] = [\alpha \wedge \beta]$ 。也注意到

$$[\alpha] \wedge [\beta] = (-1)^{rs} [\beta] \wedge [\alpha]. \quad (33.6)$$

则外积 (通过线性关系) 扩展为直和 [c.f. (28.21)],

$$H^*(M) = \sum_{\oplus r} H^r(M). \quad (33.7)$$

这使得 $H^*(M)$ 是一个环, 称为 M 的**上同调环 (cohomology ring)**。

de Rham 上同调群 $H^r(M)$ 如此命名, 因为它是所谓流形 M 的第 r 同调群的对偶空间 $H_r(M)$ 。这是微分几何中的中心定理的内容——de Rham 定理。在表述这一定理之前, 让我们引入同调群的概念。

回忆我们再上一章的最后对于 $\mathbb{R}^n$ 中 r -单纯形的讨论, $r \leq n$ 。假设 S_r 是一个这样的单纯形。考虑一个光滑映射 $h: S_r \rightarrow M$, 它不一定是一对一的。 M 中 h 下 S_r 的像, 记为 s_r , 被称为 M 中一个**奇异 r -单纯形 (singular r -simplex)**。这样的单纯形被称为奇异的, 由于 h 可能不可逆的事实, 并且因此 s_r 不一定提供 M 的**三角剖分 (triangulation)** (粗略地来说, 将 M 剖分成平面上三角形的拓扑等价)。

定义 33.3 将 M 中奇异 r -单纯形的一个集合, 记为 $\{s_{r,i}\}$ 。 M 中一个 r -链是一个形式求和, 形式为

$$c = \sum_i a_i s_{r,i}, \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (33.8)$$

M 中 r -链的集合组成 Abel 群 $C_r(M)$ (在加法下), 称为 M 上 **r -链群 (r -chain group)**。 $\mathbb{R}^n$ 中一个 r -单纯形的边界的概念也推广到一个特异 r -单纯形的边界 ∂s_r , 具有一个诱导定向:

$$\partial s_r \equiv h(\partial S_r), \quad (33.9)$$

其中, S_r 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意 r -单纯形使得 $h(S_r) = s_r$ 。通过线性关系, ∂ 的区域扩展到 $C_r(M)$ 。我们因此有边界映射

$$\partial: C_r(M) \longrightarrow C_{r-1}(M).$$

正如 $\mathbb{R}^n$ 中 r -单纯形一样, 边界算符作用在 C_r 也是幂等的: $\partial^2 = 0$ (一个边界的边界是零)。

定义 33.4 一个 r -链 c_r 使得 $\partial c_r = 0$ 被称为 r -圈 (r -cycle); 一个 r -链 c_r 使得 $c_r = \partial c_{r+1}$, 其中 c_{r+1} 是一些 $(r+1)$ -链被称为 r -边界 (r -boundary)。

由于 $\partial^2 = 0$ 的事实, 一个 r -边界必须是一个 r -圈, 但一个 r -圈不需要是一个 r -边界。

定义 33.5 令 $Z_r(M)$ 和 $B_r(M)$ 分别是流形 M 中 r -圈和 r -边界的群。商群 $H_r(M)$ 定义为

$$H_r(M) \equiv Z_r(M)/B_r(M) \quad (33.10)$$

被称为 M 上第 r 奇异同调群 (*singular homology group*)。

两个元素 $\gamma, \lambda \in Z_r$ 属于同一类: 如果存在一些 $(r+1)$ -链 ζ 使得 $\gamma - \lambda = \partial \zeta$, 则有 $[\gamma] = [\lambda] \in H_r(M)$ 。 $H_r(M)$ (加法) 的群算符被定义为

$$[\gamma] + [\lambda] = [\gamma + \lambda]. \quad (33.11)$$

举个例子, 考虑 2-维环面 T_2 中两个 1-圈 γ 和 γ' (见 Figure 33.1)。很明显 $\gamma - \gamma' = \partial \zeta$, 其

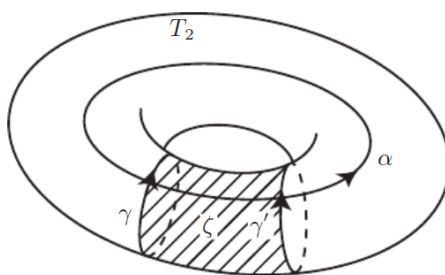


Figure 33.1

中 ζ 是阴影区域, 并且因此 $[\gamma] = [\gamma']$ 。我们也可以说 γ 同调于 γ' 。另一方面, α 和 γ 属于不同类。实际上, $H_1(T_2)$ 是由这些环生成的, 而不是边界; 并且只有两种这样的类, $[\gamma]$ 和 $[\alpha]$ 。因此

$$H_1(T_2) \sim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}. \quad (33.12)$$

一般来说, 对于 $2g$ -环面 (g 是 genus 或者孔的数量),

$$H_1(T_{2g}) \sim \underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{2g}. \quad (33.13)$$

练习 33.1 验证上面的方程:

$$H_0(T_{2g}) \sim H_2(T_{2g}) \sim \mathbb{R}. \quad (33.14)$$

假设 M 是一个三角剖分 (triangulable) 的拓扑空间, 即: M 同胚于一个维度为 n 的单纯复形 (simplicial complex) K , 其中 n 是一个正整数, (单纯形的集合在一起适合地“很好”)。则我们可以定义一个 M 的重要拓扑不变量, Euler 示性数 (Euler characteristic)

$\chi(M)$, 为

$$\chi(M) \equiv \sum_{r=0}^n (-1)^r I_r, \quad (33.15)$$

其中, I_r 是 K 中 r -单纯形的数目。对于 $\mathbb{R}^3$ 中一个多面体, 比如,

$$\chi = (\# \text{ of vertices}) - (\# \text{ of edges}) + (\# \text{ of faces}) = 2.$$

同调群 $H_r(M)$ 通过 Euler-Poincare 定理关联所谓的 Betti 数和 Euler 示性数提供 M 的拓扑上的重要信息。

定义 33.6 一个流形 M 的第 r **Betti 数 (Betti number)** $b_r(M)$ 定义为

$$b_r(M) \equiv \dim(H_r(M)). \quad (33.16)$$

定理 33.1 — (Euler-Poincare). 令 M 是一个三角剖分流形, 其与一个 n -维单纯复形 K 同胚。则 M 的 Euler 示性数由下式给出

$$\chi(M) = \sum_{r=0}^n (-1)^r b_r(M), \quad (33.17)$$

其中, $b_r(M)$ 是 M 的第 r Betti 数。

证明: 考虑 M 上链群之间的边界同胚 $\partial: C_r(M) \rightarrow C_{r-1}(M)$ 。定义 $C_{-1}(M) = 0$ 。将 $C_r(M)$ 和 $C_{r-1}(M)$ 视为向量场, 从定理 17.3 得到

$$\begin{aligned} I_r &= \dim(C_r(M)) \\ &= \dim(\ker \partial) + \dim(\operatorname{im} \partial) \\ &= \dim(Z_r(M)) + \dim(B_{r-1}(M)), \end{aligned} \quad (33.18)$$

其中, $B_{-1}(M)$ 被定义为 0。另一方面,

$$b_r(M) = \dim(Z_r(M)/B_r(M)) = \dim(Z_r(M)) - \dim(B_r(M)). \quad (33.19)$$

练习 33.2 证明上面方程的最后一个等号位置。

方程 (33.15), (33.18) 和 (33.19) 则说明

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{r=0}^n (-1)^r [\dim(Z_r(M)) + \dim(B_{r-1}(M))] \\ &= \sum_{r=0}^n [(-1)^r \dim(Z_r(M)) - (-1)^r \dim(B_r(M))] \\ &= \sum_{r=0}^n (-1)^r b_r(M). \end{aligned} \quad (33.20)$$

其中第二个等号位置, 我们已经运用了事实 $B_{-1}(M) = B_n(M) = 0$. $\square$

在 M 的 r -维子流形上一个 r -形式的积分 [定义为 (32.29)] 可以扩展为 M 中一个 r -链一个 r -形式. 实际上, 运用 (32.50) 和 (32.51) 的定义, 一个配对

$$(\cdot, \cdot) : C_r(M) \times A^r(M) \longrightarrow \mathbb{R} \quad (33.21)$$

可以被定义为

$$(c, \omega) \equiv \int_c \omega, \quad c \in C_r(M), \quad \omega \in A^r(M). \quad (33.22)$$

这个配对在 $H_r(M)$ 和 $H^r(M)$ 之间引入一个配对: 对于 $c \in Z_r(M)$ 和 $\omega \in Z^r(M)$, 有

$$\langle [c], [\omega] \rangle \equiv (c, \omega) = \int_c \omega, \quad (33.23)$$

这个定义的可靠性通过 Stokes 定理 (定理 32.4) 来保证. 实际上, 假设 $[c] = [c']$ 和 $c - c' = \partial c''$. 则

$$\begin{aligned} \langle [c'], [\omega] \rangle &= (c', \omega) = (c - \partial c'', \omega) = (c, \omega) - (\partial c'', \omega) \\ &= (c, \omega) - (c'', d\omega) = (c, \omega) = \langle [c], [\omega] \rangle, \end{aligned} \quad (33.24)$$

其中, 第四个等号从 Stokes 定理得到同时第五个等号从 $d\omega = 0$ 的事实得到. 同样, 假设 $[\omega] = [\omega']$, 便有 $\omega - \omega' = d\omega''$. 则

$$\begin{aligned} \langle [c], [\omega'] \rangle &= (c, \omega') = (c, \omega - d\omega'') = (c, \omega) - (c, d\omega'') \\ &= (c, \omega) - (\partial c, \omega'') = (c, \omega) = \langle [c], [\omega] \rangle. \end{aligned} \quad (33.25)$$

因此配对 $\langle [c], [\omega] \rangle$ 只取决于同调和上同调类并且不取决于这些特定代表. 配对明显也是双线性.

我们现在可以表述 de Rham 定理. (该定理的证明是非常不平凡的, 超过了本书的范围; 比如参见: I. M. Singer 和 J. A. Thorpe, 1976).

定理 33.2 — (de Rham). 假设 M 是一个紧致流形. 则第 r 同调群和第 r de Rham 上同调群 (都有实参数) 互为对偶向量空间, 它们之间的配对则由 (33.23) 给出.

推论 33.1 Betti 数 $b_r(M)$ [如 (33.16) 定义一样] 由下式给出

$$b_r(M) = \dim(H^r(M)). \quad (33.26)$$

如果, 对于一个特定 r , 所有闭 r -形式是恰当的, 则 $H^r(M)$ 是平凡的并且有 $b_r(M) = 0$. 由于一个闭形式总是局域恰当的, $H^r(M)$ 上同调群测量了闭形式的全局精确性的阻碍.

de Rham 上同调群从一个流形的微分结构得到, 同时 Betti 数是流形的一个纯拓扑不变量. 因此 de Rham 定理建立了一个流形的局域和全局性质的联系. 它是现代微分几何中及其应用在物理学中反复出现的主题和中心主题.

练习 33.3 说明对于一个闭流形 M 具有一个单分量,

$$H^0(M) = \mathbb{R}, \quad (33.27)$$

并且, 如果 M 有 m 个连通分量,

$$H^0(M) = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{m \text{ 次}}. \quad (33.28)$$

There is an interesting duality between $H^r(M)$ 和 $H^{n-r}(M)$ 之间有一个有趣的对偶性, 其中 $n = \dim M$ 和 M 是紧致的。我们有下面的双线性, 非退化映射

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^r(M) \times H^{n-r}(M) \rightarrow \mathbb{R},$$

由下式给出: 对于 $\omega \in Z^r(M)$ 和 $\eta \in X^{n-r}(M)$, 有

$$\langle [\omega], [\eta] \rangle \equiv \int_M \omega \wedge \eta. \quad (33.29)$$

上面是定义良好的, 这是由于 $\omega \wedge \eta$ 是一个 n -形式 (一个上或者 “体积” 形式), 使得它的积分在 n -维流形 M 上有意义。更进一步, 假设 $\omega' - \omega = d\omega''$, 其中 $\omega'' \in A^{r-1}(M)$ 。则

$$\begin{aligned} \langle [\omega'], [\eta] \rangle &= \int_M \omega' \wedge \eta = \int_M (\omega + d\omega'') \wedge \eta = \int_M (\omega \wedge \eta + d\omega'' \wedge \eta) \\ &= \int_M (\omega \wedge \eta + d(\omega'' \wedge \eta)) = \int_M \omega \wedge \eta + \int_{\partial M} \omega'' \wedge \eta = \int_M \omega \wedge \eta = \langle [\omega], [\eta] \rangle \end{aligned} \quad (33.30)$$

其中, 第四个等号来自于事实 $d\eta = 0$ [由于 $\eta \in Z^r(M)$], 第五个等号来自于 Stokes 定理, 而第六个等号来自于 $\partial M = 0$ 。一个类似的讨论说明: 如果 $\eta' - \eta = d\eta''$, 有

$$\langle [\omega], [\eta'] \rangle = \langle [\omega], [\eta] \rangle$$

映射 (33.29) 的非退化性意味着如果不是 $[\omega]$ 或者 $[\eta]$ 消失, 则 $\langle [\omega], [\eta] \rangle$ 不可能完全消失。这个映射建立了 $H^r(M)$ 和 $H^{n-r}(M)$ 作为向量空间之间的一个同构, 称为 **Poincare 对偶 (Poincare duality)** (证明将在此处忽略):

$$\boxed{H^r(M) \sim H^{n-r}(M), \quad M \text{ 紧致}}. \quad (33.31)$$

作为一个结果, Betti 数满足

$$b_r(M) = b_{n-r}(M). \quad (33.32)$$

由此可见, 奇流形的 Euler 示性数消失了。

练习 33.4 证明上面的表述。

上同调群的结构通过光滑映射得以保持。假设 $f: M \rightarrow N$ 是一个从一个映射 M 到一个映射 N 的光滑映射。则 f 的拉回 $f^*: A^r(N) \rightarrow A^r(M)$ 是一个同态, 其与外微分 d 对易 (定理

32.2)。因此, 对于 $\omega \in Z^r(N)$, 有

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0, \quad (33.33)$$

这意味着 $f^*\omega \in Z^r(M)$ 。这使得

$$f^*: Z^r(N) \rightarrow Z^r(M)$$

是一个同态。类似地, 对于 $\eta \in B^r(M)$ [$\eta = d\xi, \xi \in A^{r-1}(M)$],

$$f^*\eta = f^*(d\xi) = d(f^*\xi), \quad (33.34)$$

这意味着 $f^*\eta \in B^r(M)$ 。所以,

$$f^*: B^r(N) \longrightarrow B^r(M)$$

也是一个同态。作为结果, 一个光滑映射 $f: M \rightarrow N$ 通过拉回映射 $f^*: H^*(N) \rightarrow H^*(M)$ 引入 de Rham 群之间的一个同态。拉回由下式给出

$$f^*[\omega] \equiv [f^*(\omega)], \quad (33.35)$$

其中, $\omega \in Z^r(N)$ 。确实, 对于 $[\omega] \in H^r(N)$ 和 $[\eta] \in H^s(N)$,

$$f^*([\omega] \wedge [\eta]) = f^*([\omega \wedge \eta]) = [f^*(\omega \wedge \eta)] = [f^*\omega \wedge f^*\eta] = [f^*\omega] \wedge [f^*\eta]. \quad (33.36)$$

这说明 f^* 是一个同态。

为了总结, 我们收集一些 de Rham 群的简单且有用的例子如下。

$$H^r(M) = H^{n-r}(M), \quad M \text{ 紧致}, n = \dim M \text{ (Poincare 对偶性)}, \quad (33.37)$$

$$H^0(M) = \mathbb{R}, \quad M \text{ 连通}, \quad (33.38)$$

$$H^0(M) = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{m \text{ 次}}, \quad M \text{ 有 } m \text{ 连通分量}, \quad (33.39)$$

$$H^1(M) = 0, \quad M \text{ 单连通}, \quad (33.40)$$

$$H^r(\mathbb{R}^n) = 0, \quad 1 \leq r \leq n, \quad (33.41)$$

$$H^1(S^1) = \mathbb{R}, \quad (33.42)$$

$$H^r(S^n) = 0, \quad n \geq 2, 1 \leq r \leq n-1, (S^n \text{ 是 } n\text{-球面}), \quad (33.43)$$

$$H^1(T_{2g}) = \underbrace{\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}}_{2g}, \quad (T_{2g} \text{ 是 } 2g\text{-环面}). \quad (33.44)$$

注意到由于 $\mathbb{R}^n$ 不是紧致的, $H^r(\mathbb{R}^n)$ 不满足 Poincare 对偶。此外, (33.44) 来自于 (33.13) 和 de Rham 定理 (定理 33.2)。

练习 33.5 验证 (33.38) 和 (33.42)。

34. Lie 群的几何

迄今为止，我们对 Lie 群的兴趣一直集中在它们的代数结构上（它们与 Lie 代数的关系）。然而，也存在同样重要的一个可微结构，特别是在纤维丛的几何的性质中，它是众多物理应用的基本数学设定。

我们从对 Lie 群合适的定义开始。

定义 34.1 令 G 是一个群。如果 G 也是一个有限维可微流形使得群乘法映射

$$\varphi : G \times G \rightarrow G, \quad \varphi(g_1, g_2) = g_1 g_2$$

和可逆映射

$$\tau : G \rightarrow G, \quad \tau(g) = g^{-1}$$

都是光滑的，则 G 被称为一个 r -维 Lie 群，其中 r 是考虑成一个流形的 G 的维度。

除了逆映射，一个 Lie 群 G 拥有另外两个微分同胚的集合，称为右和左平移，定义如下（从一个流形 M 到一个流形 N 的一个**微分同胚 (diffeomorphism)** $f : M \rightarrow N$ 是一个光滑映射，其逆也是光滑的。两个流形之间一个微分同胚的存在标志着它们共同的**可微结构 (differentiable structure)**。）

定义 34.2 令 G 是一个 Lie 群。对于 $g \in G$ ， G 上通过 g 的**右平移 (right translation)** 是一个映射 $R_g : G \rightarrow G$ 定义为

$$\text{对于任意 } g' \in G, \quad R_g(g') = g'g; \quad (34.1)$$

而 G 上通过 g 的**左平移 (left translation)** 是一个映射 $L_g : G \rightarrow G$ 定义为

$$\text{对于任意 } g' \in G, \quad L_g(g') = gg'. \quad (34.2)$$

考虑一个 r -维 Lie 群 G 具有恒元 e 。则对于任意 $g \in G$, $R_{g^{-1}}(g) = gg^{-1} = e$ 和切映射

$$(R_{g^{-1}})_* : T_g(G) \rightarrow T_e(G) \quad (34.3)$$

是一个线性同构, 其中 $T_g(G)$ 表示 G 在 g 处的切空间。

定义 34.3 令 $X \in T_g(G)$ 。则微分 1-形式 ω 具有 $T_e(G)$ 中的值定义为

$$\omega(X) \equiv (R_{g^{-1}})_* X \quad (34.4)$$

被称为右基本形式 (*right fundamental form*) 或者 Lie 群 G 的 *Maurer-Cartan* 形式 (*Maurer-Cartan form*)。

R 一个左基本形式 (*left fundamental form*) (也称为 Maurer-Cartan 形式) 可以被类似地定义。从现在开始, 我们将用右平移发展理论。

注意到到目前为止, 我们只考虑了实-值形式, 其中一些余切向量对切向量的作用会产生一个实数。上面定义表示推广到所谓的向量-值形式。为了阐明这个概念, 让我们计算依赖于局域坐标选择的右基本形式 ω 的矩阵表示。令 $\{\delta_i\}, 1 \leq i \leq r$ 是 $T_e(G)$ 的一组基, 则我们可以写

$$\omega = \omega^i \delta_i, \quad (34.5)$$

其中, $\omega^i, 1 \leq i \leq r$, 是 G 上到处都是线性独立的 r 个实-值 1-形式。(它们也被称为 G 的基本形式)。分别选择点 e 和 g 处的局域坐标 $(U; x^6)$ 和 $(W; y^6)$ 。由于群乘法映射 φ 是光滑的 (并且因此连续), 对于足够小的 U , 存在一个 $W_1 \subset W$ 使得

$$\varphi(U \times W_1) \subset W.$$

选择 $\delta_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e$ 并令

$$\varphi^i(x, y) \equiv y^i \circ \varphi(e, g), \quad (e, g) \in (U \times W_1).$$

则 $(R_g)_* : T_e(G) \rightarrow T_g(G)$ 的矩阵表示由 [c.f. (32.8)] 给出

$$(R_g)_* \delta_i = \left(\frac{\partial \varphi^j(x, y)}{\partial x^i} \right)_{x=e} \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{y=g}. \quad (34.6)$$

但是 $(R_{g^{-1}})_* \circ (R_g)_* = id : T_e(G) \rightarrow T_e(G)$ 。因此 $(R_{g^{-1}})_* = (R_g)_*^{-1}$ 和

$$(R_{g^{-1}})_* \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_{y=g} = \Lambda_i^j(g) \delta_j, \quad (34.7)$$

其中, $\Lambda_i^j(g)$ 是 $\left(\frac{\partial \varphi^j(x, y)}{\partial x^i} \right)_{x=e}$ 的逆矩阵。由此得到

$$\omega^i = \Lambda_j^i(g) dy^j, \quad (34.8)$$

其实际上是 G 上的一个光滑 1-形式。

定义 34.4 令 X 是一个 Lie 群 G 上的一个光滑切向量场 [或者, 我们说 $X \in \Gamma(TG)$ 是 TG 的一个光滑截面 (*smooth section*), $\Gamma(TG)$ 是 TG 的光滑截面的空间]。如果, 对于任意 $g \in G$, 有

$$(R_g)_* X = X, \quad (34.9)$$

则 X 被称为是一个 G 上的一个右不变向量场 (*right-invariant vector field*)。类似地, 令 $\omega \in \Gamma(T^*G)$ 是 G 上的一个 1-形式。如果

$$(R_g)^* \omega = \omega, \quad (34.10)$$

则 ω 被称为是 G 上的一个右不变形式 (*right-invariant form*)。

定理 34.1 一个 Lie 群 G 的 Maurer-Cartan 形式 ω [c.f. 定义 34.3 中的方程 (34.4)] 是 G 上的一个右不变形式。

证明: 令 $g \in G$ 是 G 的一个元素并且 $X_{g'} \in T_{g'}(G)$ 是 $g' \in G$ 处的一个切向量。则 (见 Figure 34.1)

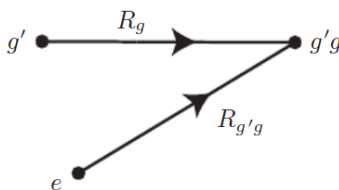


Figure 34.1

$$\begin{aligned} ((R_g)^* \omega)(X_{g'}) &= \omega((R_g)_* X_{g'}) = (R_{(g'g)^{-1}})_* (R_g)_* X_{g'} \\ &= (R_{(g')^{-1}})_* X_{g'} = \omega(X_{g'}). \end{aligned} \quad (34.11)$$

由于 g' 是 G 的一个任意元素, (34.10) 被满足, 定理得证。□

更一般地, 我们有下面的定理 (给出而不证明)。

定理 34.2 令 $\sigma: G \rightarrow G$ 是 r -维 Lie 群上一个光滑映射。则 σ 是一个右平移当且仅当

$$\sigma^* \omega^i = \omega^i, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (34.12)$$

其中, ω^i 是对应于 G 的 Maurer-Cartan 形式 [c.f. (34.5)] 的基本形式 [依赖于 $T_e(G)$ 的基 $\{\delta_i\}$ 的一个特定选择]。

考虑一个任意切向量 $A \in T_e(G)$, 并且令

$$A_g = (R_g)_* A. \quad (34.13)$$

如果我们令 g 遍历 G 的所有元素, A_g 则给出 G 上一个光滑切向量场 $\bar{A}$ 。显然, Maurer-Cartan

形式 ω 将 A_g 拉回到 A :

$$\omega(A_g) = (R_{g^{-1}})_* A_g = (R_{g^{-1}})_* (R_g)_* A = A. \quad (34.14)$$

现在, 通过定理 34.1,

$$A = \omega(A_{g'}) = ((R_g)^* \omega)(A_{g'}) = \omega((R_g)_* A_{g'}) . \quad (34.15)$$

另一方面,

$$A = \omega(A_{g'g}) . \quad (34.16)$$

因此

$$(R_g)_* \bar{A} = \bar{A} , \quad (34.17)$$

即: $\bar{A}$ 是一个右不变向量场。

令 X_i 是通过右平移 $\delta_i \in T_e(G)$ 得到的右不变向量场, 其中 $\{\delta_i\}, 1 \leq i \leq r$, 是 $T_e(G)$ 的一组基:

$$(R_g)_* \delta_i = (X_i)_g . \quad (34.18)$$

则 $X_i, 1 \leq i \leq r$, 构成 r 个右不变向量场, 其在 G 上到处线性独立, 并且 G 上任意右不变向量场是具有常系数的 X_i 的一个线性组合。换句话说, $\{X_i\}, 1 \leq i \leq r$, G 上右不变向量场的向量空间 $\mathcal{G}$ 的一组基。此外, 这个向量空间同构于 $T_e(G)$ 。

由于

$$\omega(X_i) = \delta_i , \quad (34.19)$$

方程 (34.5) 意味着

$$\omega^i \delta_i(X_j) = \delta_j , \quad (34.20)$$

或

$$\omega^i(X_j) = \langle X_j, \omega^i \rangle = \delta_j^i . \quad (34.21)$$

因此 (右不变) 基本形式 ω^i 和右不变向量场 X_i 分别构成 Lie 群 G 上自然对偶**余标架场 (coframe field)** 和**标架场 (frame field)** 的集合。我们也看到 G 上一个向量场 X 是右不变当且仅当 $\omega(X) =$ 一个常数向量 $\in T_e(G)$ 。

$\mathcal{G}$ 除了作为一个向量场之外, 也允许内积, 由于下面的定理。

定理 34.3 如果 X 和 Y 是一个 Lie 群 G 上右不变向量场则

$$[X, Y] = XY - YX \quad (34.22)$$

也是 G 上的一个右不变向量场。

在证明这个定理之前, 我们必须发展基本形式 ω^t 的一些更多的性质。由于集合 $\{\omega^t\}$ 组

成了 G 上的一个余标架场, 并且每个 ω^i 是右不变的, 我们可以定义常数 c_{jk}^i 使得

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}c_{jk}^i\omega^j \wedge \omega^k, \quad (34.23a)$$

$$c_{jk}^i + c_{kj}^i = 0. \quad (34.23b)$$

方程 (34.23a) 被称为 Lie 群 G 的**结构方程 (structure equation)** 或 **Maurer-Cartan 方程 (Maurer-Cartan equation)**, 并且常数 c_{jk}^i 被称为 G 的**结构常数 (structure constant)**。很难看到结构常数满足 Jacobi 恒等式:

$$c_{jk}^i c_{hl}^j + c_{jh}^i c_{lk}^j + c_{jl}^i c_{kh}^j = 0, \quad (34.24)$$

其与 (4.32) 相同。实际上, 对 (34.23a) 取外微分, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}c_{jk}^i(d\omega^j \wedge \omega^k - \omega^j \wedge d\omega^k) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)c_{jk}^i(c_{hl}^j\omega^h \wedge \omega^l \wedge \omega^k - c_{hl}^k\omega^j \wedge \omega^h \wedge \omega^l) \\ &= \frac{1}{4}c_{jk}^i c_{hl}^j \omega^h \wedge \omega^l \wedge \omega^k - \frac{1}{4}c_{jk}^i c_{hl}^k \omega^j \wedge \omega^h \wedge \omega^l. \end{aligned} \quad (34.25)$$

最后一项可以被写成

$$\frac{1}{4}c_{kj}^i c_{hl}^k \omega^j \wedge \omega^h \wedge \omega^l = \frac{1}{4}c_{jk}^i c_{hl}^j \omega^k \wedge \omega^h \wedge \omega^l = \frac{1}{4}c_{jk}^i c_{hl}^j \omega^h \wedge \omega^l \wedge \omega^k, \quad (34.26)$$

其中, 第一个等号从交换指标 k 和 j 得到。方程 (34.25) 则给出

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}c_{jk}^i c_{hl}^j \omega^h \wedge \omega^l \wedge \omega^k \\ &= \frac{1}{6}(c_{jk}^i c_{hl}^j \omega^k \wedge \omega^h \wedge \omega^l + c_{jh}^i c_{lk}^j \omega^h \wedge \omega^l \wedge \omega^k + c_{jl}^i c_{kh}^j \omega^l \wedge \omega^k \wedge \omega^h) \\ &= \frac{1}{6}(c_{jk}^i c_{hl}^j + c_{jh}^i c_{lk}^j + c_{jl}^i c_{kh}^j) \omega^k \wedge \omega^h \wedge \omega^l. \end{aligned} \quad (34.27)$$

因为最后一个等号的右边括号中的项依赖于指标 k, h 和 l 是反对称的, 得到 Jacobi 恒等式 (34.24)。

让我们现在证明定理 34.3。

证明: (定理 34.3 的证明) 通过定理 30.3,

$$\langle X \wedge Y, d\omega^s \rangle = X(Y, \omega^s) - Y(X, \omega^s) - \langle [X, Y], \omega^s \rangle. \quad (34.28)$$

另一方面, 从结构方程 (34.23a),

$$\begin{aligned} \langle X \wedge Y, d\omega^i \rangle &= -\frac{1}{2}c_{jk}^i \langle X \wedge Y, \omega^j \wedge \omega^k \rangle \\ &= -\frac{1}{2}c_{jk}^i (\omega^j(X)\omega^k(Y) - \omega^j(Y)\omega^k(X)) = -c_{jk}^i \omega^j(X)\omega^k(Y), \end{aligned} \quad (34.29)$$

其中, 第二个等号从 (28.28) 得到而第三个等号来自于事实 $c_{jk}^i = -c_{kj}^i$, 由于, 根据假设 X

和 Y 都是右不变, $\omega^j(X)$ 和 $\omega^k(Y)$ 都是常数。从 (34.28) 得到 $\omega^i([X, Y])$ 必须也是一个常数。换句话说, $[X, Y]$ 是一个右不变向量场。由此定理得证。□

很容易看到积 $[X, Y]$ 满足通常的分配律、反对称性和 Jacobi 恒等式。我们终于可以定义一个 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 。

定义 34.5 一个 Lie 群 G 上的右不变向量场的线性空间 $\mathcal{G}$ (其同构于 $T_e(G)$, 在恒元 $e \in G$ 处的切空间), 同内积 $[X, Y] \equiv XY - YX$ 构成一个 Lie 代数, 称为 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 。 $T_e(G)$ 也是同构于 $\mathcal{G}$ 的一个 Lie 代数, 如果我们在 $T_e(G)$ 中定义下面的内积:

$$[\delta_j, \delta_k] = c_{jk}^i \delta_i, \quad (34.30)$$

其中, $\{\delta_i\}$ 是 $T_e(G)$ 的一组基。

练习 34.1 令 $\omega^i, i = 1, \dots, r$, 是一个 r -维 Lie 群 G 的基本形式, 并且 $X_i, i = 1, \dots, r$, 是对偶向量场。运用 (34.28) 和 (34.29) 来说明

$$\omega^i([X_j, X_k]) = c_{jk}^i \quad (34.31)$$

并且因此

$$[X_j, X_k] = c_{jk}^i X_i \quad (34.32)$$

方程 (34.31) 和 (34.32) 将本章中引入的结构常数 c_{jk}^i 和 Chapter 4 中引入的结构常数 [c.f. (4.29)] 等同。

在 Chapter 4 中, 我们计算了 Lie 群 $SO(n)$ 的结构常数。我们现在将计算一般线性群 $GL(n, \mathbb{R})$ 的结构常数, 其中 $g \in GL(n, \mathbb{R})$ 是一个 $n \times n$ 可逆实矩阵。令 $g = (g_i^j) \in GL(n, \mathbb{R})$ 。则矩阵元素 $g_i^j, 1 \leq i, j \leq n$, 可以被视 n^2 -维流形 $GL(n, \mathbb{R})$ 上的局域坐标而 $\{dg_i^j\}$ 给出了 $GL(n, \mathbb{R})$ 上一个余标架场。

对于任意 $g' \in G$, 我们表示右平移 R_g 为

$$\varphi^{(i,j)}(g', g) = (g'g)_i^j = (g')_i^m g_m^j, \quad (34.33)$$

因此, 回忆 (34.6),

$$(\Lambda^{-1}(g))_{(k,l)}^{(i,j)} = \frac{\partial \varphi^{(i,j)}(g', g)}{\partial (g')_k^l} \bigg|_{g'=e} = \frac{\partial \left((g')_i^l g_l^j \right)}{\partial (g')_k^l} \quad (l \text{ 不求和}) = \delta_k^i g_l^j. \quad (34.34)$$

注意到 $\Lambda^{-1}(g)$ 是一个 $(n^2 \times n^2)$ 矩阵。如果我们按照下面的方式对复合指标 (i, j) 进行排序:

$$\begin{aligned} & (1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow \cdots \rightarrow (1, n) \\ & \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow \cdots \rightarrow (2, n) \\ & \vdots \\ & \rightarrow (n, 1) \rightarrow (n, 2) \rightarrow \cdots \rightarrow (n, n), \end{aligned}$$

则矩阵 $\Lambda^{-1}(g)$ 以分块对角的形式出现

$$\begin{pmatrix} (g_i^j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (g_i^j) & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & (g_i^j) \end{pmatrix},$$

其中, 每个分块是一个 $n \times n$ 矩阵。因此

$$(\Lambda(g))_{(k,l)}^{(i,j)} = \delta_k^i (g^{-1})_l^j. \quad (34.35)$$

并且 (34.8) 意味着

$$\omega_i^j = \sum_{k,l} \Lambda_{(k,l)}^{(i,j)}(g) dg_k^l = \sum_{k,l} \delta_k^i (g^{-1})_l^j dg_k^l = dg_k^l (g^{-1})_l^j. \quad (34.36)$$

在矩阵符号中, 右基本 1-形式 (ω_i^j) 的矩阵因此由下式给出

$$\omega = dg \cdot g^{-1}. \quad (34.37)$$

对上面取外微分, 我们得到 [c.f. (31.32)]

$$\begin{aligned} d\omega &= -dg \wedge d(g^{-1}) = -dg \cdot g^{-1} \wedge g \cdot d(g^{-1}) \\ &= dg \cdot g^{-1} \wedge dg \cdot g^{-1} = \omega \wedge \omega, \end{aligned} \quad (34.38)$$

其中, 第三个等号处我们已经使用了 $g \cdot d(g^{-1}) = -dg \cdot g^{-1}$ 的事实, 其是方程 $g \cdot g^{-1} = 1$ 取外微分的一个结果。方程 (34.38) 也可以被写成分量形式 [c.f. (31.34)]

$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \quad (34.39)$$

因此

$$d\omega_i^j = \frac{1}{2} \sum_{p,q,r,s=1}^n (\delta_i^p \delta_q^j \delta_s^r - \delta_i^r \delta_s^j \delta_q^p) \omega_p^s \wedge \omega_r^q. \quad (34.40)$$

从 (34.23a) 得到 $GL(n, \mathbb{R})$ 的结构常数由下式给出

$$\boxed{c_{(p,s)(r,q)}^{(i,j)} = -\delta_i^p \delta_q^j \delta_s^r + \delta_i^r \delta_s^j \delta_q^p}. \quad (34.41)$$

正如前面讨论的, Lie 群 $GL(n, \mathbb{R})$ 的 Lie 代数 $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ 可以与 $T_e(GL(n, \mathbb{R}))$ 等同, 具有由 (34.30) 给出的内积。另一方面, $T_e(GL(n, \mathbb{R}))$ 是 $n \times n$ 实矩阵的空间, 其同构于 n^2 -维向量空间 $\mathbb{R}^{n^2}$ 。因此 $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ 的一组基是矩阵 $\{E_i^j\}$, $i, j = 1, \dots, n$ 的集合, 其中, E_i^j 表示一个 $n \times n$ 矩阵, 其第 j 行和第 i 列是 1, 并且其它所有元素都是 0。(仔细注意行和列的位置)。比如 $n = 2$,

$$E_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

右基本形式 ω 被写为

$$\omega = \omega_i^3 E_j^i . \quad (34.42)$$

从 (34.30) 和 (34.41), $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ 的乘法表则由下式给出

$$[E_s^p, E_q^r] = \sum_{i,j} c_{(p,s)(r,q)}^{(i,j)} E_j^i = \sum_{i,j} (-\delta_i^p \delta_q^j \delta_s^r + \delta_i^r \delta_s^j \delta_q^p) E_j^i = \delta_q^p E_s^r - \delta_s^r E_q^p . \quad (34.43)$$

假设 $A, B \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$, 写成矩阵元素为

$$A = (A_p^z) = A_p^\varepsilon E_s^p, \quad B = (B_r^q) = B_r^q E_q^r .$$

则通过 (34.43),

$$\begin{aligned} [A, B] &= A_p^s B_r^q [E_s^p, E_q^r] = A_p^s B_r^q (\delta_q^p E_s^r - \delta_s^r E_q^p) \\ &= B_r^q A_q^s E_s^r - A_p^s B_s^q E_q^p = (BA)_r^s E_s^r - (AB)_p^q E_q^p = BA - AB , \end{aligned} \quad (34.44)$$

(其中, 等号右边被解释为矩阵乘积)。注意到这与对易一般定义区别于一个符号。[c.f. (4.25), 实际上其定义 $[\cdot, \cdot]_{\text{left}}$ 来自于做平移 L_g , 见练习 34.2 如下]。

练习 34.2 左基本 (Maurer-Cartan) 形式 $\tilde{\omega}$ 和相关的 G 上的左不变场 $\tilde{X}_i$ 由下面的方程给出:

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}^i \delta_i, \quad (34.45)$$

$$(L_g)_* \delta_i = \left(\tilde{X}_i \right)_g, \quad (34.46)$$

$$\tilde{\omega}^i(\tilde{X}_j) = \langle \tilde{X}_j, \tilde{\omega}^i \rangle = \delta_j^i, \quad (34.47)$$

$$d\tilde{\omega}^i = -\frac{1}{2} \tilde{c}_{jk}^i \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^k, \quad (34.48)$$

$$[\tilde{X}_j, \tilde{X}_k] = \tilde{c}_{jk}^i \tilde{X}_i. \quad (34.49)$$

说明

$$\tilde{c}_{jk}^i = -c_{jk}^i. \quad (34.50)$$

因此, 我们在 $\mathcal{G}$ 中有两种不同的内积, (在这个问题中) 分别记为 $[\cdot, \cdot]_{\text{right}}$ 和 $[\cdot, \cdot]_{\text{left}}$, 分别对应于结构常数 c_{jk}^i 和 $\tilde{c}_{jk}^i$. 说明这两种积只是一个符号的区别:

$$[\delta_i, \delta_j]_{\text{right}} = -[\delta_i, \delta_j]_{\text{left}}. \quad (34.51)$$

我们脱离主题来考虑 Lie 群在流形上的作用。这在动力学系统的研究中很重要。

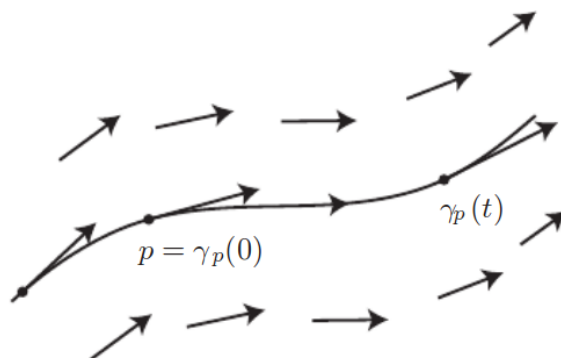


Figure 34.2

定义 34.6 令 M 是一个流形而 $X \in \Gamma(TM)$ 是 M 的切丛中的一个截面, 或者 M 上一个切向量场。假设对于每个 $p \in M$, 存在一个曲线 $\gamma_p: \mathbb{R} \rightarrow M$ $[\gamma_p(t), t \in \mathbb{R}]$ 通过 p 使得 $\gamma_p(0) = p$ 同时, 对于任意 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\frac{d}{dt} \gamma_p(t) = X_{\gamma_p(t)}. \quad (34.52)$$

(见 Figure 34.2)。则 X 被称为是一个完备切向量场 (*complete tangent vector field*)。

对于一个完备向量场 X 和任意 $t \in \mathbb{R}$, 我们可以定义一个映射 $\varphi_t: M \rightarrow M$ 为

$$\varphi_t(p) \equiv \gamma_p(t). \quad (34.53)$$

我们可以说明 (这里证明省略) φ_t 是 M 上一个微分同胚, 并且

$$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}, \quad t, s \in \mathbb{R}. \quad (34.54)$$

集合 $\{\varphi_t | t \in \mathbb{R}\}$ 被称为一个**微分同胚的单参数群 (one-parameter group of diffeomorphism)** 通过完备切向量场 X 生成。参数化曲线 $\gamma_p(t)$ 被称为通过 p 的 φ_t 的**轨道 (orbit)**。注意到对于每个 $t \in \mathbb{R}$, φ_t 是某些群的一个元素。微分同胚的单参数群的最重要的例子是 Lie 群的 Abel 子群。

定义 34.7 令 $X \in \Gamma(TM)$ 和 $\psi: M \rightarrow M$ 是 M 上一个微分同胚。 X 被称为是 ψ 下不变的, 如果

$$\psi_* X = X. \quad (34.55)$$

定理 34.4 令 φ_t 是微分同胚的单参数群由一个光滑映射 M 上的一个完备向量场 X 生成的, 而 $\psi: M \rightarrow M$ 是 M 上的一个微分同胚。则 $\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}$ 是由 $\psi_* X$ 生成的微分同胚的单参数群。

证明: 我们需要说明曲线 $\rho_p(t) \equiv (\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1})(p)$ 在点 $\rho_p(t)$ 处的等于 $(\psi_* X)_p$ 。假设 $f \in C^\infty(M)$ 是 M 上一个光滑函数。则如果 $\psi(q) = p$, 有

$$\begin{aligned} (\psi_* X)_p f &= X_q(f \circ \psi) = \left. \frac{d}{dt} f \circ \psi(\varphi_t(q)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f(\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(\psi(q))) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(\psi \circ \varphi_t \circ \psi^{-1}(p)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} f(\rho_p(t)) \right|_{t=0}. \end{aligned} \quad (34.56)$$

这证明了定理。 $\square$

推论 34.1 一个完备切向量场 $X \in \Gamma(TM)$ 在一个微分同胚 $\psi: M \rightarrow M$ 下是不变的当且仅当如果微分同胚 φ_t 的单参数群由 X 与 ψ 的对易生成。

练习 34.3 说明上面的引理是定理 34.4 的一个直接结果。

定义 34.8 令 X 和 Y 是一个流形 M 上两个光滑切向量场而 φ_t 是由 X 生成的微分同胚的单参数群。沿着向量场 X 的向量场 Y 的 **Lie 微分 (Lie derivative)** $L_X Y$ 定义为

$$L_X Y \equiv \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t)_*^{-1}(Y) \right|_{t=0}, \quad (34.57)$$

或者, 更详细地写出来

$$(L_X Y)_p = \left. \frac{d}{dt} \left((\varphi_t)_*^{-1}(Y_{\varphi_t(p)}) \right) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^{-1})_* Y_{\varphi_t(p)} - Y_p}{t}. \quad (34.58)$$

定理 34.5 令 X 和 Y 是 M 上的两个光滑切向量场。则

$$L_X Y = [X, Y] \equiv XY - YX . \quad (34.59)$$

证明：方程 (34.58) 也可以被写成

$$L_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_p - (\varphi_t)_* Y_{\varphi_t^{-1}(p)}}{t} . \quad (34.60)$$

(见 Figure 34.2)。

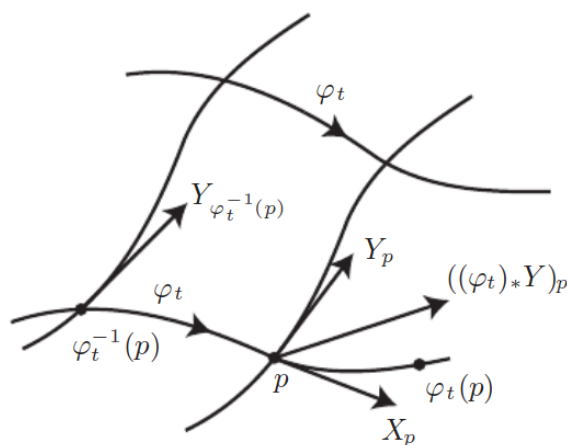


Figure 34.3

假设 f 是 M 上的一个光滑函数。令

$$F(t) \equiv f(\varphi_t(p)) . \quad (34.61)$$

则

$$F(t) - F(0) = \int_0^1 \frac{dF(st)}{ds} ds = t \int_0^1 F'(u) \Big|_{u=st} ds . \quad (34.62)$$

从 (34.61) 得到

$$f(\varphi_t(p)) = f(p) + t g_t(p) , \quad (34.63)$$

其中

$$g_t(p) \equiv \int_0^1 F'(u) \Big|_{u=st} ds = \int_0^1 \frac{df(\varphi_u(p))}{du} \Big|_{u=st} ds , \quad (34.64)$$

和

$$g_0(p) = \int_0^1 \frac{df(\varphi_u(p))}{du} \Big|_{u=0} ds = \frac{df(\varphi_u(p))}{du} \Big|_{u=0} = X_p f . \quad (34.65)$$

对 f 应用 (34.60) 的等号右边, 我们有

$$\begin{aligned}
 & \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_p - (\varphi_t)_* Y_{\varphi_t^{-1}(p)}}{t} \right) f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_p f - Y_{\varphi_t^{-1}(p)} (f \circ \varphi_t)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_p f - Y_{\varphi_t^{-1}(p)} (f + t g_t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_p f - Y_{\varphi_t^{-1}(p)} f}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} Y_{\varphi_t^{-1}(p)} g_t \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\varphi_t(p)} f - Y_p f}{t} - Y_p g_0(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y f \circ \varphi_t(p) - Y f \circ \varphi_0(p)}{t} - Y_p X_p f \\
 &= \frac{d}{dt} (Y f) \circ \varphi_t(p) \Big|_{t=0} - (Y X)_p f = X_p (Y f) - (Y X)_p f = [X, Y]_p f
 \end{aligned} \tag{34.66}$$

由于 f 是任意的, 定理得证。 $\square$

在一个坐标邻域 $(U; x^i)$ 中令

$$X = X^i(x^j) \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \partial_i, \tag{34.67}$$

$$\text{和 } Y = Y^i(x^j) \frac{\partial}{\partial x^i} = Y^i \partial_i, \tag{34.68}$$

则

$$\begin{aligned}
 [X, Y] f &= X(Y f) - Y(X f) = X^i \partial_i (Y^j \partial_j f) - Y^i \partial_i (X^j \partial_j f) \\
 &= X^i (\partial_i Y^j \partial_j f + Y^j \partial_i \partial_j f) - Y^i (\partial_i X^j \partial_j f + X^j \partial_i \partial_j f) \\
 &= \{X^i (\partial_i Y^j) \partial_j - Y^i (\partial_i X^j) \partial_j\} f.
 \end{aligned} \tag{34.69}$$

因此, 局域地,

$$\boxed{[X, Y] = \{X^i (\partial_i Y^j) - Y^i (\partial_i X^j)\} \partial_j}. \tag{34.70}$$

对于 $X_e \in T_e(G) \sim \mathcal{G}$, 我们有右不变场 $X = (R_g)_* X_e$. 这个场可以被说明是完备的 (这里省略证明). 令 $\{\varphi_t\}$ 是由 X 生成的微分同胚的单参数群, 而通过 $e \in G$ 的对应曲线由下式给出

$$\gamma_e(t) = \varphi_t(e). \tag{34.71}$$

练习 34.4 说明

$$\gamma_e(s+t) = \gamma_e(s) \gamma_e(t). \tag{34.72}$$

实际上, 可以说明 (证明省略) 有一个一对一对应 $X \leftrightarrow \gamma_e(t)$.

定义 34.9 指数映射 (exponential map) $\exp: \mathcal{G} \rightarrow G$ 定义为: 对于任意 $X_e \in T_e(G)$, 有

$$\exp(X_e) \equiv \gamma_e(1). \tag{34.73}$$

注意到

$$\gamma_e(t) = \exp(t X_e), \tag{34.74}$$

和

$$\varphi_t(g) = \gamma_g(t) = \gamma_e(t) g = \exp(t X_e) g. \tag{34.75}$$

对应 $X_e \leftrightarrow \gamma_e(t)$ 是 Figure 34.4 中用图说明。

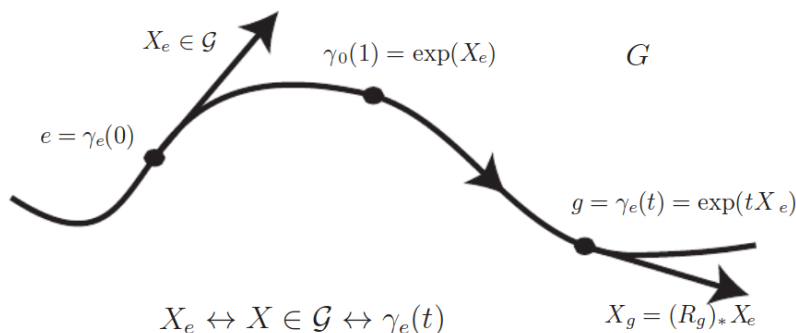


Figure 34.4

我们回忆到 $\mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$ 可以与所有 $n \times n$ 实矩阵等同。对于一个矩阵 $A \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{R})$, 我们定义

$$e^A \equiv 1 + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 \dots \quad (34.76)$$

练习 34.5 说明 (34.76) 中的级数收敛。

练习 34.6 说明

$$(a) \quad e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \quad (34.77)$$

$$(b) \quad e^{tA}e^{-tA} = 1 \quad (\text{单位矩阵}). \quad (34.78)$$

我们可以通过 $\gamma_e(t)$ 辨识 e^{tA} 并因此有 $e^A = \exp(A)$, 其中指数映射 $\exp$ 根据定义 34.9 定义并且根据 (34.76) 有 e^A 。G 中曲线 $\gamma_e(t)$ 由下式给出

$$\left. \frac{d\gamma_e(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \exp(tA) \right|_{t=0} = A. \quad (34.79)$$

对于 $g \in G$, 我们定义**伴随同构 (adjoint isomorphism)** $ad_g : G \rightarrow G$ 为: 对于任意 $g' \in G$, 有

$$ad_g(g') = gg'g^{-1} = L_g \circ R_{g^{-1}}g', \quad (34.80)$$

G 群上伴随同构 ad_g 引入一个同构

$$Ad(g) \equiv (ad_g)_* : T_e(G) \rightarrow T_e(G),$$

或者

$$Ad(g) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G},$$

在 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 上。这是由于 $ad_g(e) = geg^{-1} = e$ 。我们因此有映射

$$Ad : G \rightarrow GL(r, \mathbb{R}). \quad (34.81)$$

其中, $r = \dim \mathcal{G}$, 被称为 **Lie 群 G 的伴随表示 (adjoint representation of the Lie group**

G)。它很明显是 Lie 群 G 之间一个同态, 因为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}d(g_1 g_2) &= (ad_{g_1 g_2})_* = (ad_{g_1} \circ ad_{g_2})_* \\ &= (ad_{g_1})_* \circ (ad_{g_2})_* = \mathcal{A}d(g_1) \circ \mathcal{A}d(g_2) . \end{aligned} \quad (34.82)$$

这种同态反过来又引入一个 Lie 代数之间一个同态

$$\mathcal{A}d \equiv \mathcal{A}d_* : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{GL}(r, \mathbb{R}), \quad r = \dim \mathcal{G} . \quad (34.83)$$

称为 **Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的伴随表示 (adjoint representation of the Lie algebra $\mathcal{G}$)**。[$\mathcal{GL}(r, \mathbb{R})$ 中一个元素可以被看成 r -维空间 $\mathcal{G}$ 上的一个线性变换]。因此对于 $X \in \mathcal{G}$, $\mathcal{A}d(X) = \mathcal{A}d_X$ 是 $\mathcal{G}$ 上一个线性变换。

定理 34.6 令 X 和 Y 是一个 Lie 群 G 上右不变向量场 (考虑成 G 的 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的元素), 则 $\mathcal{G}$ 的伴随表示由下式给出

$$\boxed{\mathcal{A}d_X Y = -[X, Y]_r} , \quad (34.84)$$

其中, Lie 括号积 $[\cdot, \cdot]_r$ 是从 G 上右平移 R_g 得到的。

R 注意到 Lie 括号积在前面 (7.15) 给出实际上是 $[\cdot, \cdot]_{\text{left}}$, 从左平移 L_g 得到, 因此在 (34.84) 和 (7.15) 之间有一个符号区别, 作为 (34.51) 的结果。后面的方程则意味着 (34.84) 等价于 (7.15)。

证明: 考虑 $X_e, Y_e \in T_e(G) \sim \mathcal{G}$ 。令 X 和 Y 是 G 上右不变场分别对应于 X_e 和 Y_e , 而 φ_t 是由 X 生成的微分同胚的单参数群。由于 X 是右不变的, 推论 34.1 意味着右平移 R_g 与 φ_t 对易:

$$\text{对于任意 } g \in G, \quad R_g \circ \varphi_t = \varphi_t \circ R_g . \quad (34.85)$$

于是

$$\varphi_t(g) = (\varphi_t \circ R_g)(e) = (R_g \circ \varphi_t)(e) = R_g \varphi_t(e) = \varphi_t(e)g . \quad (34.86)$$

因此

$$\varphi_t = L_{\varphi_t(e)} . \quad (34.87)$$

现在通过定义 [(34.80)], 伴随同构 $ad_{\varphi_t(e)}$ 由下式给出

$$ad_{\varphi_t(e)} = L_{\varphi_t(e)} \circ R_{(\varphi_t(e))^{-1}} . \quad (34.88)$$

从中得到

$$\mathcal{A}d(\varphi_t(e)) \equiv (ad_{\varphi_t(e)})_* = (L_{\varphi_t(e)})_* \circ (R_{(\varphi_t(e))^{-1}})_* . \quad (34.89)$$

更进一步,

$$\mathcal{A}d(X_e) = \mathcal{A}d_e(X_e) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A}d(\varphi_t(e)) - \mathcal{A}d(e)}{t} . \quad (34.90)$$

由于 $\mathcal{A}d$ 映射恒元 $e \in G$ 到 $GL(r, \mathbb{R})$ 中恒元: 对于任意 $Y_e \in T_e(G)$, 有

$$(\mathcal{A}d(e))(Y_e) = Y_e . \quad (34.91)$$

通过对 (34.90) 等号右边作用 Y_e 并运用 (34.89), 我们则有

$$\begin{aligned} (Ad(X_e))(Y_e) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(L_{\varphi_t(e)})_* \circ (R_{(\varphi_t(e))^{-1}})_* Y_e - Y_e}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t)_* \circ Y_{(\varphi_t(e))^{-1}} - Y_e}{t} = -[X_e, Y_e] , \end{aligned} \quad (34.92)$$

其中, 第二个等号来自于 (34.87) 而最后一个等号来自于定理 34.5 [(34.59)]。由于任意 $X_e \in T_e(G)$ 之间存在一个一对一对应关系而它对应右不变向量场 $X \in \mathcal{G}$, 定理得证。 $\square$

我们再次注意到如果 $\mathcal{G}$ 被考虑成 G 上左不变向量场, 则我们可以有

$$Ad_X Y = [X, Y]_l , \quad (34.93)$$

其中, $[\cdot, \cdot]_l$ 表示对于左不变场的 Lie 括号乘积。

为了总结本章, 我们将运用上面发展的几何概念计算特殊么正 $SU(n)$ 群的 Lie 代数 $\mathfrak{su}(n)$ 。回忆

$$U(n) = \{g \in GL(n) \mid gg^\dagger = 1\} , \quad (34.94)$$

$$SU(n) = \{g \in U(n) \mid \det(g) = 1\} , \quad (34.95)$$

其中

$$(g^\dagger)_i^j = \overline{g_j^i} . \quad (34.96)$$

因此

$$\mathcal{U}(n) \sim T_e(U(n)) . \quad (34.97)$$

考虑通过恒元 $e \in U(n)$ 一个曲线 $g(t)$ 使得 $g(0) = e = g^\dagger(0)$ 。则

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} g(t) g^\dagger(t) \Big|_{t=0} = \frac{dg(t)}{dt} \Big|_{t=0} g^\dagger(0) + g(0) \frac{dg^\dagger(t)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= g'(0) + (g^\dagger)'(0) \end{aligned} \quad (34.98)$$

因此

$$\mathcal{U}(n) \subset \mathcal{S}(n) , \quad (34.99)$$

其中

$$\mathcal{S}(n) = \{A \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A + A^\dagger = 0\} . \quad (34.100)$$

反过来, 假设 $A \in \mathcal{S}(n)$ 。则

$$\exp(A)(\exp(A))^\dagger = \exp(A) \exp(A^\dagger) = \exp(A) \exp(-A) = 1 . \quad (34.101)$$

因此 $\exp(A) \in U(n)$, 并且

$$A = \frac{d}{dt} \exp(tA) \Big|_{t=0} \in \mathcal{U}(n) . \quad (34.102)$$

因此

$$\mathcal{S}(n) \subset \mathcal{U}(n) . \quad (34.103)$$

和 (34.99) 一同, 这意味着

$$\mathcal{U}(n) = \mathcal{S}(n) .$$

我们断言

$$SU(n) = \{B \in \mathcal{U}(n) \mid \operatorname{tr} B = 0\} , \quad (34.104)$$

或者

$$\boxed{SU(n) = \{B \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{C}) \mid B + B^\dagger = 0, \operatorname{tr} B = 0\}} . \quad (34.105)$$

这是下面引理的直接结果。

引理 34.1 对于任意 $n \times n$ 矩阵 B , 有

$$\boxed{\det(e^B) = e^{\operatorname{tr} B}} , \quad (34.106)$$

其中, e^B 是由 (34.76) 定义的。

证明: 令

$$f(t) = \det(e^{tB}) . \quad (34.107)$$

我们有

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= \frac{d}{dh} f(t+h) \Big|_{h=0} = \frac{d}{dh} (\det(e^{(t+h)B})) \Big|_{h=0} \\ &= \frac{d}{dh} (\det(e^{tB}) \det(e^{hB})) \Big|_{h=0} \\ &= \det(e^{tB}) \frac{d}{dh} \left(\det \left(1 + hB + \frac{h^2 B^2}{2!} + \cdots \right) \right) \Big|_{h=0} \\ &= \det(e^{tB}) \frac{d}{dh} (\det(1 + hB)) \Big|_{h=0} \\ &= \det(e^{tB}) \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} B f(t) , \end{aligned} \quad (34.108)$$

其中, 在五个等号, 我们已经运用了事实, 近似到 h 的一次项 $\det(e^{hB}) \sim \det(1 + hB)$, 而在第六个等号运用了事实

$$\det(1 + B) = 1 + \operatorname{tr} B - \frac{1}{2} \operatorname{tr}(B^2) + \frac{1}{2} (\operatorname{tr} B)^2 + \cdots . \quad (34.109)$$

因此

$$f(t) = f(0)e^{(\operatorname{tr} B)t} = e^{(\operatorname{tr} B)t} . \quad (34.110)$$

取 $t = 1$ 得到便得到我们的结论。 $\square$

35. 向量丛的联络和曲率

一个向量丛的概念在 Chapter 30 中引入。在本章中，我们将引入纤维丛的理论中一个中心概念——联络——其组成了规范场论的数学基础，以及物理中许多其它应用。正如我们可以看到的曲率是从联络中得到的一个概念。

基本上，一个向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 上的一个联络是一种对 M 上或者 E 的截面上向量场取微分的特定方法。由于不同纤维上的点之间不存在正则关系，因此需要在 E 上增加其可微结构以外的结构，使得“相邻”纤维上的点可以被“连接”。

回忆 M 上 E 的光滑截面的空间记为 $\Gamma(E)$ ，和 $C^\infty(M)$ -模一样是一个实向量空间。

定义 35.1 一个向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 上的一个联络是一个映射

$$D: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*(M) \otimes E)$$

满足下面的条件：

1) 对于任意 $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$,

$$D(s_1 + s_2) = Ds_1 + Ds_2 . \quad (35.1)$$

2) 对于任意 $s \in \Gamma(E)$ 和 $\alpha \in C^\infty(M)$,

$$D(\alpha s) = d\alpha \otimes s + \alpha Ds . \quad (35.2)$$

Ds 也被称为截面 s 的**协变导数** (*covariant derivative*)。

练习 35.1 说明 D 是一个线性映射。

定义 35.2 假设 XM 是上的一个光滑切场并且 $s \in \Gamma(E)$ 。 s 的**方向协变导数** (*directional covariant derivative*) 沿着 X 是一个截面由下式给出

$$D_X s = \langle X, Ds \rangle \in \Gamma(E) . \quad (35.3)$$

方向协变导数满足下面的性质。令 X 和 Y 是 M 上任意两个光滑切向量场, $s, s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ 并且 $\alpha \in C^\infty(M)$ 。则

$$1) \quad D_{X+Y}s = D_X s + D_Y s ; \quad (35.4)$$

$$2) \quad D_{\alpha X}s = \alpha D_X s ; \quad (35.5)$$

$$3) \quad D_X(s_1 + s_2) = D_X s_1 + D_X s_2 ; \quad (35.6)$$

$$4) \quad D_X(\alpha s) = (X\alpha)s + \alpha D_X s . \quad (35.7)$$

练习 35.2 证明上面四个性质。

为了更具体地理解联络的概念, 我们将使用局域坐标。假设向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 的典型纤维是一个 m -维向量空间而 M 是一个 n -维流形。考虑具有局域坐标 $x^i, i = 1, \dots, n$, 的一个坐标邻域 $(U; x^i)$ 。选择 m 个光滑截面 $s_\alpha, \alpha = 1, \dots, m$, 其在 U 中任意位置是线性无关的。这样 m 个截面的一个集合被称为 U 上 E 的一个局域标架场。有了这个设定, 集合 $\{dx^i \otimes s_\alpha, 1 \leq i \leq n, 1 \leq \alpha \leq m\}$ 对于任意点 $p \in U$ 组成 $T_p^* \otimes E_p$ 的一组基, E_p 是点 $p \in U$ 上的纤维。我们因此可以写

$$Ds_\alpha = A_{\alpha i}^\beta dx^i \otimes s_\beta , \quad (35.8)$$

其中, $A_{\alpha i}^\beta \in C^\infty(U)$ 是 U 上光滑函数。记为

$$\omega_\alpha^\beta = A_{\alpha i}^\beta dx^i , \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq m . \quad (35.9)$$

则 (35.8) 变成

$$Ds_\alpha = \omega_\alpha^\beta \otimes s_\beta , \quad (35.10)$$

其中, ω_α^β 是 1-形式的一个矩阵, 或者等价地, 一个矩阵-值 1-形式。矩阵 (ω_α^β) 被称为**联络矩阵 (connection matrix)**, 且取决于局域标架场的选择。我们也可以写 (35.10) 为矩阵方程

$$DS = \omega \otimes S , \quad (35.11)$$

其中

$$S \equiv \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} , \quad \text{和} \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \cdots & \omega_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_m^1 & \omega_m^2 & \cdots & \omega_m^m \end{pmatrix} . \quad (35.12)$$

由于 (ω_α^β) 取决于局域标架场的选择, 建立其在局域标架场变化下变换性质很重要。假设 $S' = ((s')_1, \dots, (s')_m)^t$ (其中 t 代表转置) 通过下面的**规范变换 (gauge transformation)** 与

S 相关

$$S' = gS, \quad \text{或} \quad (s')_\alpha = g_\alpha^\beta s_\beta, \quad (35.13)$$

其中

$$g = \begin{pmatrix} g_1^1 & \cdots & g_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m^1 & \cdots & g_m^m \end{pmatrix} \quad (35.14)$$

是 U 上光滑函数的一个可逆矩阵 $[g_i^j(x) \in C^\infty(U)$ 和 $\det(g) \neq 0]$ 。假设依赖于 S' 的 1-形式的联络矩阵是 $((\omega')_\alpha^\beta)$:

$$DS' = \omega' \otimes S'. \quad (35.15)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} DS' &= D(gS) = dg \otimes S + gDS \\ &= (dg + g \cdot \omega) \otimes S = (dg \cdot g^{-1} + g \cdot \omega \cdot g^{-1}) \otimes S'. \end{aligned} \quad (35.16)$$

与 (35.15) 对比, 对于一个联络矩阵, 我们得到下面的变换法则:

$$\boxed{\omega' = dg \cdot g^{-1} + g \cdot \omega \cdot g^{-1}}. \quad (35.17)$$

由于 $dg \cdot g^{-1}$ 这一项, 其一般情况下不会消失, 我们看到 (ω'_α^β) 不像一个 $(1,1)$ -张量一样变换 [其变换法则只包括 (35.17) 等号右边的第二项]。

我们有下面基本定理 (表述而不证明)。

定理 35.1 一个联络总是存在在一个向量丛上。

给定一个联络 D , 对于 M 上任意切向量场 X 和 Y 方向协变导数 D_X 和 D_Y 一般是不能对易的。为了测量协变导数的不可对易的程度, 我们引入 M 上一个矩阵值 2-形式, 称为曲率矩阵, 定义如下。

定义 35.3 给定具有联络矩阵 ω (一个矩阵-值 1-形式) 的一个向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 上的一个联络 D , 2-形式的曲率矩阵 (*curvature matrix*) Ω 定义为

$$\boxed{\Omega \equiv d\omega - \omega \wedge \omega}. \quad (35.18)$$

注意到上面的外积也是一个矩阵乘法, 即:

$$(\omega \wedge \omega)_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha. \quad (35.19)$$

让我们先处理 Ω 在局域标架场变化下的变换性质 [由 (35.13) 给出]。在这样一个变化下, ω 像 (35.17) 一样变换, 所以

$$\omega'g = dg + g\omega. \quad (35.20)$$

对这个方程取外微分, 我们有

$$d\omega'g - \omega' \wedge dg = dg \wedge \omega + g d\omega. \quad (35.21)$$

从 (35.20),

$$dg = \omega'g - g\omega . \quad (35.22)$$

将这个结论插入 (35.21), 我们得到

$$d\omega'g - \omega' \wedge (\omega'g - g\omega) = (\omega'g - g\omega) \wedge \omega + gd\omega , \quad (35.23)$$

或

$$(d\omega' - \omega' \wedge \omega')g = g(d\omega - \omega \wedge \omega) . \quad (35.24)$$

因此, 在局域标架场的变化下,

$$\Omega' = g\Omega g^{-1} . \quad (35.25)$$

可以看到 2-形式的曲率矩阵和 (1,1)-型张量变换一样 [矩阵的相似变换 [c.f. (1.42)]]。

在此刻, 有必要指出我们的符号中的一个微妙之处, 它有潜在混淆的可能。回忆到矩阵 g 确定局域坐标的变化由 [(35.13)] 给出 $(s')_{\alpha} = g_{\alpha}^{\beta} s_{\beta}$ 。我们也将之写为 S 左乘 g ($S' = gS$)。但我们可以写出相同方程为一个右乘 ($S' = Sg$) 解释 g_{α}^{β} 为矩阵 g 的第 β 行和第 α 列元素而同时写 S 和 S' 为行矩阵 (读者应该验证这一点)。方程 (35.11) 也可以出现为 $DS = S \otimes \omega$ 。在这种情况下, 推导 (35.17) 的一个相似过程会产生 $\omega' = g^{-1}\omega g + g^{-1}dg$ 。导出 (35.24) 的一个类似过程则将给出 $g(d\omega' + \omega' \wedge \omega') = (d\omega + \omega \wedge \omega)g$, 强迫我们验证曲率矩阵为 $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ [与 (35.28) 比较], 以便满足期待的张量变换性质: $\Omega' = g^{-1}\Omega g$ 。在 (35.18) 的等号右边用加号符号定义 Ω 的约定在文献中也很常用。

给定 M 上两个任意切向量场 X 和 Y , 而 $\Gamma(E)$ 上的一个联络 D , 我们可以定义一个**曲率算符 (curvature operator)**

$$F(X, Y) : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

[基于曲率 2-形式 Ω (35.18)] 如下。考虑一个坐标邻域 $(U; x^i)$ 和 $x \in U$ 。令 $s_x \in \pi^{-1}(x)$ 是 x 上纤维中的一个点, 它是一个 m -维向量空间。依赖于 U 中一个局域标架 $S_U = (s_1, \dots, s_m)^t$, 写为

$$s_x = \lambda^{\alpha} s_{\alpha}|_x , \quad \lambda^{\alpha} \in \mathbb{R} . \quad (35.26)$$

定义映射 $F(X_x, Y_x) : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(x)$ 为

$$F(X_x, Y_x) s_x \equiv \lambda^{\alpha} \left(\langle X \wedge Y, \Omega_{\alpha}^{\beta} \rangle s_{\beta} \right) |_x , \quad (35.27a)$$

其中, 配对 $\langle , \rangle$ 已经在定理 30.3 [方程 (30.39)] 和 (28.28) 中给出。我们则定义

$$(F(X, Y)s)(x) = F(X_x, Y_x) s_x . \quad (35.27b)$$

曲率算符 $F(X, Y)$ 有下面性质:

$$1) \quad F(X, Y) = -F(Y, X) , \quad (35.28)$$

$$2) \quad F(fX, Y) = fF(X, Y) , \quad (35.29)$$

$$3) \quad F(X, Y)(fs) = f(F(X, Y)s) , \quad (35.30)$$

其中, $X, Y \in \Gamma(T(M)), f \in C^\infty(M)$ 和 $s \in \Gamma(E)$ 。

练习 35.3 证明上面三个性质。

练习 35.4 说明对于 $f, g \in C^\infty(M)$,

$$F(fX, gY) = (fg)F(X, Y) . \quad (35.31)$$

我们说 $F(X, Y)$ 是 X 和 Y 中 $C^\infty(M)$ -双线性。

我们现在建立事实显式说明一个联络的曲率衡量方向协变导数的非对易程度。

定理 35.2 令 X 和 Y 是一个流形 M 上两个任意光滑切向量场, 而 D 是向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 上一个给定联络。则

$$F(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X, Y]} . \quad (35.32)$$

证明: 我们需要在一个坐标邻域 $(U; x^i)$ 中证明上面方程。令 $s \in \Gamma(E)$ 在标架场的一个局域选择下被写为 $s = \lambda^\alpha s_\alpha$ 。则通过 (35.3), (注意到 λ^α 是 U 上的函数),

$$D_X s = \langle X, Ds \rangle = \langle X, (d\lambda^\alpha) s_\alpha + \lambda^\alpha \omega_\alpha^\beta s_\beta \rangle = (X\lambda^\alpha + \lambda^\beta \langle X, \omega_\beta^\alpha \rangle) s_\alpha , \quad (35.33)$$

和

$$\begin{aligned} D_Y D_X s &= \{ Y(X\lambda^\alpha) + Y(\lambda^\beta \langle X, \omega_\beta^\alpha \rangle) + (X\lambda^\gamma + \lambda^\beta \langle X, \omega_\beta^\gamma \rangle) \langle Y, \omega_\gamma^\alpha \rangle \} s_\alpha \\ &= \{ Y(X\lambda^\alpha) + ((X\lambda^\beta) \langle Y, \omega_\beta^\alpha \rangle + (Y\lambda^\beta) \langle X, \omega_\beta^\alpha \rangle) \\ &\quad + \lambda^\beta (Y \langle X, \omega_\beta^\alpha \rangle + \langle X, \omega_\beta^\gamma \rangle \langle Y, \omega_\gamma^\alpha \rangle) \} s_\alpha . \end{aligned} \quad (35.34)$$

因此

$$\begin{aligned} (D_X D_Y - D_Y D_X) s &= \{ [X, Y] \lambda^\alpha + \lambda^\beta (\langle [X, Y], \omega_\beta^\alpha \rangle + \langle X \wedge Y, d\omega_\beta^\alpha - \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha \rangle) \} s_\alpha \\ &= D_{[X, Y]} s + \lambda^\beta (X \wedge Y, \Omega_\beta^\alpha) s_\alpha , \end{aligned} \quad (35.35)$$

其中, (30.39) 和 (28.28) 已经被使用了。定理来自于由 (35) 给出的定义。 $\square$

注意到即使曲率 $\Omega = 0$ (平直空间), D_X 和 D_Y 不必对易, 除非 X 和 Y 是对易的。

任意 2-形式的曲率矩阵 Ω 满足一个重要恒等式, 称为 **Bianchi 恒等式 (Bianchi identity)**:

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega . \quad (35.36)$$

这很容易建立在对 Ω 的定义方程 [(35.18)] 两边取外微分。实际上,

$$\begin{aligned} d\Omega &= d^2\omega - (d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega) \\ &= -(\Omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega + \omega \wedge (\Omega + \omega \wedge \omega) \\ &= \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega . \end{aligned}$$

在物理学中的规范场理论中, 联络被考虑成**向量势 (vector potential)**, 而曲率被考虑成**力 (force)**。由 (35.18) 和 (35.32) 抽象地给出的它们之间的关系, 可以根据局域坐标更具体的展现出来, 这是物理学文献中通常介绍的形式。让我们使用 (物理) 约定: 希腊指标 $(\mu, \nu, \dots)$ 标记基流形 (时空) 坐标, 而拉丁指标 $(i, j, \dots)$ 标记纤维 (内禀自由度) 坐标。假设 $X = X^\mu \partial_\mu$ 和 $Y = Y^\nu \partial_\nu$ 在一个坐标邻域 $(U; x^i)$ 中。则通过 F 的双线性性质 [(35.31)], 我们可以写

$$F(X, Y) = X^\mu Y^\nu F(\partial_\mu, \partial_\nu) \equiv X^\mu Y^\nu F_{\mu\nu} , \quad (35.37)$$

其中

$$F_{\mu\nu} \equiv F(\partial_\mu, \partial_\nu) = D_{\partial_\mu} D_{\partial_\nu} - D_{\partial_\nu} D_{\partial_\mu} - D_{[\partial_\mu, \partial_\nu]} = D_{\partial_\mu} D_{\partial_\nu} - D_{\partial_\nu} D_{\partial_\mu} , \quad (35.38)$$

由于 $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$ 。另一方面, 通过选择 U 中局域标架场: $\{s_i, i = 1, \dots, m\}$, 方向协变导数 D_{∂_μ} 由 [c.f. (35.8)] 给出

$$D_{\partial_\mu} s_i = A_{i\mu}^j s_j , \quad (35.39)$$

其中, $A_{i\mu}^j \in C^\infty(U)$ 是 U 上光滑函数。方程 (35.39) 则表明

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} s_i &= D_{\partial_\mu} D_{\partial_\nu} s_i - D_{\partial_\nu} D_{\partial_\mu} s_i \\ &= D_{\partial_\mu} (A_{i\nu}^j s_j) - D_{\partial_\nu} (A_{i\mu}^j s_j) \\ &= (\partial_\mu A_{i\nu}^j) s_j + A_{i\nu}^j A_{j\mu}^k s_k - (\partial_\nu A_{i\mu}^j) s_j - A_{i\mu}^j A_{j\nu}^k s_k \\ &= ((\partial_\mu A_{i\nu}^j - \partial_\nu A_{i\mu}^j) + (A_{i\nu}^k A_{k\mu}^j - A_{i\mu}^k A_{k\nu}^j)) s_j , \end{aligned} \quad (35.40)$$

其中, 在第四个等号位置 A 的二次项中, 我们已经重新标记了指标 ($j \leftrightarrow k$)。在上面的方程中, $F_{\mu\nu}$ 出现为 s_i 上一个线性算符。依赖于标架场 $\{s_i\}$ 的选择, 我们则可以写成

$$F_{\mu\nu} s_i = F_{\mu\nu i}^j s_j , \quad (35.41)$$

其中, $F_{\mu\nu i}^j \in C^\infty(U)$ 是 U 上光滑函数, 并被称为依赖于局域坐标 x^μ 和局域标架场 $\{s_i\}$ 的曲率的分量。对比 (35.40) 和 (35.41), 我们有

$$F_{\mu\nu i}^j = \partial_\mu A_{i\nu}^j - \partial_\nu A_{i\mu}^j + A_{i\nu}^k A_{k\mu}^j - A_{i\mu}^k A_{k\nu}^j . \quad (35.42)$$

等价地, 在矩阵形式中,

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]} . \quad (35.43)$$

这是物理学文献中最常遇到的方程式, 在非 Abel 规范场理论 (**non-abelian gauge field theory**) 的背景下, F 表示**场强 (field strength)**, A 表示**向量势 (vector potential)**。在

Abel 情况 ($[A_\mu, A_\nu] = 0$) 中, 上面方程化简为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (35.44)$$

这正是 Maxwell 电动力学中场张量和向量势之间的关系。注意到 (35.38) 中 $F_{\mu\nu}$ 与 2-形式的曲率矩阵 Ω 的原始定义 [(35.18)] 相关为

$$\Omega = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (35.45)$$

其中, 因子 $\frac{1}{2}$ 描述了 $F_{\mu\nu}$ 的反对称和楔积。

练习 35.5 检验 (35.45) 与 (35.27a) 和 (35.27b) 一致。

给定一个向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 上一个联络 D , 我们可以在**对偶丛 (dual bundle)** $\pi: E^* \rightarrow M$ 上构造所谓的**诱导联络 (induced connection)** (也记为 D)。假设 $s \in \Gamma(E)$ 和 $s^* \in \Gamma(E^*)$ 分别是对应丛上的光滑流形, 所以配对 $\langle s, s^* \rangle$ 是 M 上的一个光滑函数。则 E^* 上诱导联络 D 由下面的方程决定

$$d\langle s, s^* \rangle = \langle Ds, s^* \rangle + \langle s, Ds^* \rangle. \quad (35.46)$$

注意到上面方程中的每一项都是 M 上一个 1-形式。假设我们选择一个局域标架场 $\{s_i\}$, 具有对偶标架场 $\{(s^*)^j\}$, $i, j = 1, \dots, m$, 使得

$$\langle s_i, (s^*)^j \rangle = \delta_i^j. \quad (35.47)$$

令 [c.f. (35.10)]

$$Ds_i = \omega_i^j \otimes s_j, \quad (35.48)$$

和

$$D(s^*)^j = (\omega^*)_i^j \otimes (s^*)^i. \quad (35.49)$$

则 (35.46) 表明

$$\begin{aligned} d(\delta_i^j) &= 0 = \langle Ds_i, (s^*)^j \rangle + \langle s_i, D(s^*)^j \rangle \\ &= \omega_i^k \langle s_k, (s^*)^j \rangle + (\omega^*)_k^j \langle s_i, (s^*)^k \rangle \\ &= \omega_i^j + (\omega^*)_i^j. \end{aligned} \quad (35.50)$$

因此

$$(\omega^*)_i^j = -\omega_i^j, \quad (35.51)$$

或

$$D(s^*)^j = -\omega_i^j \otimes (s^*)^i. \quad (35.52)$$

给定两个向量丛 $\pi: E_1 \rightarrow M$ 和 $\pi: E_2 \rightarrow M$, 我们可以构造丛 $\pi: E_1 \oplus E_2 \rightarrow M$ 和 $\pi: E_1 \otimes E_2 \rightarrow M$ 。则对于 $s_1 \in \Gamma(E_1), s_2 \in \Gamma(E_2), s_1 \oplus s_2$ 和 $s_1 \otimes s_2$ 分别是 $E_1 \oplus E_2$ 和 $E_1 \otimes E_2$ 上的截面。如果联络在 E_1 和 E_2 上分开给出 (记为相同符号 D), 则我们有 $E_1 \oplus E_2$

和 $E_1 \otimes E_2$ 上的诱导联络, 由下式给出

$$D(s_1 \oplus s_2) \equiv Ds_1 \oplus Ds_2, \quad (35.53)$$

$$D(s_1 \otimes s_2) \equiv Ds_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes Ds_2. \quad (35.54)$$

练习 35.6 检验上面对于诱导联络 $E_1 \oplus E_2$ 和 $E_1 \otimes E_2$ 的定义满足对于任意联络的条件 1) 和 2)(在定义 35.1 中给出)。

给定一个向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 和 E 上一个联络 D , 让我们现在定义截面-值 $[\Gamma(E)$ -值] r -形式 $[\in \Gamma(E) \otimes A^r(M)]$ 和矩阵-值 $[\Gamma(E \otimes E^*)$ -值] r -形式 $[\in \Gamma(E \otimes E^*) \otimes A^r(M)]$ 的协变导数。[一个矩阵可以看成 $\Gamma(E)$ 上一个线性算符的矩阵表示 (依赖于局域标架场的一个特定选择), 因此它是 $\Gamma(E \otimes E^*)$ 的一个元素]。令 $\lambda \in \Gamma(E) \otimes A^r(M)$, 并写

$$\lambda = \lambda_{\mu_1 \dots \mu_r} \otimes dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \quad (35.55)$$

其中, $\lambda_{\mu_1 \dots \mu_r} \in \Gamma(E)$ 。则我们定义

$$D\lambda \equiv D(\lambda_{\mu_1 \dots \mu_r}) \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (35.56)$$

令

$$\lambda_{\mu_1 \dots \mu_r} = \alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i s_i, \quad (35.57)$$

则通过 (35.3),

$$D\lambda_{\mu_1 \dots \mu_r} = d\alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i s_i + \alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i Ds_i = d\alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i s_i + \alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i \omega_i^j \otimes s_j.$$

因此

$$\begin{aligned} D\lambda &= d\alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \otimes s_i \\ &\quad + \omega_i^j \wedge (\alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i s_j \otimes dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) \\ &= d\alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \otimes s_i \\ &\quad + (-1)^r \alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i (dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}) \wedge \omega_i^j \otimes s_j. \end{aligned} \quad (35.58)$$

我们将简写上面为矩阵方程

$$\boxed{D\lambda = d\lambda + (-1)^r \lambda \wedge \omega, \quad \lambda \in \Gamma(E) \otimes A^r(M)}. \quad (35.59)$$

上面方程中, λ 是 r -形式的一个行矩阵:

$$\lambda \equiv (\alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^1, \dots, \alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^m) dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r},$$

而 $\lambda \wedge \omega$ 意思是楔积同时也是矩阵乘法。

现在令 $\eta \in \Gamma(E \otimes E^*) \otimes A^r(M)$, 并写

$$\eta = \eta_{\mu_1 \dots \mu_r} \otimes dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}, \quad (35.60)$$

其中, $\eta_{\mu_1 \dots \mu_r}$ 是 $\Gamma(E \otimes E^*)$ 中一个元素, 由下式给出

$$\eta_{\mu_1 \dots \mu_r} = \alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i s_i \otimes \beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}} (s^*)^j, \quad (35.61)$$

其中, $\alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i$ 和 $\beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}}$ 都是 M 上的光滑函数。则我们定义

$$D\eta \equiv D(\eta_{\mu_1 \dots \mu_r}) \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}. \quad (35.62)$$

通过 (35.54),

$$\begin{aligned} D(\eta_{\mu_1 \dots \mu_r}) &= D(\alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i s_i) \otimes \beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}} (s^*)^j + \alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i s_i \otimes D(\beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}} (s^*)^j) \\ &= \{ (d\alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i) \otimes s_i + \alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i \omega_i^k \otimes s_k \} \otimes \beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}} (s^*)^j \\ &\quad + \alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i s_i \otimes \{ d\beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}} \otimes (s^*)^j - \beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}} \omega_k^j (s^*)^k \} \\ &= d(\alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i \beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}}) s_i \otimes (s^*)^j \\ &\quad + \alpha_{\beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}}}^i \beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}} \{ \omega_i^k \otimes s_k \otimes (s^*)^j - s_i \otimes (s^*)^k \otimes \omega_k^j \}. \end{aligned} \quad (35.63)$$

因此

$$\begin{aligned} D\eta &= d(\alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i \beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}}) s_i \otimes (s^*)^j \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \\ &\quad + \alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i \beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}} \left\{ (-1)^r (s_k \otimes (s^*)^j) \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \wedge \omega_i^k \right. \\ &\quad \left. - \omega_k^j \wedge (s_i \otimes (s^*)^k) \otimes dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r} \right\}, \end{aligned} \quad (35.64)$$

其中, 因子 $(-1)^r$ 来自于 $(\omega)_i^k$ (一个 1-形式) 和 r -形式 $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ 的对易。

让我们定义两个矩阵-值形式 η_1 和 η_2 的**分次交换子 (graded commutator)** 为

$$[\eta_1, \eta_2]_{\text{gr}} \equiv \eta_1 \wedge \eta_2 - (-1)^{r_1 r_2} \eta_2 \wedge \eta_1, \quad (35.65)$$

其中, η_1 是一个 r_1 -形式而 η_2 是一个 r_2 -形式。则类似于 (35.59), 我们可以简写 (35.64) 为

$$D\eta = d\eta - [\omega, \eta]_{\text{gr}}, \quad \eta \in \Gamma(E \otimes E^*) \otimes A^r(M), \quad (35.66)$$

其中, 再一次, $\omega \wedge \eta$ 和 $\eta \wedge \omega$ 涉及矩阵乘法和楔积。

阶化交换子中 ω 和 η 的阶需要一些解释。考虑 (35.64) 等号右边中的项 $\alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i \beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}} \omega_k^j \wedge (s_i \otimes (s^*)^k) \otimes dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$ 。我们可以将它写成

$$\mathcal{A} = \alpha^i \beta_j s_i \otimes (s^*)^k \omega_k^j \wedge \xi,$$

其中, ξ 是 r -形式 $dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$, 而 α^i 和 β_j 中名标 $\{\mu_1 \dots \mu_r\}$ 已经被忽略了。 $\mathcal{A}$ 可以

被考虑成一个映射 $A : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \otimes A^{r+1}(M)$ 。因此

$$\begin{aligned} \mathcal{A}s_l &= \mathcal{A}_l^i s_i = \alpha^i \beta_j s_i \left\langle s_l, (s^*)^k \right\rangle \omega_k^j \wedge \xi = \alpha^i \beta_j s_i \delta_l^k \omega_k^j \wedge \xi \\ &= \omega_l^j \wedge (\beta_j \alpha^i \xi) \otimes s_i = (\omega_l^j \wedge \eta_j^i) \otimes s_i = (\omega \wedge \eta)_l^i s_i, \end{aligned}$$

其中

$$\eta_j^i \equiv \beta_j \alpha^i \xi = \beta_{j\{\mu_1 \dots \mu_r\}} \alpha_{\{\mu_1 \dots \mu_r\}}^i dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}.$$

一个类似的考虑适用于 (35.64) 中涉及 $(-1)^r$ 的项。

通过应用 (35.66) 到 2-形式的曲率矩阵 Ω ，我们看到

$$\begin{aligned} D\Omega &= d\Omega - [\omega, \Omega]_{\text{gr}} = d\Omega - (\omega \wedge \Omega - (-1)^2 \Omega \wedge \omega) \\ &= d\Omega - (\omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega). \end{aligned} \quad (35.67)$$

因此 Bianchi 恒等式 (35.36) 可以更简洁地表述为

$$\boxed{D\Omega = 0}. \quad (35.68)$$

注意到使用阶化交换子，曲率 Ω 也可以被写成

$$\boxed{\Omega = d\omega - \frac{1}{2}[\omega, \omega]_{\text{gr}}}. \quad (35.69)$$

为了继续协变导数的微积分，我们将使用 (35.59) 来计算 $D^2\lambda$ ，其中 $\lambda \in \Gamma(E) \otimes A^r(M)$ 。我们有

$$\begin{aligned} D(D\lambda) &= d(D\lambda) + (-1)^{r+1}(D\lambda) \wedge \omega \\ &= d(d\lambda + (-1)^r \lambda \wedge \omega) + (-1)^{r+1}(d\lambda + (-1)^r \lambda \wedge \omega) \wedge \omega \\ &= (-1)^r ((d\lambda) \wedge \omega + (-1)^r \lambda \wedge d\omega) + (-1)^{r+1}(d\lambda) \wedge \omega - \lambda \wedge (\omega \wedge \omega) \\ &= \lambda \wedge (d\omega - \omega \wedge \omega). \end{aligned} \quad (35.70)$$

从 (35.18) 得到

$$\boxed{D^2\lambda = \lambda \wedge \Omega, \quad \lambda \in \Gamma(E) \otimes A^r(M)}. \quad (35.71)$$

练习 35.7 从下式开始

$$D^2\lambda = D(d\lambda + (-1)^r \lambda \wedge \omega) = D(d\lambda) + (-1)^r D(\lambda \wedge \omega),$$

开始再次得到 (35.71) 结果并意识到 $d\lambda$ 和 $\lambda \wedge \omega$ 都是 $\Gamma(E) \otimes A^{r+1}(M)$ 中的元素，即：截面-值 $(r+1)$ -形式。

对 (35.66) 取协变微分, 我们有

$$\begin{aligned} D^2\eta &= D(d\eta - \omega \wedge \eta + (-1)^r \eta \wedge \omega) = D(d\eta) - D(\omega \wedge \eta) + (-1)^r D(\eta \wedge \omega) \\ &= -[\omega, d\eta]_{\text{gr}} - (d(\omega \wedge \eta) - [\omega, \omega \wedge \eta]_{\text{gr}}) + (-1)^r (d(\eta \wedge \omega) - [\omega, \eta \wedge \omega]_{\text{gr}}) \\ &= \eta \wedge (d\omega - \omega \wedge \omega) - (d\omega - \omega \wedge \omega) \wedge \eta. \end{aligned} \quad (35.72)$$

因此

$$D^2\eta = [\eta, \Omega], \quad \eta \in \Gamma(E \otimes E^*) \otimes A^r(M). \quad (35.73)$$

注意到 Ω 是一个 2-形式, 上面方程中的交换子等于阶化交换子。

一个向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 上联络导出 M 中沿着一个曲线 C 的一个向量场的平行移动的有用概念。

定义 35.4 令 D 是 $\pi: E \rightarrow M$ 上一个联络而 C 是 M 中一个参数化曲线。如果一个截面 $s \in \Gamma(E)$ 满足: 在 C 上任意点处, 有

$$D_X s = 0 \quad (35.74)$$

其中, X 是沿着 C 的切向量场, 则 s 被称为与沿着曲线 C 平行 (*parallel*)。

令曲线 C 在一个局域坐标邻域 $(U; x^\mu)$ 中由下式给出

$$x^\mu = x^\mu(t), \quad 1 \leq \mu \leq n. \quad (35.75)$$

则沿着 C 的切向量场 X 是

$$X = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (35.76)$$

选择 U 上的一个局域标架场 $\{s_i\}$ 使得 $s = \lambda^i s_i$ 。则 (35.74) 等价于

$$\begin{aligned} D_X s &= \langle X, Ds \rangle = \left\langle \frac{dx^\mu}{dt} \partial_\mu, (d\lambda^i) s_i + \lambda^i A_{i\nu}^j dx^\nu \otimes s_j \right\rangle \\ &= \frac{\partial \lambda^i}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} s_i + A_{j\nu}^i \delta_\mu^\nu \frac{dx^\mu}{dt} \lambda^j \otimes s_i = \left(\frac{d\lambda^i}{dt} + A_{j\mu}^i \frac{dx^\mu}{dt} \lambda^j \right) s_i = 0. \end{aligned} \quad (35.77)$$

由于 s_i 是独立的, 上面方程表明下面方程系统:

$$\frac{d\lambda^i}{dt} + A_{j\mu}^i \frac{dx^\mu}{dt} \lambda^j = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (35.78)$$

给定初始条件 $\lambda'(0)$ 的一个集合, 即: $v \in E_{x(0)} = \pi^{-1}(x(0))$, 存在唯一一个解 (基于常微分方程的唯一性定理)。沿着曲线 C 的向量场 $s(t) = \lambda^i(t) s_i$ 被称为向量 $v = \lambda^i(0) s_i$ 沿着曲线 C 的平行移动 (**parallel displacement**)。这个概念在物理中有许多特定的应用。特别地, 它引导出了完整 (holonomy)¹ 的概念。

定义 35.5 令 C 是一个流形 M 中的一个光滑参数化曲线, 而 D 是向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 上一个给定联络。假设 $C(t_0) = x$ 和 $C(t_1) = y$ 是 M 中曲线 C 的点。则线性映射

¹译注: holonomy 也有人译为和乐, 我们这里译为完整。

$H(C; D) : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(y)$ 由下式给出

$$H(C; D)(v) = w, \quad (35.79)$$

其中, v 是 $\pi^{-1}(x)$ 中一些向量, 而 w 是沿着曲线 C 从 x 到 y 平行移动的结果被称为沿着曲线 C 从 x 到 y 的完整映射 (holonomy map)。

练习 35.8 说明完整映射 $H(C; D)$ 与曲线 C 的参数化无关。

定理 35.3 平行移动以及由此的完整映射在局域标架场的一个规范变换下是不变的。

证明: 方程 (35.78) 描述 $v(t) = v^i(t)s_i$ 的平行移动 (依赖于局域标架场 $\{s_i\}$) 可以被写成

$$\frac{d}{dt}v^i = -\frac{dx^\mu}{dt}A_{j\mu}^i v^j, \quad (35.80)$$

有 $v(t_0) = v$ 和 $v(t_1) = w$ 。现在应用规范变换 $(s')_i = g_i^j s_j$, 使得

$$v^i(t)s_i = (v')^i(t)(s')_i,$$

其中, $(v')^i(t) = (g^{-1})_j^i(C(t))v^j(t)$ 。[参考 Table 1.1]。我们则有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v')^i(t) &= \left(\frac{d}{dt}(g^{-1})_j^i(C(t)) \right) v^j(t) + (g^{-1})_j^i(C(t)) \frac{dv^j(t)}{dt} \\ &= \frac{\partial (g^{-1})_j^i}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} v^j - (g^{-1})_j^i \frac{dx^\mu}{dt} A_{k\mu}^j v^k \\ &= \frac{\partial (g^{-1})_j^i}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} g_l^j (v')^l - (g^{-1})_j^i \frac{dx^\mu}{dt} A_{k\mu}^j g_l^k (v')^l \\ &= -\frac{dx^\mu}{dt} \left(g_l^k A_{k\mu}^j (g^{-1})_j^i - \frac{\partial (g^{-1})_j^i}{\partial x^\mu} g_l^j \right) (v')^l. \end{aligned} \quad (35.81)$$

由于 $g_l^j (g^{-1})_j^i = \delta_l^i$,

$$\frac{\partial (g^{-1})_j^i}{\partial x^\mu} g_l^j = -\frac{\partial g_l^j}{\partial x^\mu} (g^{-1})_j^i.$$

因此 (35.81) 表明

$$\frac{d(v')^i}{dt} = -\frac{dx^\mu}{dt} (A')_{i\mu}^j (v')^j, \quad (35.82)$$

其中

$$(A')_{i\mu}^j \equiv \frac{\partial g_l^j}{\partial x^\mu} (g^{-1})_j^i + g_l^k A_{k\mu}^j (g^{-1})_j^i, \quad (35.83)$$

与 1-形式的联络矩阵由 (35.17) 给出的规范变换规则完全一致。因此, (35.80), 即: 平行移动的过程, 依赖于一个规范变换是不变的。□

依赖于一个局域标架场 $\{s_i\}$, 让我们写完整映射 $H(C; D) : \pi^{-1}(C(t_0)) \rightarrow \pi^{-1}(C(t_1))$ 的矩阵表示为

$$Hs_i = H_i^j s_j. \quad (35.84)$$

依赖于规范变换标量场 $(s')_i = g_i^j(C(t))s_j$, 我们有

$$H(s')_i = (H')_i^j (s')_j . \quad (35.85)$$

因此

$$H g_i^j(C(t_0)) s_j = (H')_i^j g_j^k(C(t_1)) s_k ,$$

或

$$g_i^j(C(t_0)) H_j^k s_k = (H')_i^j g_j^k(C(t_1)) s_k .$$

这意味着矩阵方程

$$g(C(t_0)) H = H' g(C(t_1)) ,$$

或

$$\boxed{H' = g(C(t_0)) H g^{-1}(C(t_1))} , \quad (35.86)$$

其是完整映射的矩阵表示的规范变换规则。

当我们考虑闭圈的完整映射时, 会出现一种重要情况: $x = C(t_1) = C(t_0)$ 。在这种情况下, $H(C; D)$ 是向量空间 $E_x = \pi^{-1}(x)$ 上的一个线性算符。集合

$$H_x \equiv \{H(C; D) | C(t_0) = C(t_1) = x\} \quad (35.87)$$

对应于 x 处的所有圈组成了 $GL(m)$ 的一个子群, 其中 m 是 E_x 的维度, 称为参考于点 $x \in M$ 处联络 D 的**完整群 (holonomy group)**。

假设 $H \in H_x$ 。则在一个规范变换下, (35.86) 表明 H 的矩阵表示根据下式变换

$$H' = g(x) H g^{-1}(x) . \quad (35.88)$$

我们因此得到了规范不变量

$$W \equiv \text{Tr}(H) , \quad H \in H_x , \quad (35.89)$$

在物理学文献中称为 **Wilson 圈 (Wilson loop)**。

36. Yang-Mills 方程

Maxwell 的电动力学提供了规范场理论的最简单例子。在本章中我们首先将用微分形式重写 Maxwell 方程组并且说明它们可以从曲率 2-形式的协变导数中获得。Maxwell 方程组 (描述 Abel 规范场理论) 对非 Abel 情形的推广被称为 Yang-Mills 方程 [在 (36.34) 中给出]。

Maxwell 方程组的标准形式如下

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (36.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 , \quad (36.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho , \quad (36.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} . \quad (36.4)$$

回忆电磁场张量 $F_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, [c.f. (2.31)]:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (36.5)$$

引入 2-形式 [c.f. (35.45)]

$$\Omega = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu . \quad (36.6)$$

运用 (36.5), 我们可以显式写出 Ω 为

$$\Omega = E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy . \quad (36.7)$$

运用记号

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) \quad (36.8)$$

$$d\mathbf{a} = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy) \quad (36.9)$$

方程 (36.7) 也可以被写成

$$\Omega = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \wedge dt + \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} . \quad (36.10)$$

对 (36.7) 取外微分, 我们得到

$$\begin{aligned} d\Omega = & \left(\frac{\partial E^3}{\partial y} - \frac{\partial E^2}{\partial z} \right) dy \wedge dz \wedge dt + \frac{\partial B^1}{\partial t} dy \wedge dz \wedge dt \\ & + \left(\frac{\partial E^1}{\partial z} - \frac{\partial E^3}{\partial x} \right) dz \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial B^2}{\partial t} dz \wedge dx \wedge dt \\ & + \left(\frac{\partial E^2}{\partial x} - \frac{\partial E^1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dt + \frac{\partial B^3}{\partial t} dx \wedge dy \wedge dt \\ & + \left(\frac{\partial B^1}{\partial x} + \frac{\partial B^2}{\partial y} + \frac{\partial B^3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz , \end{aligned} \quad (36.11)$$

或者

$$d\Omega = \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \wedge dt + (\nabla \cdot \mathbf{B}) d\tau , \quad (36.12)$$

其中, $d\tau \equiv dx \wedge dy \wedge dz$ 是空间中的体积元素。

练习 36.1 运用外微分的规则来验证 (36.11)。

很明显看到第一对 Maxwell 方程 [(36.1) 和 (36.2)] 等价于一个单个方程

$$d\Omega = 0 \quad (36.13)$$

让我们现在来计算 $\star\Omega$, 其中 $\star$ 是在 (29.11) 中定义的 Hodge-star 算符。在现在这种情况下, $\star$ 定义在外形式丛 $\Lambda(M^*)$ [c.f. (30.22)] 中, 其中 M 是具有由 (2.20) 给出度规 $\eta_{\mu\nu}$ 的 Minkowski 时空, 并且定向选择为 $\sigma = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$ 。我们看到, 通过运用方程 (29.42) 到 (29.47) 的结论,

$$\begin{aligned} \star\Omega = & -E^1 dy \wedge dz - E^2 dz \wedge dx - E^3 dx \wedge dy \\ & - B^1 dt \wedge dx - B^2 dt \wedge dy - B^3 dt \wedge dz . \end{aligned} \quad (36.14)$$

因此

$$\begin{aligned} d\star\Omega = & -\frac{\partial E^1}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz - \frac{\partial E^1}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz - \frac{\partial E^2}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx \\ & - \frac{\partial E^2}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx - \frac{\partial E^3}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy - \frac{\partial E^3}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy \\ & - \frac{\partial B^1}{\partial y} dy \wedge dt \wedge dx - \frac{\partial B^1}{\partial z} dz \wedge dt \wedge dx - \frac{\partial B^2}{\partial x} dx \wedge dt \wedge dy \\ & - \frac{\partial B^2}{\partial z} dz \wedge dt \wedge dy - \frac{\partial B^3}{\partial x} dx \wedge dt \wedge dz - \frac{\partial B^3}{\partial y} dy \wedge dt \wedge dz , \end{aligned} \quad (36.15)$$

并且

$$\begin{aligned} \star d \star \Omega = & - \left(\frac{\partial E^1}{\partial x} + \frac{\partial E^2}{\partial y} + \frac{\partial E^3}{\partial z} \right) dt + \left(\frac{\partial B^3}{\partial y} - \frac{\partial B^2}{\partial z} - \frac{\partial E^1}{\partial t} \right) dx \\ & + \left(\frac{\partial B^1}{\partial z} - \frac{\partial B^3}{\partial x} - \frac{\partial E^2}{\partial t} \right) dy + \left(\frac{\partial B^2}{\partial x} - \frac{\partial B^1}{\partial y} - \frac{\partial E^3}{\partial t} \right) dz . \end{aligned} \quad (36.16)$$

等价地,

$$\star d \star \Omega = -\nabla \cdot E dt + \left(\nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} \right) \cdot dr . \quad (36.17)$$

算符 $\star d \star$ 也经常被称为**余微分 (codifferential)**。现在, 我们可以在 M 上定义向量场 $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} \equiv j^0 \frac{\partial}{\partial t} + j^1 \frac{\partial}{\partial x} + j^2 \frac{\partial}{\partial y} + j^3 \frac{\partial}{\partial z} , \quad (36.18)$$

其中, $j^0 = \rho$ (电荷密度), 并且 $\mathbf{j} = (j^1, j^2, j^3)$ (电流密度)。 $\mathbf{J}$ 的对偶 1-形式是

$$J = j_0 dx^0 + j_1 dx^1 + j_2 dx^2 + j_3 dx^3 = j_0 dt + j_1 dx + j_2 dy + j_3 dz \quad (36.19)$$

其中,

$$j_0 = \eta_{00} j^0 = -j^0 = -\rho , \quad (36.20)$$

$$j_1 = \eta_{11} j^1 = j^1 , \quad j_2 = \eta_{22} j^2 = j^2 , \quad j_3 = \eta_{33} j^3 = j^3 . \quad (36.21)$$

因此

$$J = -\rho dt + \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} . \quad (36.22)$$

通过与 (36.17) 的对比, 我们看到 Maxwell 方程的第二对 (36.3) 和 (36.4) 等价于

$$\star d \star \Omega = J . \quad (36.23)$$

从 (2.18) 我们看到

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (36.24)$$

其中, $A_0 = \eta_{00} A^0 = -A^0 = -\phi$, $A_i = A^i (i = 1, 2, 3)$, 和 $\phi, A = (A^1, A^2, A^3)$ 分别是电磁标量势和向量势。由于 A_μ 不是矩阵值, $[A_\mu, A_\nu] = 0$, 并且 (36.24) 变成 (35.43) 的一个特殊情况。让我们定义 1-形式

$$\omega = A_\mu dx^\mu \quad A_\mu(x) \in C^\infty(M) . \quad (36.25)$$

则从 (36.6) 得到

$$\Omega = d\omega . \quad (36.26)$$

也有

$$\omega \wedge \omega = 0 , \quad (36.27)$$

和

$$\wedge \Omega = \Omega \wedge \omega . \quad (36.28)$$

练习 36.2 对于由 (36.25) 定义的 ω , 验证 (36.27) 和 (36.28)。

从 (35.18) 得到 Ω 可以被识别为曲率 2-形式对应于联络 1-形式 ω , 定义在一个具有结构群 $U(1)$ 的 (hermitian) 线丛上 $\pi: E \rightarrow M$, 其中每个纤维 E_x 是一个一维复向量空间。此外, 方程 $d\Omega = 0$ [(36.13)] 只是 Bianchi 恒等式 [(35.36)] 的特殊情况。因此, Maxwell 方程组在如下形式中

$$d\Omega = 0, \quad (36.29)$$

$$\star d \star \Omega = J, \quad (36.30)$$

第一个方程本质上完全是几何的, 只是 Bianchi 恒等式。事实证明, 第二个方程引导出电荷守恒的物理要求, 表述为**连续性方程 (equation of continuity)**

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (36.31)$$

实际上, 通过将 Hodge star 作用在 (36.30) 的两边, 我们得到

$$\star J = \star \star d \star \Omega = d \star \Omega \quad (36.32)$$

由于在现在情况 [c.f. (29.18)] 中 $\star \star = 1$ 。因此, 由于 $d^2 = 0$,

$$\boxed{d \star J = 0}. \quad (36.33)$$

很容易从电流密度 1-形式 J [(36.22)] 的定义来验证: (36.33) 与连续性方程 (36.31) 一样。

练习 36.3 说明 (36.33) 与 (36.31) 一样。

Maxwell 方程组 [(36.29) 和 (36.30)] 推广到非 Abel 情况给出所谓的 **Yang-Mills 方程 (Yang-Mills equations)** 如下:

$$\boxed{D\Omega = 0, \quad \star D \star \Omega = J}, \quad (36.34)$$

其中, D 是协变导数对应于一个 hermite 向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 上一个给定联络, 并且 J 是一个推广 “电流” 1-形式”。[回忆在由 (35.66) 给出一个矩阵值 2-形式上 D 的作用]。第一个方程再一次只是 Bianchi 恒等式 [(35.68)]。

Yang-Mills 方程是非线性偏微分方程来求解联络 ω , 其曲率是 Ω 。限制我们对自由场情况 ($J = 0$) 的关注, (36.34) 中的第二个方程出现为

$$D \star \Omega = 0, \quad (36.35)$$

并实际上 **Yang-Mills 作用泛函 (Yang-Mills action functional)**

$$S_{YM} = - \int_M \text{Tr}(\Omega \wedge \star \Omega), \quad (36.36)$$

假设我们可以找到一个 ω 使得 $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ 满足

$$\lambda \star \Omega = \Omega, \quad (36.37)$$

其中, λ 是一些常数。 Ω 则由于 Bianchi 恒等式 $D\Omega = 0$ 自然是 (36.35) 的一个解。通过对 (36.37) 作用 Hodge-star, 我们找到

$$\lambda \star \star \Omega = \star \Omega, \quad (36.38)$$

或者

$$\lambda \star \Omega = \lambda^2 \star \star \Omega = \Omega, \quad (36.39)$$

其中, 最后一个等号来自于 (36.37)。从 (29.18),

$$\star \star \Omega = (-1)^{2(n-2)+(n-S)/2} \Omega = \pm \Omega, \quad (36.40)$$

其中, n 是基础流形 M 的维度并且 S 是 M 上的号差 [c.f.(29.14)]。从 (36.39) 得到 $\lambda^2 = \pm 1$ 。方程 (36.37) 则分为两种情况:

$$\star \Omega = \pm \Omega, \quad (36.41)$$

$$\star \Omega = \pm i \Omega. \quad (36.42)$$

如果 $\star \Omega = \Omega$, 则曲率 Ω 被称为**自对偶 (self-dual)**; 如果 $\star \Omega = -\Omega$, 则 Ω 被称为**反自对偶 (anti-self-dual)**。Yang-Mills 方程的自对偶和反自对偶的解被称为**瞬子 (instantons)**。它们在物理中场论与 $\mathbb{R}^4$ 中阐明微分结构有着一样的重要的作用 (见 Donaldson 和 Kronheimer, 1991)。

从 (36.40), 看到如果 $T_x M$ 对于任意 $x \in M (S = n)$ 有一个 Euclid 度规, $\star \Omega = \pm \Omega$; 同时 $\star \Omega = \pm i \Omega$ 如果 $T_x M$ 有一个 Lorentz 度规 ($S = n - 2$)。等价地, (36.41) 来自于 Riemann 流形同时 (36.42) 来自于半 Riemann 流形 (具有一个赝 Riemann 度规的流形) (见 Chapter 39)。这种差异是有意的, 因为它对向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 可以具有的结构群 (规范群) 的类型施加了严格的约束。我们将只是简单在这里指明原因而不证明。由于 Ω 是 Lie 代数 ($\mathcal{G}$)-值, 所以是 $\star \Omega$ 。方程 (36.42) 则要求 $i\mathcal{G} = \mathcal{G}$ 。但是对于一个紧致 Lie 群的任意 Lie 代数不满足这一条件。另一方面, 当 (36.41) 应用时规范群没有这样的限制。由于物理中的绝大部分有趣规范群是紧致 Lie 群 [比如 $G = U(n)$], 瞬子解是物理中内部意义。

37. 主丛上的联络

为了引入一个主纤维丛的概念，我们将首先讨论这样一个丛一个具体例子，称为：一个标架丛。

定义 37.1 令 M 是一个 n -维流形。 M 上在 $x \in M$ 处的标架是一个线性同构 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ 。假设

$$\begin{aligned} f(1, 0, \dots, 0) &= e_1 \\ &\vdots \\ f(0, 0, \dots, 1) &= e_n, \end{aligned} \tag{37.1}$$

则 $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 $T_x M$ 的一组基。因此，一个标架也可以被写成形式 $(x; e_1, \dots, e_n)$ 的一个组合，其中 $x \in M$ 和 $(e_1, \dots, e_n)$ 是 $x \in M$ 处 n 个线性无关切向量。

记 M 上所有标架的集合为 P 。我们可以引入 P 上一个可微结构使得它成为一个光滑流形，而自然投影 $\pi: P \rightarrow M$ 定义为

$$\pi(x; e_1, \dots, e_n) = x \tag{37.2}$$

是一个光滑映射。三重态 (P, M, π) 则被称为 M 上标架丛。可微结构是从基流形 M 继承而来的并且构造如下。假设 $(U; x^i)$ 是 M 的一个坐标邻域。则存在 U 上一个自然标架场 $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ 。因此 U 上任意标架 $(x; e_1, \dots, e_n)$ 可以被表述

$$e_i = X_i^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_x, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{37.3}$$

其中， (X_i^k) 是一个非奇异 $n \times n$ 矩阵。则我们可以定义一个映射

$$\varphi_U: U \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \pi^{-1}(U),$$

称为一个**局域平凡 (local trivialization)**(或者局域乘积结构), 使得对于任意 $x \in U$ 和 $(X_i^k) \in GL(n, \mathbb{R})$, 有

$$\varphi_U(x, (X_i^k)) = (x; e_1, \dots, e_n), \quad (37.4)$$

其中, e_i 由 (37.3) 给出。数字 (x^i, X_i^k) 可以被视为标架 $p = (x; e_1, \dots, e_n) \in P$ 的局域坐标。因此, P 作为一个流形是 $(n + n^2)$ -维的。

令 $(V; y^i)$ 是 M 的另一个坐标使得 $U \cap V \neq \emptyset$ 。我们有坐标

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n; \quad (37.5)$$

的局域变化和下面对于自然基的变换:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}. \quad (37.6)$$

令 (y^i, Y_i^k) 是 $p = (x; e_1, \dots, e_n)$ 的局域坐标, 对应于局域平凡 $\varphi_V: V \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \pi^{-1}(V)$, 其中 $x \in U \cap V$ 。我们因此有, 从 (37.3),

$$e_i = X_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} = Y_i^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad (37.7)$$

或

$$Y_i^k = X_i^j \frac{\partial y^k}{\partial x^j}. \quad (37.8)$$

方程 (37.5) 和 (37.8) 一起构成对于 P 中任意两个坐标邻域 $\pi^{-1}(U)$ 和 $\pi^{-1}(V)$ 的坐标变换规则, 其中 $U \cap V \neq \emptyset$, 而因此 $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \emptyset$ 。这些确定了 P 上可微结构。

让我们写 $X \equiv (X_i^j) \in GL(n, \mathbb{R})$ 。对于 $x \in U$, 令

$$\varphi_{U,x}(X) \equiv \varphi_U(x, X). \quad (37.9)$$

则 $\varphi_{U,x}: G(n, \mathbb{R}) \rightarrow \pi^{-1}(x)$ 是一个同胚, 而标架丛 P 的典型纤维是 $GL(n, \mathbb{R})$ 。

如向量丛的情况一样, 我们可以确定一族**转移函数 (transition function)**

$$g_{UV}: U \cap V \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \quad (37.10)$$

由下式给出

$$g_{UV}(x) = \varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x}. \quad (37.11)$$

实际上, 通过 (37.8), $\varphi_{V,x}^{-1} \circ \varphi_{U,x}$ 恰好是 X 通过 Jacobi 矩阵 $\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^j} \right)_x \in GL(n, \mathbb{R})$ 的右平移。这些转移函数确定在基流形 M 中的重叠坐标邻域 $(U \cap V \neq \emptyset)$ 中典型纤维是如何“粘”在一起的, 并且决定了标架丛 P 的可微结构。注意到 $g_{UV}(x)$ 只取决于 $x \in M$ 并且不取决于纤维元素 $X \in GL(n, \mathbb{R})$ 。由于 Jacobi 行列式 $\partial y^k / \partial x^j$ 也只确定切丛 $T(M)$ 的转移函数, 我们称标架丛 (P, M, π) 是与切丛 $T(M)$ 相关的主丛。典型纤维和标架丛的结构群一样都是 $GL(n, \mathbb{R})$ 。这是主纤维丛的一个一般特征。也注意到: 标架丛和一般情况的主丛不是向量丛。

结构丛 $GL(n, \mathbb{R})$ 通过一个左作用 $L_g, g \in GL(n, \mathbb{R})$ 自然作用到标架丛 P 上, 其保持纤

维。 L_g 定义为

$$L_g(x; e_1, \dots, e_n) = (x; (e')_1, \dots, (e')_n), \quad (37.12)$$

其中

$$(e')_i = g_i^j e_j. \quad (37.13)$$

很明显 L_g 是纤维保持的 (一个纤维映射到它本身):

$$\pi \circ L_g = \pi : P \rightarrow M. \quad (37.14)$$

练习 37.1 证明

$$L_{g_1 g_2} = L_{g_1} \circ L_{g_2}. \quad (37.15)$$

我们现在将构造 P 上微分 1-形式 (θ^i, θ_j^k) , $i, j, k = 1, \dots, n$ 的一个集合, 其将允许我们来定义 P 上的一个联络。假设 $(U; x^i)$ 和 $(V; y^i)$ 是 M 上两个坐标邻域, 具有 P 上对应坐标系 $(x^i, X_j^k), (y^i, Y_j^k)$ 。如果 $U \cap V \neq \emptyset$ 我们有, 在 $U \cap V$ 上,

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j. \quad (37.16)$$

通过 (37.8), 另一方面,

$$(X^{-1})_i^j = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} (Y^{-1})_k^j, \quad (37.17)$$

其中, X^{-1} 和 Y^{-1} 分别是 X 和 Y 的逆矩阵。从上面两个方程得到

$$(X^{-1})_i^j dx^i = (Y^{-1})_i^j dy^i. \quad (37.18)$$

这意味着 1-形式

$$\boxed{\theta^i \equiv (X^{-1})_j^i dx^j} \quad (37.19)$$

独立于局域坐标并且是 P 上的一个 1-形式。

练习 37.2 通过运用 (37.16) 和 (37.17) 的矩阵形式验证 (37.18)。

方程的 **Pfaffian** 系统

$$\theta^i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (37.20)$$

则确定 P 上一个 n^2 -维切子空间场 $\mathcal{V}$ 。在每个点 $p \in P$, 对应的切子空间被称为**垂直子空间 (vertical subspace)**。上面的声明可以如下看到。方程 (37.19) 意味着

$$dx^i = X_j^i \theta^j. \quad (37.21)$$

因此系统 (37.20) 等价于

$$dx^i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (37.22)$$

在 P 的每个坐标邻域 $\pi^{-1}(U)$ 中。很明显, (37.22) 是完全可积的, 具有 P 中极大积分流形

由下式给出

$$x^i = \text{常数}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (37.23)$$

它正是纤维 $\pi^{-1}(x)$ 。因此垂直空间是纤维的切空间，并且是 n^2 -维的。

现在假设我们被给定 M 上一个仿射联络 D ，其是向量丛 $T(M)$ 上定义 35.1 意义中的一个联络。(对于仿射联络的进一步讨论见 Chapter 39)。对于 $e_i = X_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ ，我们有，通过 (35.3) 和 (35.10)，

$$De_i = (dX_i^k + X_i^j \omega_j^k) \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad (37.24)$$

其中， ω_j^k 是联络 D 的 1-形式的联络矩阵。将 X_i^j 视为 P 上的局域坐标，量

$$DX_i^k \equiv dX_i^k + X_i^j \omega_j^k \quad (37.25)$$

是 $\pi^{-1}(U) \subset P$ 上微分 1-形式。实际上可以说明 $(X^{-1})_k^j DX_i^k$ 定义了一个全局 1-形式。规范变换 (37.6) 下，(35.17) 中的 g 由下式给出

$$g_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}. \quad (37.26)$$

因此，通过 (35.17)，规范变换仿射联络矩阵由下式给出

$$(\omega')_i^j = d\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right) \frac{\partial y^j}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right) \omega_k^l \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^l}\right). \quad (37.27)$$

因此

$$\begin{aligned} DY_i^k &= dY_i^k + Y_i^j (\omega')_j^k \\ &= dX_i^j \frac{\partial y^k}{\partial x^j} + X_i^j d\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\right) + Y_i^j \left(d\left(\frac{\partial x^l}{\partial y^j}\right) \frac{\partial y^k}{\partial x^l} + \left(\frac{\partial x^l}{\partial y^j}\right) \omega_l^m \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^m}\right) \right). \end{aligned} \quad (37.28)$$

由于 (37.8)，上面方程等号右边的第二项可以写成

$$\begin{aligned} &X_i^h \frac{\partial y^j}{\partial x^h} \left(d\left(\frac{\partial x^l}{\partial y^j}\right) \frac{\partial y^k}{\partial x^l} + \left(\frac{\partial x^l}{\partial y^j}\right) \omega_l^m \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^m}\right) \right) \\ &= -X_i^h \frac{\partial y^j}{\partial x^h} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} d\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^l}\right) + X_i^h \frac{\partial y^j}{\partial x^h} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \omega_l^m \frac{\partial y^k}{\partial x^m} \\ &= -X_i^h \delta_h^l d\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^l}\right) + X_i^h \delta_h^l \omega_l^m \frac{\partial y^k}{\partial x^m} \\ &= -X_i^l d\left(\frac{\partial y^k}{\partial x^l}\right) + X_i^l \omega_l^m \frac{\partial y^k}{\partial x^m}. \end{aligned} \quad (37.29)$$

方程 (37.28) 则生成

$$dY_i^k + Y_i^j (\omega')_j^k = (dX_i^j + X_i^l \omega_l^j) \frac{\partial y^k}{\partial x^j}, \quad (37.30)$$

或

$$DY_i^k = DX_i^j \frac{\partial y^k}{\partial x^j}. \quad (37.31)$$

让我们现在写 (37.17) 和 (37.31) 成矩阵形式:

$$X^{-1} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot Y^{-1}, \quad (37.32)$$

$$DY = DX \cdot \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (37.33)$$

这些意味着, 在矩阵形式中,

$$DX \cdot X^{-1} = DY \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^{-1} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) Y^{-1} = DY \cdot Y^{-1}, \quad (37.34)$$

其等价于

$$(Y^{-1})_k^j DY_i^k = (X^{-1})_k^j DX_i^k. \quad (37.35)$$

因此微分 1-形式

$$\theta_i^j \equiv (X^{-1})_k^j DX_i^k = (X^{-1})_k^j (dX_i^k + X_i^l \omega_l^k) \quad (37.36)$$

独立于 P 上局域坐标的选择, 并且因此是 P 上全局 1-形式。 $n + n^2$ 1-形式 θ^i 和 θ_i^j 在 P 上任意位置是线性无关的, 并且因此构成 P 上的一个余标架场。

我们已经知道 Pfaffian 系统 $\theta^i = 0$ 确定 P 上 n^2 -维垂直子空间场 $\mathcal{V}$ 。类似地, Pfaffian 系统

$$\theta_i^j = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (37.37)$$

确定一个 n -维切子空间场 $\mathcal{H}$ 。 $\mathcal{H}(p)$ 对于每个 $p \in P$ 是 $T_p P$ 的一个子空间称为**水平子空间** (**horizontal subspace**)。垂直和水平子空间满足下面的性质。

定理 37.1 假设 (P, M, π) 是一个仿射空间 M 的标架丛 $[M]$ 定义了切丛 $T(M)$ 上的一个联络 D 。 P 上全局 1-形式 θ^i [(37.19)] 和 θ_i^j [(37.36)] 则决定了 P 上垂直和水平子空间场满足下面的性质。

1) 在每个点 $p \in P$, $T_p(P)$ 可以分解成垂直和水平子空间的直和:

$$T_p(P) = \mathcal{V}(p) \oplus \mathcal{H}(p). \quad (37.38)$$

2) $T_p(P)$ 的水平子空间投影到基流形 M 的切空间上, 即: 在投影 $\pi(p) = x \in M$ 下, 我们有诱导投影

$$\pi_*(\mathcal{H}(p)) = T_x(M). \quad (37.39)$$

3) $\mathcal{H}$ 在 P 上左平移 L_g [$g \in GL(n, \mathbb{R})$] 下是不变的:

$$(L_g)_* \mathcal{H}(p) = \mathcal{H}(L_g p). \quad (37.40)$$

证明: $\mathcal{V}(p)$ 和 $\mathcal{H}(p)$ 的维度的和是 $n^2 + n$, 其也是 $T_p(P)$ 的维度。为了证明性质 1), 我们只需要说明 $\mathcal{V}(p) \cap \mathcal{H}(p) = 0$ [$T_p(P)$ 中的零向量]。令 $X \in \mathcal{V}(p) \cap \mathcal{H}(p)$ 。从 $\mathcal{V}(p)$ 和 $\mathcal{H}(p)$ 的定义, 我们有

$$\theta^i(X) = \theta_j^i(X) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (37.41)$$

由于 $\{\theta^i, \theta_j^i\}$ 组成一个余标架场, $T_p(P)$ 中满足 (37.41) 的唯一向量是零向量。

为了证明性质 2), 我们观察到 $\pi : P \rightarrow M$ 是光滑的并且是满射。因此 $\pi_* : T_p(P) \rightarrow T_x(M)$ [$\pi(p) = x$] 是一个满射同态。由于通过垂直子空间的定义, $\pi_*(\mathcal{V}(p)) = 0$, $\pi_* : \mathcal{H}(p) \rightarrow T_x(M)$ 是一个同构。

为了证明性质 3) [或 (37.40)], 我们将说明 (1) $(L_g)_* \mathcal{H}(p) \subset \mathcal{H}(L_gp)$, 和 (2) $\mathcal{H}(L_gp) \subset (L_g)_* \mathcal{H}(p)$ 。假设 $p = (x; e_1, \dots, e_n)$ 和 $L_gp = (x; (e')_1, \dots, (e')_n)$, 其中

$$(e')_i = g_i^j e_j = g_i^j X_j^k \frac{\partial}{\partial x^k} \equiv (X')_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} . \quad (37.42)$$

因此

$$(X')_i^k = g_i^j X_j^k ,$$

这说明

$$\left((X')^{-1} \right)_i^k = (X^{-1})_i^j (g^{-1})_j^k . \quad (37.43)$$

在矩阵符号下,

$$(X')^{-1} = X^{-1} \cdot g^{-1} . \quad (37.44)$$

方程 (37.43) 也意味着

$$DX' = gDX . \quad (37.45)$$

(记住这里, $g \in GL(n, \mathbb{R})$ 不是 M 上的一个函数)。因此

$$DX' \cdot (X')^{-1} = g (DX \cdot X^{-1}) g^{-1} . \quad (37.46)$$

换句话, 通过由 (37.36) 给出的 1-形式 θ_i^j 的定义

$$\boxed{(L_g)^* \theta_i^j = g_i^k \theta_k^l (g^{-1})_l^j} . \quad (37.47)$$

假设 $\mathbb{H}' \in (L_g)_* \mathcal{H}(p)$ 。则

$$\mathbb{H}' = (L_g)_* \mathbb{H} , \quad (37.48)$$

其中, $\mathbb{H} \in \mathcal{H}(p)$ 。则

$$\langle \mathbb{H}', \theta_i^j \rangle_{L_gp} = \langle (L_g)_* \mathbb{H}, \theta_i^j \rangle_{L_gp} = \langle \mathbb{H}, (L_g)^* \theta_i^j \rangle_p = g_i^k \langle \mathbb{H}, \theta_k^l \rangle_p (g^{-1})_l^j = 0 , \quad (37.49)$$

由于 $\mathbb{H} \in \mathcal{H}(p)$ 。这意味着 $\mathbb{H}' \in \mathcal{H}(L_gp)$ 。因此得到 (1)。为了证明 (2) 假设

$$\mathbb{H}' \in \mathcal{H}(L_gp) . \quad (37.50)$$

则

$$\langle \mathbb{H}', \theta_i^j \rangle_{L_gp} = 0 . \quad (37.51)$$

但是 $\mathbb{H}'$ 必须等于 $(L_g)_* \mathbb{H}$, 对于一些 $\mathbb{H} \in T_p(P)$ 。因此

$$0 = \langle (L_g)_* \mathbb{H}, \theta_i^j \rangle_{L_gp} = \langle \mathbb{H}, (L_g)^* \theta_i^j \rangle_p = g_i^k \langle \mathbb{H}, \theta_k^l \rangle_p (g^{-1})_l^j . \quad (37.52)$$

它得到

$$\langle \mathbb{H}, \theta_k^l \rangle_p = 0, \quad (37.53)$$

这意味着 $\mathbb{H} \in \mathcal{H}(p)$ 。因此

$$\mathbb{H}' \in (L_g)_* \mathcal{H}(p). \quad (37.54)$$

这样建立了 (2)。 $\square$

我们可以转述上面过程并声明如下。如果一个 n -维切子空间 $\mathcal{H}(p)$ 在标架丛的每个点 $p \in P$ 处给出是光滑的, 使得子空间的这个场满足定理 37.1 的条件 (1),(2) 和 (3), 则它确定标架丛 P 上的一个联络。这个联络定义在 P 上则对应基流形 M 上一个仿射联络 D , 使得 $\mathcal{H}$ 是依赖于联络 D 的标架丛 P 的水平子空间的场。

我们现在准备好推广标架丛到主丛的概念。

定义 37.2 一个主纤维丛 (*principal fiber bundle*) 包括一个流形 P (总空间 (*total space*)), 一个 Lie 群 G , 一个基流形 M , 和一个投影映射 $\pi: P \rightarrow M$ 使得下面条件保持。

- (1) 对于每个 $g \in G$, 存在一个左作用微分同胚 $L_g: P \rightarrow P$ [写做 $L_g(p) = gp$] 使得
 - (a) 对于任意 $g_1, g_2 \in G$ 和 $p \in P$, $(g_1 g_2)p = g_1(g_2 p)$;
 - (b) 对于任意 $p \in P$, $ep = p$, 其中 e 是 G 中的恒元;
 - (c) 如果对于一些 $p \in P$ 有 $gp = p$ 则 $g = e$, 即: 不存在 L_g 的不动点。回忆定义 6.6, 我们称 G 自由地作用在 P 的左侧上。
- (2) M 是流形 P 的商空间依赖于由 P 上 G 的群作用定义的等价关系; 而投影 $\pi: P \rightarrow M$ 是光滑的且满射 (见 Figure 37.1):

$$\pi^{-1}(\pi(p)) = \{gp \mid g \in G\}. \quad (37.55)$$

对于 $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ 被称为 x 上的纤维 (*fiber*)。从条件 (1), 对于每个 $p \in P$, 存在一个微分同胚 $G \rightarrow \pi^{-1}(x)$ 由 $g \mapsto gp$ 给出。因此所有纤维 $\pi^{-1}(x)$ 微分同胚于 G 。然而这个映射取决于 p , 并且不需要导出定义了 $\pi^{-1}(x)$ 的 G 的一个规范辨识。因此在任意纤维 $\pi^{-1}(x)$ 上不存在自然群结构。

- (3) P 是局域平凡的: 对于每个 $x \in M$, 存在一个 x 的邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U)$ 微分同胚于 $U \times G$ 。换句话说, 存在一个微分同胚 $T_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ 由下式给出

$$T_U(p) = (\pi(p), \varphi_U(p)), \quad (37.56)$$

其中, 映射 $\varphi_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow G$ 有性质

$$\varphi_U(gp) = g\varphi_U(p). \quad (37.57)$$

映射 T_U 被称为一个局域平凡 (*local trivialization*), 或者一个规范的选择 (*choice of gauge*) (物理中)。

定义 37.3 假设 T_U 和 T_V 是定义了群 G 一个主丛 $\pi: P \rightarrow M$ 的两个局域平凡, 并且 $U \cap V \neq \emptyset$ 。从 T_U 到 T_V 的转移函数 (*transition function*) $G_{UV}: U \cap V \rightarrow G$ 对于

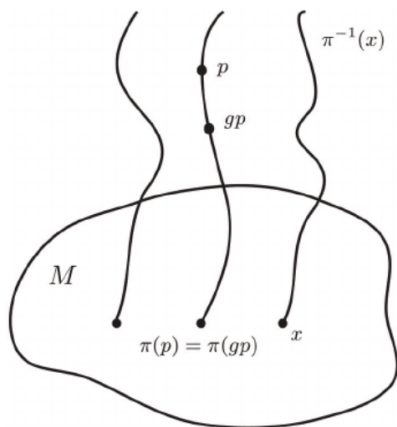


Figure 37.1

$x \in U \cap V$ 定义为

$$g_{UV}(x) \equiv \varphi_V^{-1}(p) \cdot \varphi_U(p), \quad (37.58)$$

其中, p 是 $\pi^{-1}(x)$ 中任意元素。

从 (37.57) 得到 g_{UV} 独立于 p 。实际上

$$\varphi_V^{-1}(gp)\varphi_U(gp) = (g\varphi_V(p))^{-1}g\varphi_U(p) = \varphi_V^{-1}(p)g^{-1}g\varphi_U(p) = \varphi_V^{-1}(p)\varphi_U(p). \quad (37.59)$$

转移函数满足下面的性质:

$$(1) \text{ 对于任意 } x \in U, \quad g_{UU}(x) = e; \quad (37.60)$$

$$(2) \text{ 对于任意 } x \in U \cap V, \quad g_{VU}(x) = (g_{UV}(x))^{-1}; \quad (37.61)$$

$$(3) \text{ 对于任意 } x \in U \cap V \cap W, \quad g_{UV}(x)g_{VW}(x)g_{WU}(x) = e. \quad (37.62)$$

练习 37.3 证明上面三个性质。

转移函数是胶水函数, 其给出了不同局域平凡 $U \times G, V \times G, W \times G, \dots$ 如何可以粘在一起来组成总空间 P 的说明。在向量丛的情况中, 他们确定了一个主纤维丛的结构。

定义 37.4 一个主丛被称为是平凡 (*trivial*) 的如果存在一个全局平凡 (*global trivialization*), 即: 一个微分同胚 $T_M: P \rightarrow M \times G$ 。换句话说, P 是全局的一个乘积。

定义 37.5 一个主纤维丛 $\pi: P \rightarrow M$ 的一个局域截面 (*local section*) 是一个映射 $\sigma: U \rightarrow P$, 其中 U 是 M 的一个邻域, 使得对于任意 $x \in U$, 有 $\pi \circ \sigma(x) = x$ 。一个全局截面 (*global section*) 是一个映射 $\sigma: M \rightarrow P$ 使得对于任意 $x \in M$, 有 $\pi \circ \sigma(x) = x$ 。

定理 37.2 一个主纤维丛是平凡的当且仅当它有一个全局截面。

证明: 足够说明在局域 (全局) 截面和局域 (全局) 平凡之间存在一个自然一一对应。我们将对于局域情况说明这一点; 全局情况完全由相同的讨论得到。令 $\sigma: U \rightarrow P$ 是一个局域截面。对应于此, 我们可以定义一个局域平凡 $T_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ 如下。任意 $p \in \pi^{-1}(U)$ 可以被

写成 $p = g\sigma(\pi(p))$, 对于一些独一无二的 $g \in G$ 。则集合

$$T_U(p) = (\pi(p), g) . \quad (37.63)$$

反过来, 给定一个局域平凡 T_U , 我们可以定义对应局域截面为

$$\sigma(x) = T_U^{-1}(x, e) . \quad (37.64)$$

定理从定义 37.4 中给出的平凡的定义得到。 $\square$

让我们现在引入一个主纤维丛上联络的关键定义。三个表面上看起来较为不同的标准定义将会被给出, 然后说明它们等价。我们开始于一个基于前面讨论过对于标架丛特殊情况的水平和垂直子空间的定义。

定义 37.6 定义了群 G 的一个主丛 $\pi : P \rightarrow M$ 上的一个联络 (*A connection on a principal bundle*) 是对切空间 P ($n = \dim M$) 的一个 n -维子空间 $\mathcal{H}(p) \subset T_p P$ 的每个 $p \in P$ 的一个光滑分配使得

$$T_p P = \mathcal{H}(p) \oplus \mathcal{V}(p) , \quad (37.65)$$

其中, $\mathcal{V}(p)$ 是子空间

$$\mathcal{V}(p) \equiv \{\mathbb{X} \in T_p P \mid \pi_*(\mathbb{X}) = 0\} . \quad (37.66)$$

子空间域 $\mathcal{H}$ 也被要求在左作用 $L_g(g \in G)$ 下是不变的: 对于任意 $g \in G$ 有

$$(L_g)_* \mathcal{H}(p) = \mathcal{H}(gp) , \quad (37.67)$$

$\mathcal{V}(p)$ 和 $\mathcal{H}(p)$ 分别被称为 $T_p P$ 的垂直子空间 (*vertical subspace*) 和水平子空间 (*horizontal subspace*)。

练习 37.4 说明从 (37.65) 和 (37.66) 得到在基流形 M 上水平子空间 $\mathcal{H}(p)$ 投影到切空间 $T_{\pi(p)} M$ 上:

$$\pi_* \mathcal{H}(p) = T_{\pi(p)} M . \quad (37.68)$$

回忆在主丛的情况中, 水平子空间被认做为 P 上矩阵-值 1-形式 $[(37.36) \text{ 的 } \theta_i^j]$ 的积分流形 (或被其湮灭的空间)。这些 1-形式将进一步显示来满足性质 (37.47)。因此, 我们被引导对主丛上的联络进行下面的替代定义。

定义 37.7 假设 $\mathcal{G}$ 是 Lie 群 G 的 Lie 代数, 其是一个主纤维丛 $\pi : P \rightarrow M$ 的一个结构群。令 $A \in \mathcal{G}$, 并且 $A^\#$ 称为一个基本场 (*fundamental field*), 是 P 上的向量场定义为

$$A^\#(p) \equiv \frac{d}{dt}(\exp(At)p)_{t=0} . \quad (37.69)$$

主丛上 $\pi : P \rightarrow M$ 的一个联络 (*connection*) 是 P 上一个 $\mathcal{G}$ -值 1-形式 ω 满足下面两个

性质:

$$(1) \quad \omega(A^\#(p)) = A \quad (37.70)$$

$$(2) \quad (L_g)^*(\omega) = \mathcal{A}d(g)(\omega), \quad (37.71)$$

其中, $\mathcal{A}d(g): \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ 是由 (34.81) 给出的 G 的伴随表示。我们称联络 1-形式 ω 是一个左平移下的伴随-不变。

练习 37.5 说明上面定义中的条件 (2) 可以重新表述为:

对于任意 $g \in G$, $p \in P$ 和 $\mathbb{X}_p \in T_p P$, 有

$$\omega_{gp}((L_g)_* \mathbb{X}_p) = (\mathcal{A}d(g))(\omega_p(\mathbb{X}_p)), \quad (37.72)$$

练习 37.6 说明对于矩阵群 G 的情况:

对于任意 $g \in G$ 和 $A \in \mathcal{G}$ (G 的 Lie 代数), 有

$$\mathcal{A}d(g)(A) = gAg^{-1}, \quad (37.73)$$

(37.73) 的等号右边被解释为矩阵乘法。提示: 写

$$\mathcal{A}d(g)(A) = \frac{d}{dt}(ad_g \exp(At))_{t=0}.$$

我们现在来到一个主丛上的联络的最终定义, 在基流形 M 上以 G -值 1-形式的形式, 而不是总空间 P 上的 1-形式。这个定义在物理应用中最合适。

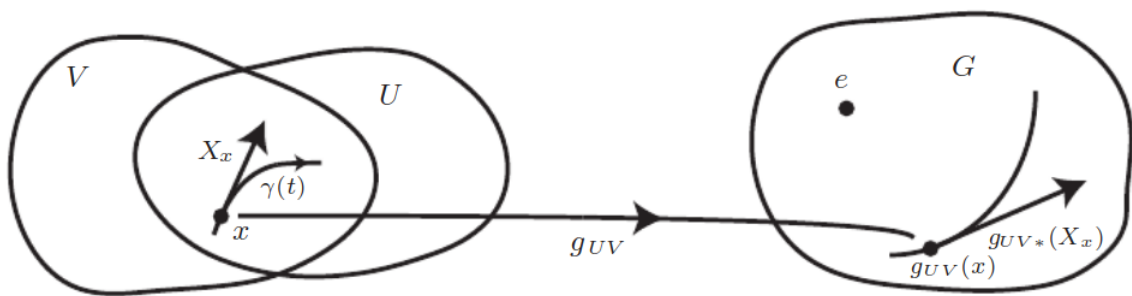


Figure 37.2

定义 37.8 一个主纤维丛 $\pi: P \rightarrow M$ 上的一个**联络 (connection)** 分配给每个局域平凡 $T_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ (物理学文献中规范的一种选择) 一个 U 上 G -值 1-形式 ω_U , 其对于规范变换 (在不同的局域平凡之间) 满足下面的规则: 对于任意 $X_x \in T_x M$ 和 $x \in U \cap V$, 有

$$\omega_V(X_x) = \left(R_{g_{UV}^{-1}(x)} \right)_* ((g_{UV})_*(X_x)) + \mathcal{A}d(g_{UV}(x))(\omega_U(X_x)). \quad (37.74)$$

上面的公式需要进行展开以便理解其重要性。令 $\gamma(t)$ 是经过 $x \in U \cap V$ 的一条曲线使得

$\gamma(0) = x$ 和 $\gamma'(0) = X_x$ (见 Figure 37.2)。然后, 在矩阵群 G 的情况中,

$$\begin{aligned} \left(R_{g_{UV}^{-1}(x)}\right)_* ((g_{UV})_*(X_x)) &= \left(R_{g_{UV}^{-1}(x)}\right)_* \frac{d}{dt} (g_{UV}(\gamma(t)))_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (g_{UV}(\gamma(t))g_{UV}^{-1}(x))_{t=0} = (dg_{UV})(X_x) g_{UV}^{-1}(x), \end{aligned} \quad (37.75)$$

其中, dg_{UV} 被理解是 $U \cap V$ 上一个矩阵-值 1-形式。也有, 通过 (37.73),

$$\mathcal{A}d(g_{UV}(x))(\omega_U(X_x)) = g_{UV}(x)\omega_U(X_x)g_{UV}^{-1}(x). \quad (37.76)$$

因此, 在矩阵群 G 的情况中, 我们可以将**规范变换规则 (gauge transformation rule)**(37.74) 写为

$$\boxed{\omega_V = (dg_{UV})g_{UV}^{-1} + g_{UV}\omega_U g_{UV}^{-1}}. \quad (37.77)$$

它和 (35.17) 的形式完全一样。

让我们现在来说明一个主丛上的联络的三个定义 (定义 37.6, 定义 37.7, 定义 37.8) 是等价的。

假设给我们一个 $\mathcal{G}$ -值联络 1-形式 ω , 如定义 37.7 中确定的。我们需要找到满足定义 37.6 条件的 P 上水平子空间的一个场。我们将其定义为由 ω 湮灭的子空间场:

$$\mathcal{H}(p) = \{\mathbb{X} \in T_p P \mid \omega_p(\mathbb{X}) = 0\}. \quad (37.78)$$

通过 (37.70), 在任意 $\mathbb{Y} \in \mathcal{V}(p)$ (垂直子空间) 上 ω 的作用等于 A , 对于一些 $A \in \mathcal{G}, A \neq 0$ 。因此 $\mathcal{V}(p) \cap \mathcal{H}(p) = \emptyset$ 和 $T_p P = \mathcal{V}(p) \oplus \mathcal{H}(p)$ 。同样通过 (37.72) 和 (37.78), $\mathbb{X} \in \mathcal{H}(p)$ 表明 $\mathbb{X} \in (L_g)_* \mathcal{H}(p)$, 而反之亦然, 因此 $(L_g)_* \mathcal{H}(p) = \mathcal{H}(gp)$ 。

现在假设给出的一个光滑 $\mathcal{H}(p)$ 满足定义 37.6 中确定性质。令 $\mathbb{X} \in \mathcal{H}(p)$ 和 $A^\# \in \mathcal{V}(p)$ 是由 (37.69) 给出的。我们定义一个 $\mathcal{G}$ -值 1-形式 ω 由下式给出

$$\omega(A^\# + \mathbb{X}) = A. \quad (37.79)$$

设定 $\mathbb{X} = 0$, 我们有 $\omega(A^\#) = A$ 。这也表明对于 $\mathbb{X} \in \mathcal{H}(p)$, 有 $\omega(\mathbb{X}) = 0$ 。为了完成证明: ω 如 (37.79) 定义的实际上是一个联络 1-形式, 我们需要说明它满足 (37.72)。任意 $\mathbb{X} \in T_p P$ 可以被写成 $\mathbb{X} = a\mathbb{H} + b\mathbb{V}$, 其中 $\mathbb{H} \in \mathcal{H}(p)$ 和 $\mathbb{V} \in \mathcal{V}(p)$ 。所以我们只需要分别对任意水平和垂直向量验证 (37.72)。假设 $\mathbb{H} \in \mathcal{H}(p)$, 则 $\omega(\mathbb{H}) = 0$ 。由于 $\mathcal{H}(p)$ 是 L_g -不变 [(37.67)], $\omega((L_g)_* \mathbb{H}) = 0$; 而对于 $\mathbb{H} \in \mathcal{H}(p)$ 验证了 (37.72)。考虑对于一些 $A \in \mathcal{G}$, 有 $\mathbb{V} = A^\#(p) \in \mathcal{V}(p)$ [回忆 (37.69)]

中 $A^\#$ 的定义]. 我们有

$$\begin{aligned}
 & \omega_{gp}((L_g)_* A^\#(p)) \\
 &= \omega_{gp} \left((L_g)_* \frac{d}{dt} (\exp(At)p)_{t=0} \right) \quad [\text{通过(37.69)}] \\
 &= \omega_{gp} \left(\frac{d}{dt} (g \exp(At)p)_{t=0} \right) \\
 &= \omega_{gp} \left(\frac{d}{dt} (g \exp(At)g^{-1} \cdot gp)_{t=0} \right) \quad (37.80) \\
 &= \omega_{gp} \left(\frac{d}{dt} (ad_g(\exp(At))gp)_{t=0} \right) \quad [\text{通过(34.80)}] \\
 &= \omega_{gp} \left(\frac{d}{dt} (\exp(Ad(g)At)gp)_{t=0} \right) \\
 &= \omega_{gp}((Ad(g)A)^\# gp) \quad [\text{通过(37.69)}] \\
 &= Ad(g)A = (Ad(g))(\omega(A^\#(p)))
 \end{aligned}$$

因此对于一个垂直向量也证明了 (37.72)。这样就完成了定义 37.6 和 37.7 是等价的论证。我们现在换到定义 37.7 和 37.8 的等价性。

令 ω 是一个如定义 37.7 中确定的 $\mathcal{G}$ -值联络 1-形式, 而 $T_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ 是一个局域平凡。有一个由 $\sigma_U(x) = T_U^{-1}(x, e)$ [c.f. (37.64)] 给出的局域截面 $\sigma_U : U \rightarrow P$ 与 T_U 关联。我们在 U 上定义一个 $\mathcal{G}$ -值 1-形式 ω_U 为

$$\omega_U = \sigma_U^* \omega, \quad (37.81)$$

并且声明它是定义 37.8 意义中的联络 1-形式。为了验证这一声明, 我们不得不说明规范变换 $\omega_U \rightarrow \omega_V = \sigma_V^* \omega$ 是由 (37.74) 给出的。假设 T_U 是由 $T_U(p) = (\pi(p), \varphi_U(p))$, 则对于 $x = \pi(p)$,

$$\begin{aligned}
 T_U(\varphi_U(p)\sigma_U(x)) &= (x, \varphi_U(\varphi_U(p)\sigma_U(x))) = (x, \varphi_U(p)\varphi_U(\sigma_U(x))) \\
 &= (x, \varphi_U(p)e) = (x, \varphi_U(p)) = T_U(p).
 \end{aligned} \quad (37.82)$$

因此

$$p = \varphi_U(p)\sigma_U(x). \quad (37.83)$$

类似地,

$$p = \varphi_V(p)\sigma_V(x), \quad (37.84)$$

其中, $x \in U \cap V$ 。上面两个方程意味着

$$\sigma_V(x) = \varphi_V^{-1}(p)\varphi_U(p)\sigma_U(x) = g_{UV}(x)\sigma_U(x), \quad (37.85)$$

其中, 最后一个等号来自于 (37.58)。现在令 $X_x \in T_x M$, 并且假设 $\gamma(t)$ 是 M 中一个曲线且

满足 $x = \gamma(0)$ 和 $X_x = \gamma'(0)$ 。我们可以计算提升 (lift) $(\sigma_V)_*(X_x)$ 如下:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_V)_*(X_x) &= \frac{d}{dt} (\sigma_V(\gamma(t)))_{t=0} = \frac{d}{dt} (g_{UV}(\gamma(t))\sigma_U(\gamma(t)))_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} (g_{UV}(x)\sigma_U(\gamma(t)))_{t=0} + \frac{d}{dt} (g_{UV}(\gamma(t))\sigma_U(x))_{t=0} \\
 &= (L_{g_{UV}(x)})_*(\sigma_U)_*(X_x) + \frac{d}{dt} (g_{UV}(\gamma(t))g_{UV}^{-1}(x)\sigma_V(x))_{t=0} \\
 &= (L_{g_{UV}(x)})_*(\sigma_U)_*(X_x) + \left(\left(R_{g_{UV}^{-1}(x)} \right)_* (g_{UV})_*(X_x) \right)_{\sigma_V(x)}^\# .
 \end{aligned} \tag{37.86}$$

则在 P 上给定的联络 1-形式 ω 可以被应用到上面方程的等号右边来得到

$$\begin{aligned}
 \omega_V(X_x) &= ((\sigma_V)^*\omega)(X_x) = \omega((\sigma_V)_*(X_x)) \\
 &= \omega \left(\left(\left(R_{g_{UV}^{-1}(x)} \right)_* (g_{UV})_*(X_x) \right)_{\sigma_V(x)}^\# \right) + \omega((L_{g_{UV}(x)})_*(\sigma_U)_*(X_x)) \\
 &= \left(R_{g_{UV}^{-1}(x)} \right)_* ((g_{UV})_*(X_x) + \mathcal{A}d(g_{UV}(x))(\omega((\sigma_U)_*(X_x))) \\
 &= \left(R_{g_{UV}^{-1}(x)} \right)_* ((g_{UV})_*(X_x) + \mathcal{A}d(g_{UV}(x))(\omega_U(X_x))) .
 \end{aligned} \tag{37.87}$$

它和 (37.74) 是一样的。我们因此已经证明了 $\omega_U = (\sigma_U)^*\omega$ 是 M 上期望的局域联络 1-形式。

相反的, 假设给出我们局域 1-形式 ω_U, ω_V , 等满足 (37.74) 的规范变换规则。令 σ_U 是与局域平凡 T_U [c.f. (37.64)] 关联的局域截面。对于 $x \in U, p = \sigma_U(x), X_x \in T_x M$ 和 $A \in \mathcal{G}$, 我们定义映射 $\omega^U : T_P P \rightarrow \mathcal{G}$ 通过

$$\omega^U((\sigma_U)_* X_x + A^\#) = \omega_U(X_x) + A . \tag{37.88a}$$

定义在所有 $\pi^{-1}(U)$ 上的一个 G -值 1-形式可以从它的映射通过展开它的区域如下来构造: 对于 $\mathbb{X}_{gp} \in T_{gp} P$, 有

$$\omega^U(\mathbb{X}_{gp}) = (\mathcal{A}d(g)) \omega^U((L_{g^{-1}})_* \mathbb{X}_{gp}) . \tag{37.88b}$$

$\pi^{-1}(U)$ 上的因而产生的 1-形式, 也记为 ω^U , 满足 (37.72) 当限制在丛 $\pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U$, 并且因此是定义 37.7 意义上这个限制丛上的联络 1-形式。假设 T_V 是另一个局域平凡, 其中 $U \cap V \neq \emptyset$ 。我们可以在 $\pi^{-1}(V)$ 上简单定义一个局域联络 1-形式 ω^V 。我们的任务是来说明在 $\pi^{-1}(U \cap V)$ 上 $\omega^U = \omega^V$, 以使得局域 1-形式 ω^U, ω^V 等在定义 37.7 的意义上共同定义一个全局 1-形式 ω 。足够说明在 $\sigma_V(U \cap V)$ 上有 $\omega^U = \omega^V$, 那么通过借助于 (37.88b) 它们在所有 $\pi^{-1}(U \cap V)$ 上将都符合。由于 $\omega^U(A^\#) = A = \omega^V(A^\#)$, 其足够来检验对于 $x \in U \cap V$ 和 $X_x \in T_x M$, 有 $\omega^U((\sigma_V)_* X_x) = \omega^V((\sigma_V)_* X_x)$ 。通过 (37.88a), $\omega^V((\sigma_V)_* X_x) = \omega_V(X_x)$, 当 [回忆 (37.86)]

$$\begin{aligned}
 \omega^U((\sigma_V)_* X_x) &= \omega^U \left(\left(\left(R_{g_{UV}^{-1}(x)} \right)_* (g_{UV})_*(X_x) \right)_{\sigma_V(x)}^\# + (L_{g_{UV}(x)})_*(\sigma_U)_*(X_x) \right) \\
 &= \left(R_{g_{UV}^{-1}(x)} \right)_* (g_{UV})_*(X_x) + \mathcal{A}d(g_{UV}(x))(\omega_U(X_x)) = \omega_V(X_x) ,
 \end{aligned} \tag{37.89}$$

其中最后一个等号从 (37.74) 得到。因此, 我们已经在 P 上从局域联络 $\omega^U, \omega^V, \dots$ 构造了一个全局联络 1-形式 ω , 反过来其局域联络是从 M 上局域 1-形式 $\omega_U, \omega_V, \dots$ 构造的。更进一

步, 很明显有 $\omega_U = (\sigma_U)^* \omega$, $\omega_V = (\sigma_V)^* \omega$ 等。这样就完成了定义 37.7 和定义 37.8 等价的验证。

在物理文献中, 主纤维丛上的局域联络 1-形式 ω_U 被称为**规范势 (gauge potentials)**。

如果没有下面的基本定理 (将只表述而不证明), 上面的发展将毫无意义。

定理 37.3 任意主纤维丛容许一个联络。

对应于一个主纤维丛上一个联络, 总空间 P 上一个曲率 2-形式可以被定义。这个曲率将被说明与之前定义的一个向量丛上曲率 2-形式 [c.f. (35.18)] 密切相关。首先, 我们给一个初步定义。

定义 37.9 令 $\varphi \in \Lambda^i(M, \mathcal{G})$ 和 $\psi \in \Lambda^j(M, \mathcal{G})$ 分别是一个度数为 i 和 j 流形 M 上 $\mathcal{G}$ -值的外微分形式。 φ 和 ψ 的**括号乘积 (braket product)**, 其是 $\Lambda^{i+j}(M, \mathcal{G})$ 中的一个元素, 并且记为 $[\varphi, \psi]_{\mathcal{G}}$, 被定义成其作用在 $(X_1, \dots, X_{i+j})$ 上, 其中 $X_1, \dots, X_{i+j} \in \Gamma(TM)$ 是 M 上一个任意向量场, 通过

$$[\varphi, \psi]_{\mathcal{G}}(X_1, \dots, X_{i+j}) \equiv \frac{1}{(i+j)!} \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) [\varphi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}), \psi(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)})], \quad (37.90)$$

其中, $\sigma \in S(i+j)$ 是对称群 $S(i+j)$ 中一个排列, 求和遍历所有这样的排列, 并且 (37.90) 的等号右边的括号 $[\ , \]$ 是 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 的 Lie 括号。

作为一个例子, 假设 φ 和 ψ 都是 $\mathcal{G}$ -值 1-形式。则

$$[\varphi, \psi]_{\mathcal{G}}(X_1, X_2) = \frac{1}{2} [\varphi(X_1), \psi(X_2)] - \frac{1}{2} [\varphi(X_2), \psi(X_1)], \quad (37.91)$$

特别地, 如果 ω 是一个 $\mathcal{G}$ -值 1-形式, 则

$$[\omega, \omega]_{\mathcal{G}}(X_1, X_2) = \frac{1}{2} ([\omega(X_1), \omega(X_2)] - [\omega(X_2), \omega(X_1)]) = [\omega(X_1), \omega(X_2)]. \quad (37.92)$$

练习 37.7 假设 $\varphi \in \Lambda^i(M, \mathcal{G})$ 和 $\psi \in \Lambda^j(M, \mathcal{G})$ 。令 $\{E_1, \dots, E_f\}$ 是 $\mathcal{G}$ 的一组基。说明存在唯一 $\mathbb{R}$ -值 i -形式 φ^{α} 和 j -形式 ψ^{β} , $\alpha, \beta = 1, \dots, f$, 使得

$$\varphi = \varphi^{\alpha} \otimes E_{\alpha}, \quad (37.93)$$

$$\psi = \psi^{\beta} \otimes E_{\beta}. \quad (37.94)$$

进一步说明

$$[\varphi, \psi]_{\mathcal{G}} = (\varphi^{\alpha} \wedge \psi^{\beta}) \otimes [E_{\alpha}, E_{\beta}] = c_{\alpha\beta}^{\gamma} (\varphi^{\alpha} \wedge \psi^{\beta}) \otimes E_{\gamma}, \quad (37.95)$$

其中, $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 是依赖于基 $\{E_1, \dots, E_f\}$ 的 $\mathcal{G}$ 的结构常数。

练习 37.8 运用外积的反对易规则 [(28.5)] 和一个 Lie 代数的 Jacobi 恒等式 [(4.26)] 来说明

$$(1) \quad [\psi, \varphi]_{\mathcal{G}} = -(-1)^{ij} [\varphi, \psi]_{\mathcal{G}}, \quad (37.96a)$$

$$(2) \quad (-1)^{ik} [[\varphi, \psi], \rho]_{\mathcal{G}} + (-1)^{kj} [[\rho, \varphi], \psi]_{\mathcal{G}} + (-1)^{ji} [[\psi, \rho], \varphi]_{\mathcal{G}} = 0, \quad (37.96b)$$

其中 $\varphi \in \Lambda^i(M, \mathcal{G})$, $\psi \in \Lambda^j(M, \mathcal{G})$ 和 $\rho \in \Lambda^k(M, \mathcal{G})$ 。

上面两个方程说明 M 上 $\mathcal{G}$ -值微分形式的代数是一个 **分次 Lie 代数 (graded Lie algebra)**。

练习 37.9 运用练习 37.8 的结果来说明：如果 $\varphi \in \Lambda^i(M, \mathcal{G})$ 和 $\psi \in \Lambda^j(M, \mathcal{G})$ ，则

$$d[\varphi, \psi]_{\mathcal{G}} = [d\varphi, \psi]_{\mathcal{G}} + (-1)^i [\varphi, d\psi]_{\mathcal{G}}. \quad (37.97)$$

一个主丛上的曲率现在可以用两步定义。

定义 37.10 假设一个主丛 $\pi: P \rightarrow M$ 上给定的一个联络，定义了群 G 。则任意 $\mathbb{X} \in T_p P$ 可以被唯一写成一个垂直向量和一个水平向量的和： $\mathbb{X} = \mathbb{V} + \mathbb{H}$ ，使得如果 ω 是对应于该联络的 $\mathcal{G}$ -值 1-形式 $\pi_* \mathbb{V} = 0$ 和 $\omega(\mathbb{H}) = 0$ 。假设 $\varphi \in \Lambda^i(P, \mathcal{G})$ ， φ 的 **外协变导数 (exterior covariant derivative)**，写做 $D\varphi \in \Lambda^{i+1}(P, \mathcal{G})$ ，由下式给出

$$D\varphi \equiv (d\varphi)^H, \quad (37.98)$$

其中

$$(d\varphi)^H(\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_{i+1}) \equiv d\varphi(\mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_{i+1}), \quad (37.99)$$

并且 $\mathbb{H}_1, \dots, \mathbb{H}_{i+1}$ 分别是 $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_{i+1} \in T_p P$ 的水平向量。

定义 37.11 给定一个主丛 $\pi: P \rightarrow M$ 上一个 $\mathcal{G}$ -值联络 1-形式 $\omega \in \Lambda^1(P, \mathcal{G})$ ， $\mathcal{G}$ -值曲率 2-形式 Ω 由下式给出

$$\boxed{\Omega \equiv D\omega}, \quad (37.100)$$

其中， D 是对应于给定联络的外协变导数。

为了使这个相当抽象的定义更有意义，我们将尝试分几个步骤投影 (37.100) 到基流形 M 使得它类似于一个向量丛上矩阵-值曲率 Ω 的更熟悉的定义 [c.f (35.69)]。我们将需要下面三个引理 (第一个引理只表述而不证明)。

引理 37.1 假设 $\pi: P \rightarrow M$ 是定义了群 G 的一个主丛，而 ω 是 P 上一个联络 1-形式。给定 M 上一个光滑向量场 X ， P 上存在一个唯一光滑向量场 $\mathbb{X}^H$ 使得对于任意 $p \in P$ ，有 $\omega(\mathbb{X}^H) = 0$ 和 $\pi_*(\mathbb{X}_p^H) = X_{\pi(p)}$ 。场 $\mathbb{X}^H$ ，称为 X 的 **水平提升 (horizontal lift)** 必然是左不变：

$$\text{对于任意 } g \in G, \quad (L_g)_* \mathbb{X}_p^H = \mathbb{X}_{gp}^H. \quad (37.101)$$

引理 37.2 如果 $A, B \in \mathcal{G}$, 则我们在 P 上基本场直接有下面的关系:

$$[A, B]^\# = [A^\#, B^\#] \equiv A^\# B^\# - B^\# A^\# , \quad (37.102)$$

其中在第一个等号的左边, $[,]$ 意思是 $\mathcal{G}$ 的 Lie 括号。换句话说, 映射 $\# : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{V}(p)$ (p 处的垂直子空间) 保持 $\mathcal{G}$ 的 Lie 代数结构。

证明: 对于 P 上基本场的映射, $\# : \mathcal{G} \rightarrow \Gamma(TP)$, 由 $\#(A) \equiv A^\#$ 给出 [c.f. (37.69)], 也可以定义如下。对于任意 $p \in P$, 通过 $\#_p(g) = gp, g \in G$ 定义映射 $\#_p : G \rightarrow P$ 。则由于 $\#p(e) = p$, 对于 $A \in T_e G$, 有

$$A^\#(p) = \#(A) = \frac{d}{dt}(\exp(tA)p)_{t=0} = (\#_p)_*(A) . \quad (37.103)$$

因此, $(\#_p)_* : \mathcal{G} \rightarrow T_p P$ 是一个从 $\mathcal{G}$ 到 $T_p P$ 的线性映射。现在通过定理 34.5 和 Lie 导数的定义 [定义 34.8 或方程 (34.60)], 有

$$[A^\#, B^\#]_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ B^\# - (L_{g(t)})_* B^\# \}_p , \quad (37.104)$$

其中, $g(t) \equiv \exp(tA)$ 和 $L_{g(t)}$ (P 上 $g(t) \in G$ 的左作用) 是 P 上由 $A^\#$ 生成的微分同胚的单参数群。我们有

$$((L_{g(t)})_* B^\#)_p = ((L_{g(t)})_*) B^\#_{L_{g^{-1}(t)} \cdot p} = ((L_{g(t)})_*) (\#_{L_{g^{-1}(t)} \cdot p})(B) , \quad (37.105)$$

其中, 第二个等号从 (37.103) 得到。另一方面, 对于任意 $g' \in G$, 有

$$\begin{aligned} (L_{g(t)} \circ \#_{L_{g^{-1}(t)} \cdot p})(g') &= g(t)g'g^{-1}(t) \cdot p = (ad_{g(t)}g') \cdot p \\ &= \#_p(ad_{g(t)}g') = (\#_p \circ ad_{g(t)})(g') , \end{aligned} \quad (37.106)$$

因此, 对于 $B \in T_e G$, 有

$$((L_{g(t)})_*) (\#_{L_{g^{-1}(t)} \cdot p})(B) = (\#_p)_* Ad(g(t))(B) , \quad (37.107)$$

其中, [c.f. (34.81)],

$$Ad(g(t)) \equiv (ad_{g(t)})_* .$$

方程 (37.104) 则意味着

$$\begin{aligned} [A^\#, B^\#]_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ (\#_p)_* B - (\#_p)_* Ad(g(t))B \} \\ &= (\#_p)_* \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{ B - Ad(g(t))B \} \right) . \end{aligned} \quad (37.108)$$

我们观察到, 由于对于任意 $g' \in G$, 有

$$ad_{g(t)}g' = g(t)g'g^{-1}(t) = L_{g(t)}R_{g^{-1}(t)}g' ,$$

对于 $B \in T_e G \sim \mathcal{G}$, 有

$$\mathcal{A}d(g(t))B = (L_{g(t)})_* (R_{g^{-1}(t)})_* B. \quad (37.109)$$

如果我们将 Lie 代数 $\mathcal{G}$ 看做 G 上右不变向量场的集合, 使得 $(R_{g^{-1}(t)})_* B = B$ [c.f. (34.17)], 则

$$\mathcal{A}d(g(t))B = (L_{g(t)})_* B. \quad (37.110)$$

这个结果和 (37.108) 则最终意味着

$$[A^\#, B^\#]_p = (\#_p)_* \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{B - (L_{g(t)})_* B\} \right) = (\#_p)_* ([A, B]) = [A, B]^\#(p), \quad (37.111)$$

其中, 第二个等号从定理 34.5 中得到, 而第三个等号来自于 (37.103)。□

引理 37.3 假设 $\mathbb{X}^M$ 是基流形 M 上一个向量场 X 的水平提升, 并且 $A \in \mathcal{G}$ 。则

$$[A^\#, \mathbb{X}^H] = 0. \quad (37.112)$$

证明: 令 $g(t) = \exp(tA) \in G$ 。则 [c.f. (37.101)], $\mathbb{X}^H$ 在

$$(L_{g(t)})_* \mathbb{X}^H = \mathbb{X}^H, \quad (37.113)$$

下是不变的。因此, 通过定理 34.5 和 Lie 导数的定义 [(34.60)], 有

$$[A^\#, \mathbb{X}^H] = \frac{d}{dt} ((L_{g(t)})_* \mathbb{X}^H)_{t=0} = \frac{d}{dt} \mathbb{X}^H = 0. \quad (37.114)$$

最后一个等号来自于事实: $\mathbb{X}^H$ 独立于 t 。□

有了上面三个引理, 我们现在可以证明下面重要定理, 其结果也称为一个主丛上联络 1-形式的**结构方程 (structure equation)**。

定理 37.4 假设 ω 是一个主纤维丛上一个 $\mathcal{G}$ -值联络 1-形式。则

$$D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_{\mathcal{G}}, \quad (37.115)$$

或者在曲率 2-形式 Ω 的定义 [(37.100)] 的观点下看, 有

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_{\mathcal{G}}. \quad (37.116)$$

在 (37.115) 中, $D\omega$ 是 $\mathcal{G}$ -值 1-形式 ω 的外协变导数。在上面两个方程中, 等号右边的括号 $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}}$ 是由定义 37.9 给出的 $\mathcal{G}$ -值形式的括号。

证明: 通过 (37.92) 和外协变导数的定义 [(37.98) 和 (37.99)], 我们需要说明: 对于任意两个 $X_1, X_2 \in \Gamma(TP)$, X_1^H, X_2^H 分别是 X_1 和 X_2 的水平向量场, 有

$$d\omega(X_1^H, X_2^H) = d\omega(X_1, X_2) + \frac{1}{2}[\omega(X_1), \omega(X_2)]. \quad (37.117)$$

通过 $d\omega$ 的线性性, 我们只需要对于下面三种情况说明 (37.117)

- (1) X_1 和 X_2 都是水平的。在这种情况下, $X_1 = X_1^H$ 并且 $X_2 = X_2^H$ 。也有通过水平子空间的定义, 给定一个联络 1-形式 ω [(37.78)], $\omega(X_1) = \omega(X_1^H) = 0$ 并且 $\omega(X_2) = \omega(X_2^H) = 0$ 。得到了方程 (37.117)。
- (2) X_1 和 X_2 都是垂直的。我们写 $X_1 = X_1^V$ 和 $X_2 = X_2^V$ 。则对于每个 $p \in P$, 存在 $A, B \in \mathcal{G}$ 使得

$$(X_1)_p = A^\#(p), \quad (X_2)_p = B^\#(p). \quad (37.118)$$

回忆 (28.29) 有

$$d\omega(X_1, X_2) = \frac{1}{2} \langle X_1 \wedge X_2, d\omega \rangle. \quad (37.119)$$

我们将运用 (30.39) 来估计 $\langle X_1 \wedge X_2, d\omega \rangle$, 其是约定 (28.28) 的一个结果。我们则有

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, X_2) &= d\omega(X_1^V, X_2^V) = d\omega(A^\#, B^\#) = \frac{1}{2} \langle A^\# \wedge B^\#, d\omega \rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ A^\#(\omega(B^\#)) - B^\#(\omega(A^\#)) - \omega([A^\#, B^\#]) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ A^\#(B) - B^\#(A) - \omega([A, B]^\#) \} \\ &= -\frac{1}{2} \omega([A, B]^\#) = -\frac{1}{2} [A, B] = -\frac{1}{2} [\omega(A^\#), \omega(B^\#)] \\ &= -\frac{1}{2} [\omega(X_1^V), \omega(X_2^V)] = -\frac{1}{2} [\omega(X_1), \omega(X_2)], \end{aligned} \quad (37.120)$$

其中, 在第六个等号处我们已经运用了事实: $A^\#(B) = B^\#(A) = 0$ (由于 $A, B \in \mathcal{G}$ 是常数), 并且也是引理 37.2 的结论。因此, (37.117) 的等号右边消失了。很明显, 由于在这种情况下 $X_1^H = X_2^H = 0$, 等号左边也消失。

- (3) X_1 是垂直的, 而 X_2 是水平的。通过引理 37.1, 我们可以假设 X_2 是水平的且是基流形 M 上一些向量场 X 的水平提升。假设对于 $A \in \mathcal{G}$ 也有 $X_1 = A^\#$ 。则有

$$d\omega(X_1^H, X_2^H) = d\omega(0, X_2) = 0. \quad (37.121)$$

另一方面,

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, X_2) &= d\omega(A^\#, X_2^H) = \frac{1}{2} \langle A^\# \wedge X_2^H, d\omega \rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ A^\#(\omega(X_2^H)) - X_2^H(\omega(A^\#)) - \omega([A^\#, X_2^H]) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ A^\#(0) - X_2^H(A) - \omega([A^\#, X_2^H]) \} = 0, \end{aligned} \quad (37.122)$$

其中, 最后一个等号处我们运用了事实 $[A^\#, X_2^H] = 0$, 其是从引理 37.3 得到。也很明显有

$$[\omega(X_1), \omega(X_2)] = [\omega(A^\#), \omega(X_2^H)] = [A, 0] = 0. \quad (37.123)$$

因此, 再一次 (37.117) 的两边都消失。

□

下面是一个主丛上曲率 2-形式 Ω 的一些重要且有用的事实。

定理 37.5 — Bianchi 恒等式 (Bianchi identity). 假设 ω 是一个主丛上一个 G -值联络 1-形式。则我们有 [与 (35.68) 比较]

$$D\Omega = 0. \quad (37.124)$$

事实上, [与 (35.67) 不计较但是注意区别] 有

$$d\Omega = [\Omega, \omega]_G, \quad (37.125)$$

其中, 括号 $[\cdot, \cdot]_G$ 是定义 37.9 意义中的。

证明: 从 (37.99), 对于任意 $X, Y, Z \in T_p P$, 有

$$(D\Omega)(X, Y, Z) = (d\Omega)(X^H, Y^H, Z^H), \quad (37.126)$$

其中, X^H, Y^H 和 Z^H 分别是 X, Y 和 Z 的水平向量, 对应于给定联络 1-形式 ω 。但是由于 $\omega(X^H) = \omega(Y^H) = 0$, (37.124) 从 (37.125) 得到。我们将如下验证后者。对于 Ω 通过结构方程 (37.116), 有

$$\begin{aligned} d\Omega &= d\left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_G\right) = \frac{1}{2}d([\omega, \omega]_G) = \frac{1}{2}([d\omega, \omega]_G - [\omega, d\omega]_G) \\ &= [d\omega, \omega]_G = \left[d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_G, \omega\right] = [\Omega, \omega]_G, \end{aligned} \quad (37.127)$$

其中, 第二个等号来自于 $d^2\omega = 0$, 第三个等号来自于 (37.97), 第四个等号来自于 (37.95), 而第五个等号来自于事实 $[[\omega, \omega], \omega]_G = 0$, 其是 (37.96) 的结果。□

定理 37.6 对于任意 $g \in G$, 有

$$(L_g)^* \Omega = \text{Ad}(g)\Omega. \quad (37.128)$$

证明: 括号乘积的定义 [(37.90)] 意味着 $[\varphi, \psi]_G$ 在一个拉回 f^* 下是保持的, f 是一个映射 $f: P \rightarrow P$, P 是一个流形, 形式 φ 和 ψ 在其上定义:

$$f^*[\varphi, \psi]_G = [f^*\varphi, f^*\psi]_G.$$

因此, 从 (37.71) 得到

$$\begin{aligned} (L_g)^* \Omega &= (L_g)^* \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_G\right) \\ &= d((L_g)^* \omega) + \frac{1}{2}[(L_g)^* \omega, (L_g)^* \omega]_G \\ &= d(\text{Ad}(g)(\omega)) + \frac{1}{2}[\text{Ad}(g)\omega, \text{Ad}(g)\omega]_G \\ &= \text{Ad}(g) \left(d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_G\right) \\ &= \text{Ad}(g)\Omega. \end{aligned} \quad (37.129)$$

□

为了与 Chapter 35 中给出的 Ω 的公式联系, 其都是为向量丛上联络建立的 (并且因此其中结构群 G 是矩阵群), 我们将运用定义 37.8 来验证 ω 和 Ω 通过它们定义在基流形 M 上等价局域 $\mathcal{G}$ -值形式。回忆对于一个局域平凡 $T_U: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ 和对应由 $\sigma_U(x) = T_U^{-1}(x, e)$ 给出的局域截面 $\sigma_U: U \rightarrow P$, 定义在 U 上的局域联络 1-形式是 $\omega_U = (\sigma_U)^* \omega$ 。类似地, 我们可以在 U 上定义局域曲率 2-形式:

$$\Omega_U \equiv (\sigma_U)^* \Omega. \quad (37.130)$$

很容易看出 Ω_U 和 ω_U 满足与 Ω 和 ω 之间相同的关系:

$$\Omega_U = d\omega_U + \frac{1}{2} [\omega_U, \omega_U]_{\mathcal{G}}, \quad (37.131)$$

其中, $\mathcal{G}$ -值形式 Ω_U 和 ω_U 是基流形 M 上的形式, 而 d 是 M 上外导数。括号乘积依旧是定义 37.9 意义上的定义。实际上, 由于 d 与拉回 $(\sigma_U)^*$ 对易而括号乘积在拉回下保持, 我们有

$$\begin{aligned} \Omega_U &= (\sigma_U)^* \Omega = (\sigma_U)^* \left(d\omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega]_{\mathcal{G}} \right) \\ &= d((\sigma_U)^* \omega) + \frac{1}{2} [(\sigma_U)^* \omega, (\sigma_U)^* \omega]_{\mathcal{G}} = d\omega_U + \frac{1}{2} [\omega_U, \omega_U]_{\mathcal{G}}. \end{aligned} \quad (37.132)$$

我们现在将考虑一个主丛是一个矩阵群的重要特殊情况, 其结构群 G 是一个矩阵群。这恰好也是物理应用中最感兴趣的例子, 人们在物理应用中讨论的规范场理论中的规范群 (举例, 电动力学中的 $U(1)$, 标准模型中对于其它相互作用的 $SU(n)$)。

我们从 (34.44) 回忆: 如果 $A, B \in \mathcal{G}$, 其中 $\mathcal{G}$ 是一个矩阵群的 Lie 代数, 有

$$[A, B] = BA - AB, \quad (37.133)$$

其中, 等号左边是 Lie 括号而等号右边包括矩阵乘积。现在假设 $\varphi \in \Lambda^i(M, \mathcal{G})$ 且 $\psi \in \Lambda^j(M, \mathcal{G})$ 。通过定义 37.9 [(37.90)], 我们有: 对于任意 $X_1, \dots, X_{i+j} \in \Gamma(TM)$, 有

$$\begin{aligned} & [\varphi, \psi]_{\mathcal{G}}(X_1, \dots, X_{i+j}) \\ &= \frac{1}{(i+j)!} \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) [\varphi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}), \psi(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)})] \\ &= \frac{1}{(i+j)!} \left\{ \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) \psi(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)}) \varphi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) \varphi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(i)}) \psi(X_{\sigma(i+1)}, \dots, X_{\sigma(i+j)}) \right\} \\ &= \frac{1}{(i+j)!} \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) (-1)^{ij} \psi(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(j)}) \varphi(X_{\sigma(j+1)}, \dots, X_{\sigma(j+i)}) \\ &\quad - (\varphi \wedge \psi)(X_1, \dots, X_{i+j}) \\ &= ((-1)^{ij} \psi \wedge \varphi - \varphi \wedge \psi)(X_1, \dots, X_{i+j}) \end{aligned} \quad (37.134)$$

其中在第四个等号处, 我们已经运用了由 (28.3) 给出的一个一般的楔积的定义。因此, 对于

矩阵-值形式, 有

$$[\varphi, \psi]_{\mathcal{G}} = -(\varphi \wedge \psi - (-1)^{ij} \psi \wedge \varphi), \quad (37.135)$$

其中在等号的右边, 矩阵乘法是通过楔积。注意到, 对于矩阵-值形式, 有

$$[\varphi, \psi]_{\mathcal{G}} = -[\varphi, \psi]_{\text{gr}}, \quad (37.136)$$

其中, $[\cdot, \cdot]_{\text{gr}}$, 矩阵-值形式的阶化对易算符是由 (35.65) 定义的。因为

$$\frac{1}{2}[\omega, \omega]_{\mathcal{G}} = -\frac{1}{2}(\omega \wedge \omega - (-1)\omega \wedge \omega) = -\omega \wedge \omega,$$

结构方程 (37.115) 由下式给出

$$D\omega = d\omega - \omega \wedge \omega, \quad (37.137)$$

或

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega, \quad (37.138)$$

对于矩阵-值联络 1-形式和矩阵-值曲率 2-形式。类似地,

$$\Omega_U = d\omega_U - \omega_U \wedge \omega_U. \quad (37.139)$$

Bianchi 恒等式 $d\Omega = [\Omega, \omega]$ [(37.125)] 可以被写成

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega. \quad (37.140)$$

上面三个方程的形式与 Chapter 35 中给出对于向量丛 (在其中结构群是矩阵群) 的情况有完全相同的形式。



到目前为止引入不同种类的 Lie 代数乘积, 特别是在本章和 Chapter 44, 可能是一些混乱的来源。我们在这里总结本书中使用的符号供参考。

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] &= \text{一般情况下的 Lie 括号}, \\ [\cdot, \cdot]_{\text{gr}} &= \text{矩阵-值形式的阶化对易算符 [(35.65)]}, \\ [\cdot, \cdot]_{\mathcal{G}} &= \mathcal{G}\text{-值形式的 Lie 括号 [(37.90)]}. \end{aligned}$$

因此, 对于向量场 X, Y , 有

$$[X, Y] = XY - YX; \quad X, Y \in \Gamma(TM).$$

对于矩阵 Lie 代数元素 A, B , 有

$$[A, B] = -(AB - BA); \quad A, B \in \mathcal{GL}(n).$$

对于矩阵-值形式 $\varphi \in \Lambda^i(M, G)$, $\psi \in \Lambda^j(M, \mathcal{G})$, 有

$$[\varphi, \psi]_{\text{gr}} = \varphi \wedge \psi - (-1)^{ij} \psi \wedge \varphi, \quad [\varphi, \psi]_{\mathcal{G}} = -[\varphi, \psi]_{\text{gr}}.$$

从现在开始,我们将定义了 Lie 群 G 的一个主纤维丛参考为一个主 G -丛 (principal G -bundle)。很自然地将一个主 G -丛与向量丛联系起来。为了阐明这个想法,让我们回忆在本章开头引入标架丛 (P, M, π) (作为一个主 G -丛)。我们已经提到了 (P, M, π) 与切丛 TM (其是一个向量丛) 相关联。这个关系显式处理如下。选一个标架 $(x; e_1, \dots, e_n) = p \in P$, 其原点在 $x = \pi(p)$ 。一个 x 处的标架改变通过一个左作用 $L_{g,g} \in GL(n, \mathbb{R})$ [由 (37.12) 和 (37.13)] 来影响:

$$L_g(x; e_1, \dots, e_n) = (x; (e')_1, \dots, (e')_n) \equiv gp = p', \quad (e')_i = g_i^j e_j.$$

假设一个切向量 $X \in T_x M$ 由通过 $X = X^i e_i$ 给成 e_i 表达。在 $T_x M$ 上定义 G 的一个右作用, 写作 Xg , 为

$$X \rightarrow X' = Xg = (X')^i e_i, \quad (37.141)$$

其中

$$(X')^i = X^j g_j^i.$$

考虑一个函数 $f: \pi^{-1}(x) \rightarrow T_x M$ 使得: 对于一个任意标架 $p \in \pi^{-1}(x)$ 和 $g \in GL(n, \mathbb{R})$, 有

$$f(p)g^{-1} = f(gp). \quad (37.142)$$

换句话说, 如果

$$f(p) = X = X^i e_i, \quad (37.143)$$

和

$$(e')_i = g_i^j e_j, \quad \left[\text{或 } e_i = (g^{-1})_i^j (e')_j \right], \quad (37.144)$$

则

$$f(gp) = X' = (X')^i e_i, \quad (37.145)$$

其中

$$(X')^i = X^j (g^{-1})_j^i = (Xg^{-1})^i; \quad (37.146)$$

因此

$$(X')^i (e')_i = X^j (g^{-1})_j^i g_i^k e_k = X^j e_j,$$

其与 (1.11) 的方程是一样的, 并且确定 $T_x M$ 中一个独一无二的向量 (由 Figure 37.3 中双箭头表示)。函数 f 引出一个等价关系 $\sim$ 在乘积集合 $\mathbb{R}^n \times P$ 中, 由下式给出

$$(X, p) \sim (Xg^{-1}, gp). \quad (37.147)$$

商集 $\mathbb{R}^n \times P / \sim$ [在 (37.147) 的等价性之下, 对于任意 $g \in GL(n, \mathbb{R})$] 被称为与 $GL(n, \mathbb{R})$ 的定义表示相关的标架丛的关联丛。我们可以记这个向量丛为 $\pi: \mathbb{R}^n \times_G P \rightarrow M$ 。它同构于切丛 TM , 因为在关联丛中 $x \in M$ 之上的纤维 $\pi^{-1}(x)$ 同构于切空间 $T_x M$ 。

我们现在可以替换标架丛为一个一般主 G -丛, 而 $T_x M$ 替换为一个 G 可以在上面被表示的向量空间 $\mathbb{V}$ 。一个一般关联丛的记号则可以如下定义。

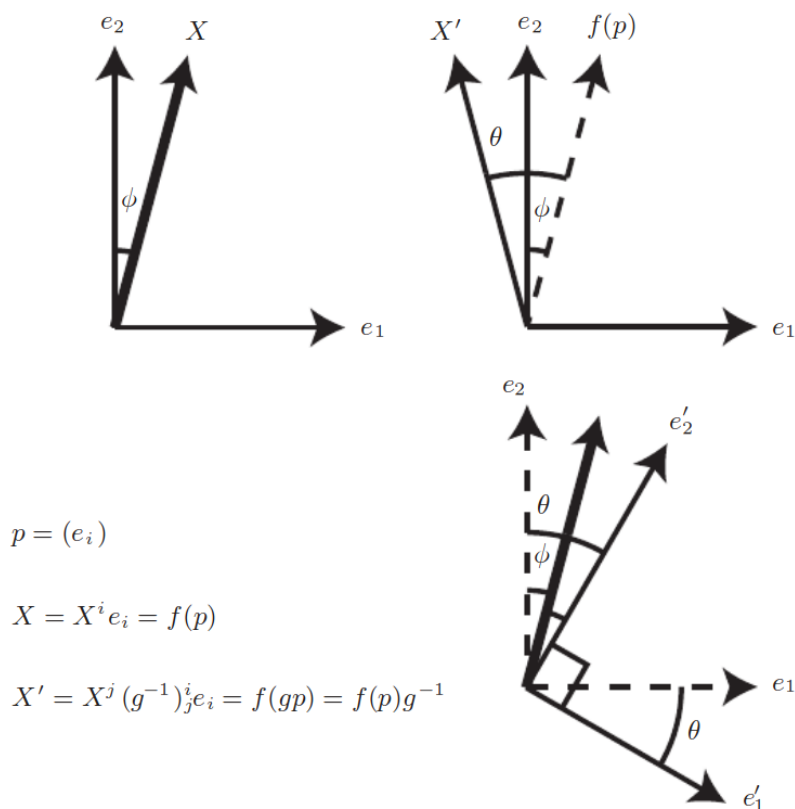


Figure 37.3

定义 37.12 令 $r: G \rightarrow GL(\mathbb{V})$ 是 G 的一个表示, 其中 $GL(\mathbb{V})$ 是向量空间 $\mathbb{V}$ 的一般线性群。令 $\pi: P \rightarrow M$ 是一个主 G -丛。定义在 $\mathbb{V} \times P$ 上 G 的一个左作用 (并且 $\mathbb{V}$ 上 G 的一个对应右作用) 为

$$g(v, p) \equiv (r(g^{-1})v, gp) \equiv (vg^{-1}, gp), \quad (37.148)$$

[与 (37.142) 比较] 并且记 G 下 (v, p) 的轨道为 $[v, p]$ 。记所有这样的轨道的集合为 $\mathbb{V} \times_G P$ 。定义一个投影 $\pi_{\mathbb{V}}: \mathbb{V} \times_G P \rightarrow M$ 为

$$\pi_{\mathbb{V}}([v, p]) = \pi(p). \quad (37.149)$$

则 $\pi_{\mathbb{V}}: \mathbb{V} \times_G P \rightarrow M$ 是一个典型纤维同构于 $\mathbb{V}$ 的向量丛; 它被称为与 G 的群表示 r 相关的主 G -丛 P 的**关联丛** (*associated bundle*)。

练习 37.10 说明由 (37.148) 给出的左作用是自由的。[回忆定义 6.6]。

练习 37.11 说明关联丛 $\pi_{\mathbb{V}}: \mathbb{V} \times_G P \rightarrow M$ 的维度是 $\dim(M) + \dim(\mathbb{V})$ 。

练习 37.12 说明关联丛中 $\pi(p)$ 上纤维中任意两个点有形式 $(v_1, p), (v_2, p)$ 的独一无二表示,

其中 $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$; 并且可以定义向量加法

$$[v_1, p] + [v_2, p] \equiv [v_1 + v_2, p] . \quad (37.150)$$

关联丛是物理中所谓**波函数 (wave function)** 的合适数学设定。考虑一个主 G -丛 $\pi : P \rightarrow M$ 和一个关联丛 $\pi_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \times a \rightarrow M$ 依赖于一个表示 $r : G \rightarrow GL(\mathbb{V})$ 。波函数恰好是 (37.142) 的函数 f 的推广。更具体的说, 它们是函数 $\psi : P \rightarrow \mathbb{V}$ 使得: 对于任意 $p \in P$, 有

$$\boxed{\text{对于任意 } g \in G, \quad \psi(gp) = r(g^{-1}) \psi(p)} . \quad (37.151)$$

在物理中习惯于运用 P 的局域平凡 (或者等价地, 局域截面) 投影 ψ 从 P 到基流形 M 。在物理中, 这些被称为**规范的局域选择 (local choices of gauge)**。令 $\sigma_U : M \rightarrow P$ 是 $\pi : P \rightarrow M$ 上一个居于截面。则

$$\psi_U \equiv (\sigma_U)^* \psi , \quad (37.152)$$

定义在坐标领域 $(U; x^i)$ 中, 被称为一个**局域波函数 (local wave function)**。另一方面, 它也可以被考虑成是关联丛上的一个局域截面:

$$\psi_U(x) = [\psi(\sigma_U(x)), \sigma_U(x)] .$$

假设 $(W; y^i)$ 是另一个定义了局域截面 σ_W 坐标邻域, 且 $U \cap W \neq \emptyset$ 。令 $z \in U \cap W$ 。则通

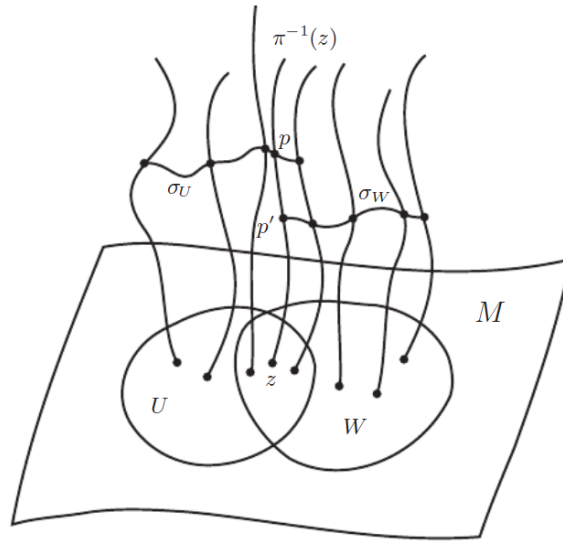


Figure 37.4

过 (37.63), (37.64) 和 (37.58) (也见 Figure 37.4)

$$p' = \sigma_W(z) = e^{-1} \cdot \varphi_U(p') \cdot p = (\varphi_W(p'))^{-1} \varphi_U(p') \cdot p = g_{UW}(z) \cdot \sigma_U(z) , \quad (37.153)$$

其中, $g_{UW}(z)$ 是定义在 (37.58) 中的转移函数 [回忆 $g_{UW}(x)$ 独立于 $p \in \pi^{-1}(x)$]. 其得到

$$\begin{aligned}\psi_W(z) &= ((\sigma_W)^* \psi)(z) = \psi(\sigma_W(z)) = \psi(g_{UW}(z) \cdot \sigma_U(z)) \\ &= r\left((g_{UW}(z))^{-1}\right) \psi(\sigma_U(z)) = r\left((g_{UW}(z))^{-1}\right) \psi_U(z).\end{aligned}\quad (37.154)$$

因此, 在规范的一个局域改变下一个波函数的变换 $\psi_U \rightarrow \psi_W$ 的规则是

$$\boxed{\psi_W(z) = r\left((g_{UW}(z))^{-1}\right) \psi_U(z) \equiv \psi_U(z) \cdot (g_{UW}(z))^{-1}}. \quad (37.155)$$

物理学家将一个主 G -丛上局域联络 1-形式 ω_U 看成**规范势 (gauge potential)**。电磁势再次提供一个最基本的示例。考虑 Minkowski 空间 (M, η) 上一个主 $U(1)$ -丛 $\pi: P \rightarrow M$, 其中 η 是 Lorentz 度规。由于 $U(1) = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, 它的 Lie 代数是 $\mathcal{U}(1) = \{i\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, 令一个联络 ω 被给为局域 1-形式 $\omega_U = (\sigma_U)^* \omega$ 的一个集合 (定义 37.8)。则 **向量势 1-形式 (vector potential one-form)** $A^{(U)} \in \Lambda^1(U; \mathcal{U}(1)) = \Lambda^1(U; \mathbb{R})$ 由下式给出

$$\omega_U \equiv -iA^{(U)} = -iA_\mu^{(U)} dx^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (37.156)$$

其中, 实函数 $A_\mu^{(U)}(x)$ 是电动力学的**向量势 (vector potential)**。[对于么正群 $U(n)$, Lie 代数元素是反 Hermite 矩阵。插入因子 $(-i)$ 来使得 A_μ 是 Hermite 的, 对应于物理可观测量]。在规范 $\sigma_U \rightarrow \sigma_V$ 的一个局域变化下, 从 (37.77) 得到对于 $A^{(U)}$ 规范变换规则由下式给出

$$A^{(V)} = i(dg_{UV})g_{UV}^{-1} + g_{UV}A^{(U)}g_{UV}^{-1}. \quad (37.157)$$

等价地,

$$\boxed{A_\mu^{(V)} = i\partial_\mu(g_{UV})g_{UV}^{-1} + g_{UV}A_\mu^{(U)}g_{UV}^{-1}}. \quad (37.158)$$

在现在情况中写 $g_{UV}(x) = e^{-i\theta(x)}$, 上方方程假设如下的类似形式:

$$(A')_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\theta(x). \quad (37.159)$$

非 Abel 矩阵群 G 的一般情况中, 矩阵-值**场强度 (field strength)** $F_{\mu\nu}(x)$ 通过 (35.43) 与规范势 A_μ 相关:

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu]. \quad (37.160)$$

其分量张量一样变换根据 [回忆 (35.25)]

$$\boxed{F_{\mu\nu}^{(V)} = g_{UV}F_{\mu\nu}^{(U)}g_{UV}^{-1}}. \quad (37.161)$$

由于 $U(1)$ 是 Abel 的, 电磁场强度 $F_{\mu\nu}$ 用向量势 A_μ 给出为

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (\text{电磁场}), \quad (37.162)$$

[它与 (2.18) 相同], 并且在规范变换下是不变的 [通过 (37.161)]。

让我们最后来考虑一个局域波函数的方向协变导数的规范变换:

$$D_\mu \psi \equiv D_{\partial_\mu} \psi = \partial_\mu \psi - i\psi A_\mu, \quad (37.163)$$

其中, 我们并没有为了简洁而指定坐标邻域, 且 $(\psi A_\mu)^i = \psi^j (A_\mu)_j^i$, 在一个局域规范变换 [c.f. (37.158) 和 (37.155)]

$$A_\mu \rightarrow (A')_\mu = i(\partial_\mu g)g^{-1} + gA_\mu g^{-1}, \quad (37.164)$$

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi g^{-1}, \quad (37.165)$$

下, 我们有

$$\begin{aligned} D_\mu \psi &\rightarrow (D_\mu \psi)' = \partial_\mu \psi' - i\psi' (A'_\mu)' \\ &= \partial_\mu (\psi g^{-1}) - i\psi g^{-1} (i(\partial_\mu g)g^{-1} + gA_\mu g^{-1}) \\ &= (\partial_\mu \psi)g^{-1} + \psi \partial_\mu (g^{-1}) + \psi g^{-1} (\partial_\mu g)g^{-1} - i\psi A_\mu g^{-1}. \end{aligned} \quad (37.166)$$

由于 $gg^{-1} = 1$, 得到 $(\partial_\mu g)g^{-1} = -g\partial_\mu (g^{-1})$, 这意味着

$$\psi g^{-1} (\partial_\mu g)g^{-1} = -\psi g^{-1} \cdot g\partial_\mu (g^{-1}) = -\psi \partial_\mu (g^{-1}).$$

因此

$$(D_\mu \psi)' = (\partial_\mu \psi - i\psi A_\mu) \cdot g^{-1} = (D_\mu \psi) \cdot g^{-1}, \quad (37.167)$$

确定事实 $D_\mu \psi$ 在一个规范变化下作为一个波函数而变换。因此, 一个波函数的方向协变导数也是一个波函数。

在物理文献中, 协变导数 $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$, 考虑成一个算子, 有时候也参考为一个**最小耦合 (minimal coupling)**。举例而言, 描述一个带电粒子 (电荷为 e , 质量为 m) 和一个经典电磁场相耦合的 Schrödinger 方程是

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} D_\mu^2 + V(x) \right) \psi(x) = E\psi(x), \quad (37.168)$$

其中

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - i\frac{e}{\hbar c} A_\mu(x), \quad (37.169)$$

和 $V(x)$ 是一些保守场引起的势能。很明显, (37.168) 在由 (37.164) 和 (37.165) 给出的规范变换下是不变的。这个事实是物理学中规范不变性的最重要原则的一个特殊表现。

38. 磁单极子和分子动力学

在本章中，我们将在非相对论性的量子力学中给出一些例子，这些例子说明了纤维丛的几何在涉及规范不变性的物理理论中所起的重要作用。我们将从所谓的 $U(1)$ 磁单极开始。

根据 Coulomb 定律，由**磁单极 (magnetic monopole)** 强度 (磁荷) M 产生的磁场 B 为

$$\mathbf{B} = \frac{M\mathbf{r}}{r^3}, \quad (38.1)$$

其中， $\mathbf{r}$ 是从单极子位置到场点的径向量。根据 Gauss 定律，很明显一个球面 S^2 (中心在磁单极) 上磁流 Φ 是

$$\Phi = \oint_{S^2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi M. \quad (38.2)$$

另一方面，我们可以使用 Stokes 定理来得到

$$\Phi = \oint_{S^2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S) \cdot d\mathbf{l} = 4\pi M. \quad (38.3)$$

在上面方程中，我们已经将球面分成两个半球，北极 (N) 和南极 (S)，并分别对它们应用 Stokes 定理 (见 Figure 38.1)。 $\mathbf{A}_N$ 和 $\mathbf{A}_S$ 分别是北半球和南半球的向量势。方程 (38.3) 表明，沿着赤道， $\mathbf{A}_N \neq \mathbf{A}_S$ ；否则，整个空间上的总流 Φ 将会消失。因此， $\mathbf{A}$ 不可能通过整个球上用相同的表达式给出。

问题的解决依靠可微流形的基本概念，正如我们所看到的，它可以看成是 Euclid 空间的部分光滑粘在一起。在这种情况下，我们想象 2-球面 S^2 被两个坐标卡覆盖，每个坐标卡同胚于 Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个开区域，一个覆盖北半球，而另一个覆盖南半球 (见 Figure 38.2)。

球面上的每个点则被给定一对坐标 (x^1, x^2) ，这样在重叠上，例如赤道，根据一个坐标卡的坐标是对应是根据另一个坐标卡的坐标的可微函数。这种设定为 2-球面提供了一个可微结构，并使其是一个二维可微流形。向量势 $\mathbf{A}$ 由两个不同表达给出，一个仅在北半球有效，另一个在尽在南半球有效。我们将看到，在重叠 (作为赤道) 上，这两个表达与通过对于一个主

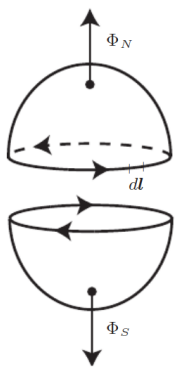


Figure 38.1

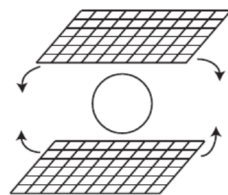


Figure 38.2

G -丛上的一个联络的规范变换规则 (37.159) 精确地关联起来, 其中 G 是 Abel 的。

实际上, 我们有

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{A}_S + \nabla f, \quad (38.4)$$

其中, f 是赤道上的一个函数。 $\mathbf{A}_N$ 和 $\mathbf{A}_S$ 由所谓磁单极的吴-杨势 (Wu-Yang potential) 给出:

$$\mathbf{A}_N(\mathbf{r}) = \frac{M(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \hat{e}_\varphi, \quad (38.5)$$

$$\mathbf{A}_S(\mathbf{r}) = -\frac{M(1 + \cos \theta)}{r \sin \theta} \hat{e}_\varphi, \quad (38.6)$$

其中, (r, θ, φ) 是一般的球坐标。我们注意到 $\mathbf{A}_N$ [如 (38.5) 给出] 实际上除了在 $\theta = \pi$ 处的整个球面上是有效的, 而 $\mathbf{A}_S$ [如 (38.6) 给出] 在 $\theta = 0$ 处的其它地方是有效的。这两个奇点的

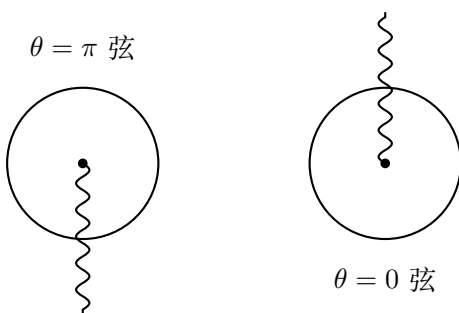


Figure 38.3

区域 (见 Figure 38.3) 在物理学文献中称为 Dirac 弦。因此, 我们还可以用两个坐标卡形象化地来覆盖 2-球面如 Figure 38.4 中展示的, 其中重叠区域是除了在北极点和南极点 (Dirac 弦与球面相交的两个点) 的其它地方。容易从 (38.5) 和 (38.6) 得到, 运用普通向量微积分, 即:

$$\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S = \frac{2M}{r \sin \theta} \hat{e}_\varphi = \nabla(2M\varphi), \quad (38.7)$$

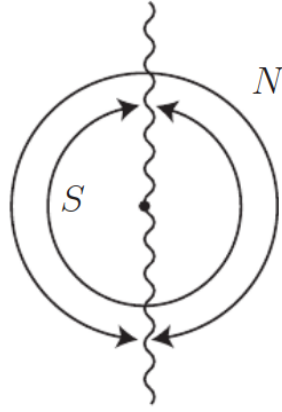


Figure 38.4

其为 (38.4) 给出的形式。因此, (38.3) 中围绕赤道的线积分可以如下估计:

$$\begin{aligned}
 \oint (\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S) \cdot d\mathbf{l} &= \oint \nabla(2M\varphi) \cdot d\mathbf{l} \\
 &= 2M \oint \frac{1}{r \sin \theta} \hat{e}_\varphi \cdot d\mathbf{l} \\
 &= 2M \int_0^{2\pi} \frac{\hat{e}_\varphi \cdot (r \sin \theta d\varphi) \hat{e}_\varphi}{r \sin \theta} \\
 &= 4\pi M .
 \end{aligned} \tag{38.8}$$

这验证了 (38.3)。

练习 38.1 说明 Wu-Yang 势也可以表达成 Cartesian 分量为

$$A_N^x = -\frac{My}{r(r+z)}, \quad A_N^y = \frac{Mx}{r(r+z)}, \quad A_N^z = 0, \tag{38.9}$$

$$A_S^x = \frac{My}{r(r-z)}, \quad A_S^y = -\frac{Mx}{r(r-z)}, \quad A_S^z = 0. \tag{38.10}$$

有了这些表达式, 直接验证:

$$\nabla \times \mathbf{A}_N = \frac{M\hat{r}}{r^2} + 4\pi M \delta(x)\delta(y)\theta(-z), \tag{38.11}$$

$$\nabla \times \mathbf{A}_S = \frac{M\hat{r}}{r^2} + 4\pi M \delta(x)\delta(y)\theta(z), \tag{38.12}$$

其中, $\theta(z)$ 是阶跃函数 (c.f. Figure 14.3)。

让我们运用纤维丛的几何语言来表达上面的结果。一个磁单极子向量势的分量 $A_i = A^i$, $i = 1, 2$ (θ, φ) 可以与一个主 $U(1)$ -丛 $\pi: P \rightarrow S^2$ 上的局域联络 1-形式用下面的方式相关联:

$$\omega = -i \left(\frac{e}{\hbar c} \right) A_j dx^j, \quad j = 1, 2. \tag{38.13}$$

(已经插入物理常数 $e/(\hbar c)$ 来允许对于一个电子和一个磁单极子之间相互作用的量子力学描述, 正如将简短看到的那样)。从 (37.158), (37.159) 和 (38.7), 可以看到转移函数 $g_{SN}(\varphi)$ (关

联南北坐标曲面) 由下式给出

$$g_{SN}(\varphi) = \exp\left(-2\frac{ie}{\hbar c}M\varphi\right), \quad (38.14)$$

其中, 重叠区域是赤道 ($\sim S^1$) 并且因此 g_{SN} 是一个映射 $g_{SN}: S^1 \rightarrow U(1)$ 。将北极和南极坐标曲面分别表示为 U_N 和 U_S , 我们的主丛有局域结构 $U_N \times U(1)$ 和 $U_S \times U(1)$, 定义局域平凡 $T_N: \pi^{-1}(U_N) \rightarrow U_N \times U(1)$ 和 $T_S: \pi^{-1}(U_S) \rightarrow U_S \times U(1)$ 由下式给出

$$T_N(p) = (\pi(p), \phi_N(p)), \quad (38.15)$$

$$T_S(p) = (\pi(p), \phi_S(p)), \quad (38.16)$$

其中, $\phi_N: \pi^{-1}(U_N) \rightarrow U(1)$ 和 $\phi_S: \pi^{-1}(U_S) \rightarrow U(1)$ 是映射, 使得: 对于 $p \in \pi^{-1}(U_N \cap U_S)$, 有

$$g_{SN}(\varphi) = (\phi_N)^{-1}(p)\phi_S(p) = \exp\left(-\frac{2ie}{\hbar c}M\varphi\right). \quad (38.17)$$

对应于上面的局域平凡, 我们有 P 上局域截面:

$$\sigma_S(x) = T_S^{-1}(x, e), \quad x \in U_S, \quad (38.18)$$

$$\sigma_N(x) = T_N^{-1}(x, e), \quad x \in U_N. \quad (38.19)$$

换句话说, 如果 $p = g\sigma_{N,S}(\pi(p))$, 则 $\phi_{N,S}(p) = g$ 。令 $\phi_N(p) = e^{i\gamma_N(p)}$ 和 $\phi_S(p) = e^{i\gamma_S(p)}$ 。则我们主丛的局域坐标由对于 $p \in \pi^{-1}(U_N)$ 有 $(\theta, \varphi; \gamma_N(p))$ 和对于 $p \in \pi^{-1}(U_S)$ 有 $(\theta, \varphi; \gamma_S(p))$ 给出。局域平凡, 或者规范的局域选择只是典型纤维上不同的参考点 (原点)[在这个情况中 $U(1)$] 依赖于其纤维坐标 $\gamma_N(p)$ 和 $\gamma_S(p)$ 被测量: 如果 $p = e^{i\theta}\sigma_{N,S}(\pi(p))$, 则有 $\gamma_{N,S}(p) = \theta$ 。方程 (38.17) 意味着

$$\gamma_N(p) - \gamma_S(p) = \frac{2e}{\hbar c}M\varphi, \quad (38.20)$$

其中, φ 是 $U_N \cap U_S$ 上的方位坐标 (即: 赤道)。事实上没有全局规范 (或全局平凡) 说明 $U(1)$ -丛对于磁单极子是非平凡的。

现在考虑一个电子 (电荷为 e 和质量为 m) 与一个磁单极子相互作用的波函数 $\psi(x, t)$ 。它满足 Schrödinger 方程

$$\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (38.21)$$

其中, $p_j = \frac{\hbar}{i} \partial_j$ 。对应于 $\mathbf{A}_N$ 和 $\mathbf{A}_S$, 我们有解 ψ_N 和 ψ_S , 分别在坐标邻域 U_N 和 U_S 有效。它们之间的变换由 (37.165) 和 (38.14) 给出:

$$\psi_N = \psi_S \cdot g_{SN}^{-1} = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c}2M\varphi\right) \psi_S. \quad (38.22)$$

一个最有趣且重要的物理结果来自于事实: 转移函数 $g_{SN}(\varphi)$ 被要求在 S^1 上是单值的。为了满足这个条件, 其要求

$$\frac{2eM}{\hbar c} \cdot 2\pi = 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \in \mathbb{Z},$$

从中得到磁荷的量子化条件:

$$\boxed{\frac{2eM}{\hbar c} \in \mathbb{Z}}. \quad (38.23)$$

满足 (38.21) 的波函数实际上是配丛 $\pi_{\mathbb{C}^1} : \mathbb{C}^1 \times_{U(1)} P \rightarrow S^2$ 的截面 (回忆定义 37.12), 其中 $\mathbb{C}^1$ 是标准一维复向量空间, ψ 在其上取值。在重叠区域 $U_N \cap U_S$ (赤道) 上, 纤维必须根据转移函数 $g_{SN}(\varphi)$ “缝合在一起”, 其确定丛的结构 (非平凡性)。

转移函数 $g_{SN} : S^1 \rightarrow U(1)$ 根据从 S^1 到 S^1 [由于 $U(1) \sim S^1$] 映射的**同伦类 (homotopy classes)** 被分类。让我们简短地讨论同伦的拓扑概念。粗略地说, 映射 $f : S^1 \rightarrow M$ 的同伦类是从圆到一个拓扑流形 M 的同伦连续映射的类, 其中两个映射 f_1 和 f_2 被称为是**同伦的 (homotopic)** (写作 $f_1 \sim f_2$), 如果存在一个连续映射 $F : I \times I \rightarrow M$ (I 是闭区间 $[0, 1]$) 使得

$$F(s, 0) = f_1(s), \quad F(s, 1) = f_2(s), \quad s \in I, \quad (38.24)$$

$$F(0, t) = F(1, t) = x_0 \in M, \quad t \in I, \quad (38.25)$$

其中, $f(s)$ 中的自变量 $s \in [0, 1]$ 是确定 S^1 上一个点的一个参数 (见 Figure 38.5)。显然, 两

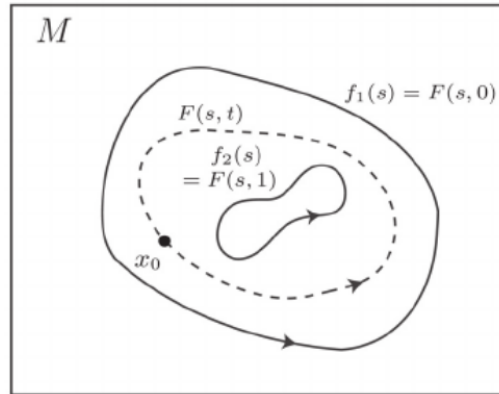


Figure 38.5

个同伦映射可以被想成 M 中可以互相连续变换成彼此的两个圈。映射的同伦类的集合用一个元素记做 $[f]$, 其中 f 是一个代表, 可以给定一个群结构, 如果我们定义下面的群乘法:

$$[f_1] \cdot [f_2] \equiv [f_1 \cdot f_2], \quad (38.26)$$

和逆操作

$$[f]^{-1} \equiv [f^{-1}], \quad (38.27)$$

其中在 (38.26) 的等号右边, 将具有一个共同点 x_0 的圈的乘积定义为一个圈, 其由先从 x_0 到 x_0 遍历 f_1 然后从 x_0 到 x_0 遍历 f_2 组成 (Figure 38.6)。如果两个圈 f_1 和 f_2 没有一个共同点, 我们可以在等号左边替换它们中的一个, 比如 f_2 , 通过一个同伦映射 $f'_2 (\sim f_2)$, 其与 f_1 有一个公共点 (Figure 38.7)。在 (38.27) 中, f^{-1} 简单意思是在 f 相反意义上遍历的一个圈。

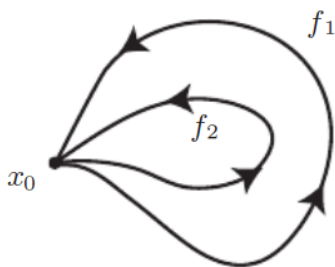


Figure 38.6

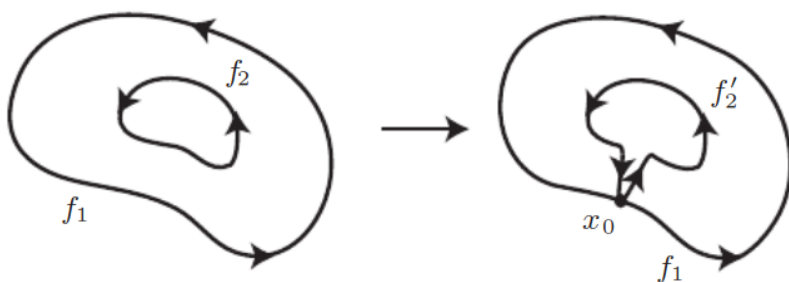


Figure 38.7

定义 38.1 令 M 是一个拓扑空间。圈的同伦类的集合，或者映射 $f: S^1 \rightarrow M$ ，使得 $f(0) = f(1) = x_0 \in M$ (其中，圆 S^1 上的自变量参数化点，满足由 (38.26) 和 (38.27) 给出的乘法规则和逆，被称为 M 在 x_0 处的**基础群** (*fundamental group*) (或**第一同伦群** (*first homotopy group*))，并记为 $\pi_1(M, x_0)$ 。

练习 38.2 说明 M 在 x_0 处的基础群的恒元是圈类，它可以被连续收缩到点 x_0 。说明 $\pi_1(M, x_0)$ 实际上是一个群，即：它满足群公理 (定义 4.1)。

练习 38.3 说明基础群 $\pi_1(M, x_0)$ 在不同基点 $x_0 \in M$ 是相互同构的。因此，它们可以参考为 $\pi_1(M)$ 。

通过考虑同伦映射 $f: S^r \rightarrow M$ ，我们可以推广到高阶同伦群 $\pi_r(M)$ 。同伦群 $\pi_r(M)$ 很重要因为它们拓扑不变 (**topological invariant**)，正如之前考虑的同调群 $H_r(M)$ [(33.10)] 和 de Rham 上同调群 $H^r(M)$ [(33.1)]。我们将只表述而不证明下面与同伦和上同调有关的实用定理 [见 Nash and Sen 1983, Chapter 6]。

定理 38.1 如果 h 和 g 是从 M 到 N 的同伦映射而 $\beta \in \Lambda^r(N)$ 是 N 上一个 r -形式，则我们下面有上同调类在拉回下的等价：

$$[h^*\beta] = [g^*\beta] \in H^r(M).$$

直观地看到

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \quad (\text{整数}). \quad (38.28)$$

这一结果可以借助 Figure 38.8 来理解，其展示了围绕一个极圈一个带且相互不能连续变成

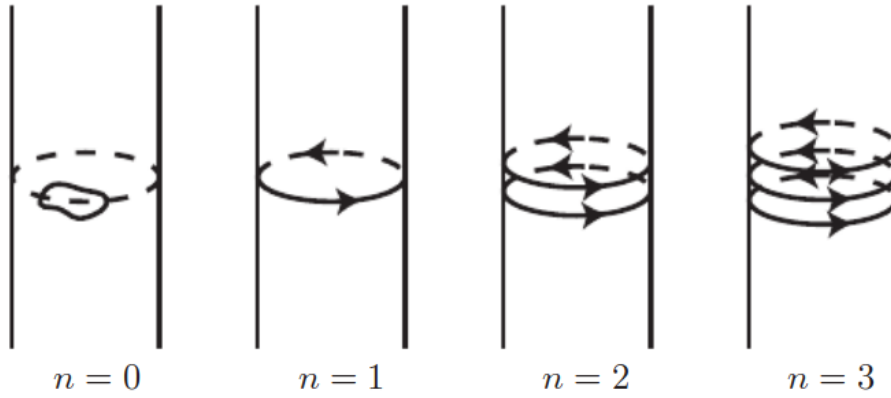


Figure 38.8

彼此的几种不同方法。一个 S^2 上主 $U(1)$ -丛定义的转移函数由下式给出

$$g_{UV}(\varphi) = \exp(-in\varphi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

被称为一个 **Hopf 丛 (Hopf bundle)**。

量子化条件 (38.23) 和结论 (38.28) 表明磁荷的允许量子化数值基于 $U(1)$ 的拓扑, 即: Hopf 丛的结构群, 如 $\pi_1(U(1))$ 所示。磁荷是所谓的**拓扑量子数 (topological quantum number)** 的一个示例。

磁荷的量子化的深层拓扑起源的进一步阐明可以通过由 (38.13) 给出的局域联络 1-形式 ω 的局域曲率 2-形式 Ω 来获得。由于 $U(1)$ 是 Abel 的, 通过 (37.138) 的性质, 我们有:

$$\begin{aligned} \Omega = d\omega &= -\frac{ie}{\hbar c} \frac{\partial A_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j \\ &= -\frac{ie}{\hbar c} \left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j, \quad i < j. \end{aligned} \quad (38.29)$$

在三维中, $\partial_i A_j - \partial_j A_i$ 正是磁感强度 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 的分量。

曲率 Ω , 即使是局域定义的, 也可以在丛上提供非常重要的全局信息。在规范的一个改变下, 其按照张量变换的事实: $\Omega' = g\Omega g^{-1}$ [c.f. (35.25)] 促使下面不变性的考虑 (在一个规范变换下):

$$\det \left(1 + \frac{i}{2\pi} \Omega \right) \equiv 1 + C_1(\Omega) + \cdots + C_q(\Omega), \quad (38.30)$$

其中, $C_j(\Omega)$ 是基流形上一个 $2j$ -形式。很明显级数截止 (a top-form is obtained 当 $2j = n =$ 基流形的维度时便获得了一个顶-形式)。因此, 如果 $2j > n$ 有 $C_j(\Omega) = 0$ 。这是一个最著名且重要的事实 (所谓的 Chern-Weil 理论的一个结论, 其将在 Chapter 41 中提出): $C_j(\Omega)$ 也是闭的, 即: $dC_j(\Omega) = 0$, 并且因此确定基流形 M 的一个实 de Rham 上同调类, 在考虑: $C_j(\Omega) \in H^{2j}(M, \mathbb{R})$ 下在主 G -丛上与联络的选择独立。de Rham 上同调类 $C_j(\Omega)$ 是所谓的**陈示性类 (Chern characteristic classes)** (见下面的 Chapter 41)。对于 Hopf 丛 $\pi: P \rightarrow S^2$: 如果 $j > 1$ 有 $C_j(\Omega) = 0$, 且有 $C_1(\Omega) = \frac{i}{2\pi} \Omega$ 。积分

$$c_1 \equiv \int_{S^2} C_1(\Omega) = \frac{i}{2\pi} \int_{S^2} \Omega, \quad (38.31)$$

称为**第一陈数 (first Chern number)**, 是 Hopf 丛的一个拓扑不变量。它可以简单计算如下:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{i}{2\pi} \int_{S^2} d\omega = \left(\frac{i}{2\pi} \right) \left(-\frac{ie}{\hbar c} \right) \int_{S^2} dA \quad (A = A_j dx^j) \\ &= \frac{e}{2\pi\hbar c} \oint (\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S) \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{通过 Stokes 定理}) \\ &= \frac{e}{2\pi\hbar c} 4\pi M = \frac{2eM}{\hbar c} \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (38.32)$$

从量子化条件 (38.23) 得到。因此, 陈数可以与拓扑量子数相关联。

如上所述的 $U(1)$ -磁单极子虽然在理论上非常有趣, 但在自然界还没有观察到。现在, 我们将讨论真实的物理系统, 这些系统展示了规范理论的数学结构, 或者更具体地说, 是 $U(n)$ -磁性单极子的数学结构。令人惊讶的是, 这些示例由分子动力学提供, 与许多可以识别其“快速”和“缓慢”的自由度的其它类型的物理系统一样 (见 A. Shapere 和 F. Wilczek 1989)。在本章中, 我们将重点聚焦分子系统。

一个分子系统中, 总体电子坐标记为 $\mathbf{r}$ 而总体原子核坐标记为 $\mathbf{R}$ 。通过一个分子系统, 我们的意思不只是指单个分子, 而指包括任意数量的原子和/或分子相互作用的任意系统。事实上, 我们的公式不仅适用于束缚系统, 也适用于散射态中的碰撞粒子系统。总体而言, 一个分子系统的总 Hamilton 量可以被写为

$$H(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = -\hbar^2 \sum_I \frac{1}{2M_I} \nabla_{R_I}^2 + H_e(\mathbf{R}; \mathbf{r}), \quad (38.33)$$

其中, 求和遍历所有原子核, 而 H_e 称为电子的 Hamilton 量且通过原子核坐标 $\mathbf{R}$ 参数化, 由下式给出

$$H_e(\mathbf{R}; \mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum \nabla_r^2 + V_N(\mathbf{R}) + V_e(\mathbf{R}, \mathbf{r}). \quad (38.34)$$

上面方程的等号右边的第一项表示电子动能, 第二项表示原子核之间的相互作用势能, 而最后一项表示电子-电子和电子-原子核相互作用势能的和。根据 (38.33) 的 Hamilton 的拆分基于物理理解, 即: 电子自由度是“快速”的自由度, 而原子核自由度是“缓慢”的自由度。电子 Hamilton 量 $H_e(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ 则可以被视为是一个原子核自由度 $\mathbf{R}$ 冻结的“快照” Hamilton 量。

我们假设对于 $H_e(\mathbf{R}; \mathbf{r})$ 时间独立的 Schrödinger 方程可以对于固定的 $\mathbf{R}$ 求解, 具有本征态 $|\phi_n(\mathbf{R})\rangle$ 的一个离散集和对应能量本征值 $\epsilon_n(\mathbf{R})$ (都是通过 $\mathbf{R}$ 参数化):

$$H_e |\phi_n(\mathbf{R})\rangle = \epsilon_n(\mathbf{R}) |\phi_n(\mathbf{R})\rangle. \quad (38.35)$$

处理 $|\phi_n(\mathbf{R})\rangle$ 的坐标表示 ($\mathbf{r}$ -表示), 即: 电子波函数由下式给出 [回忆 (15.11)]:

$$\phi_n(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \langle \mathbf{r} | \phi_n(\mathbf{R}) \rangle, \quad (38.36)$$

方程 (38.35) 或可以被写成

$$H_e \phi_n(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \epsilon_n(\mathbf{R}) \phi_n(\mathbf{r}, \mathbf{R}). \quad (38.37)$$

我们可以进一步假设电子本征态 $\{|\phi_n(\mathbf{R})\rangle\}$ 的集合对于每个 $\mathbf{R}$ 是标准正交且完备的 [c.f.

(12.12)]:

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \int dr \overline{\phi_n}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \phi_m(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \delta_{nm} \quad (\text{正交归一性}), \quad (38.38)$$

$$\sum_n |\phi_n(\mathbf{R})\rangle \langle \phi_n(\mathbf{R})| = 1 \quad (\text{完备性}). \quad (38.39)$$

注意到在 (38.38) 中, 对于内积的积分只遍历电子坐标。电子能量本征值 $\epsilon_n(\mathbf{R})$ 的集合从 (38.35)[或者 (38.37)] 的解获得为原子核坐标 $\mathbf{R}$ 的函数, 通常对于原子核运动参考为势能“表面”。

对于总 Hamilton 量 H 的时间独立的 Schrödinger 方程可以被写成

$$H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (38.40)$$

或

$$H\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}), \quad (38.41)$$

其中

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \equiv \langle \mathbf{R} | \langle \mathbf{r} | \Psi \rangle. \quad (38.42)$$

由于 $\{\phi_n(\mathbf{R}, \mathbf{r})\}$ 是对于每个 $\mathbf{R}$ 的一个完备集, 我们可以展开 $\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ 为

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \sum_n \Phi_n(\mathbf{R}) \phi_n(\mathbf{r}, \mathbf{R}). \quad (38.43)$$

从 (38.33) 得到 Schrödinger 方程 (38.41) 可以被写成

$$\sum_n \left\{ \sum_I \left(-\frac{\hbar^2}{2M_I} \nabla_{R_I}^2 \right) + H_e \right\} \Phi_n(\mathbf{R}) \phi_n(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = E \sum_n \Phi_n(\mathbf{R}) \phi_n(\mathbf{r}, \mathbf{R}). \quad (38.44)$$

运用 (38.37) 并且用 $\phi_m(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ 对上面方程的两边取内积 [即: 对两边应用 $\int dr \overline{\phi_m}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$], 我们得到

$$\begin{aligned} \sum_n \int dr \overline{\phi_m}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \left(\sum_I -\frac{\hbar^2}{2M_I} \nabla_{R_I}^2 \right) \Phi_n(\mathbf{R}) \phi_n(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \\ + \sum_n \Phi_n(\mathbf{R}) \delta_{nm} \epsilon_n(\mathbf{R}) = E \Phi_m(\mathbf{R}), \end{aligned} \quad (38.45)$$

其中, $\{\phi_n\}$ [(38.38)] 的标准正交性已经使用了。等号左边的第一项可以被操纵如下 [运用 (30.56) 和 (30.58)]:

$$\begin{aligned} & \int dr \overline{\phi_m}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \nabla_{R_I} \cdot \{ \nabla_{R_I} (\Phi_n(\mathbf{R}) \phi_n(\mathbf{r}, \mathbf{R})) \} \\ &= \int dr \overline{\phi_m} \nabla_{R_I} \cdot \{ \Phi_n \nabla_{R_I} \phi_n + (\nabla_{R_I} \Phi_n) \phi_n \} \\ &= \int dr \overline{\phi_m} \{ \Phi_n \nabla_{R_I}^2 \phi_n + 2 (\nabla_{R_I} \Phi_n) \cdot (\nabla_{R_I} \phi_n) + (\nabla_{R_I}^2 \Phi_n) \phi_n \} \\ &= \Phi_n \langle \phi_m | \nabla_{R_I}^2 \phi_n \rangle + 2 \langle \phi_m | \nabla_{R_I} \phi_n \rangle \cdot (\nabla_{R_I} \Phi_n) + \delta_{nm} \nabla_{R_I}^2 \Phi_n, \end{aligned} \quad (38.46)$$

其中, 最后一个等号的等号右边 (38.38) 的 Dirac 括号已经被使用了。也注意到

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_m | \nabla_{R_I}^2 \phi_n \rangle &= \nabla_{R_I} \langle \phi_m | \nabla_{R_I} \phi_n \rangle - \langle \nabla_{R_I} \phi_m | \nabla_{R_I} \phi_n \rangle \\
 &= \nabla_{R_I} \langle \phi_m | \nabla_{R_I} \phi_n \rangle - \sum_k \langle \nabla_{R_I} \phi_m | \phi_k \rangle \langle \phi_k | \nabla_{R_I} \phi_n \rangle \\
 &= \nabla_{R_I} \langle \phi_m | \nabla_{R_I} \phi_n \rangle + \sum_k \langle \phi_m | \nabla_{R_I} \phi_k \rangle \langle \phi_k | \nabla_{R_I} \phi_n \rangle ,
 \end{aligned} \tag{38.47}$$

其中在第二个等号, 我们已经运用了 $\{|\phi_k\rangle\}$ [(38.39)] 的完备性条件并且第三个等号已经运用了事实

$$\nabla_{R_I} \langle \phi_m | \phi_k \rangle = \nabla_{R_I} \delta_{nm} = 0 = \langle \nabla_{R_I} \phi_m | \phi_k \rangle + \langle \phi_m | \nabla_{R_I} \phi_k \rangle . \tag{38.48}$$

我们现在定义量

$$\left[\left(\mathbf{A}^{(I)} \right)_m^n \equiv i\hbar \langle \phi_m | \nabla_{R_I} \phi_n \rangle = i\hbar \int d\mathbf{r} \overline{\phi_m}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \nabla_{R_I} \phi_n(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \right] . \tag{38.49}$$

对于原子核运动的 Schrödinger 方程 (38.45) 则可以被写成矩阵形式

$$H_m^n \Phi_n(\mathbf{R}) = E \Phi_m(\mathbf{R}) , \tag{38.50}$$

其中, 算符 (H_m^n) 的矩阵由下式给出

$$H_m^n(\mathbf{R}) = \sum_I \left(-\frac{\hbar^2}{2M_I} \right) (D^{(I)})_m^k \cdot (D^{(I)})_k^n + \delta_m^n \epsilon(\mathbf{R}) . \tag{38.51}$$

在上面的方程中, 对于 I 的求和遍历原子核而向量算符 $(D^{(I)})_m^k$ 的矩阵由下式给出

$$\left[(D^{(I)})_m^k \equiv \delta_m^k \nabla_{R_I} - \frac{i}{\hbar} \left(\mathbf{A}^{(I)} \right)_m^k(\mathbf{R}) \right] . \tag{38.52}$$

上面两个方程揭示原子核运动由一个 Schrödinger 方程 [(38.50)], 该方程形式上类似于一个电磁场中运动的一个带电粒子, 算符 $(D^{(I)})_m^k$ 在 (38.52) 中出现的描述一个最小耦合的一个协变导数 [c.f. (37.169)] 而 $\left(\mathbf{A}^{(I)} \right)_m^k(\mathbf{R})$ 作为“向量势”, 或者规范势。方程 (38.50) 也显式说明不同电子态是如何与原子核运动耦合的。

规范势 $\left(\mathbf{A}^{(I)} \right)_m^n(\mathbf{R})$ 可以与电子能量差别 $\epsilon_n(\mathbf{R}) - \epsilon_m(\mathbf{R})$, 矩阵元素 $\langle \phi_m | (\nabla_{R_I} H_e) | \phi_n \rangle$, 以及原子核势能的梯度 $\nabla_{R_I} \epsilon_n$ 联系。我们有

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_m | \nabla_{R_I} (H_e | \phi_n) \rangle &= \langle \phi_m | \nabla_{R_I} (\epsilon(\mathbf{R}) | \phi_n) \rangle \\
 &= \langle \phi_m | (\nabla_{R_I}, H_e) | \phi_n \rangle + \langle \phi_m | H_e | \nabla_{R_I} \phi_n \rangle .
 \end{aligned} \tag{38.53}$$

因此

$$\epsilon_n(\mathbf{R}) \langle \phi_m | \nabla_{R_I} \phi_n \rangle + \nabla_{R_I} \epsilon_n(\mathbf{R}) \delta_{mn} = \langle \phi_m | (\nabla_{R_I} H_e) | \phi_n \rangle + \epsilon_m(\mathbf{R}) \langle \phi_m | \nabla_{R_I} \phi_n \rangle , \tag{38.54}$$

或

$$(\epsilon_n(\mathbf{R}) - \epsilon_m(\mathbf{R})) \langle \phi_m | \nabla_{R_I} \phi_n \rangle = \langle \phi_m | (\nabla_{R_I} H_e) | \phi_n \rangle - \delta_{mn} \nabla_{R_I} \epsilon_n(\mathbf{R}) . \quad (38.55)$$

因此, 对于非简并态 ($\epsilon_m \neq \epsilon_n$), 有

$$\left(\mathbf{A}^{(I)} \right)_m^n(\mathbf{R}) = i\hbar \frac{\langle \phi_m | (\nabla_{R_I} H_e) | \phi_n \rangle}{\epsilon_n(\mathbf{R}) - \epsilon_m(\mathbf{R})} , \quad (\epsilon_n \neq \epsilon_m) . \quad (38.56)$$

现在让我们用分子物理学中一个具体的例子来说明上面的形式化发展: 一个同核二原子分子 (比如 O_2) 的 $\lambda(\Lambda)$ 双重态, 其中 Λ 表示分子的总电子角动量 (包括自旋) $\mathbf{J}$ 沿着核间轴 $\hat{n}$ 的投影 $\mathbf{J} \cdot \hat{n}$ (见 Figure 38.9)。我们将说明对于这个系统与对于一个磁单极子有相同数学形式的规范势 $\mathbf{A}_m^n(\mathbf{R})$!

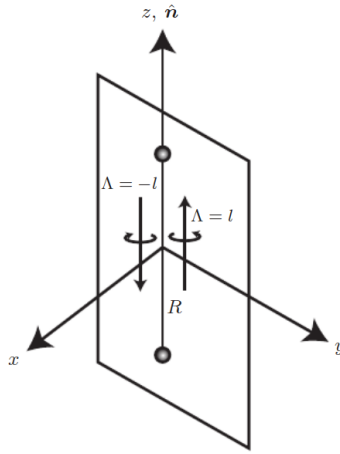


Figure 38.9

这个系统很明显没有球对称性, 所以 $J^2 = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J}$ 不是守恒的 (因此, 它与电子 Hamilton 量 H_e 不对易), 并且 J_z 不是一个好量子数。然而, $\mathbf{J} \cdot \hat{n}$ 是守恒的并且其本征值 Λ 可以被用来标记电子态 $|\phi_n\rangle$ 。此外, 由于系统关于通过核间轴的任意平面具有镜面对称性, 并且 $\mathbf{J} \cdot \hat{n}$ 在这样一个宇称操作下改变符号, 满足 $\mathbf{J} \cdot \hat{n} = \Lambda\hbar$ 的态与满足 $\mathbf{J} \cdot \hat{n} = -\Lambda\hbar$ 的态简并。这样的一对简并态被称为 **lambda 双重态 (lambda doublets)**。

对于 Λ 的一个特定值, 让我们标记核间轴沿着 z -方向 (Figure 38.9) 的双重电子态 $|\phi_\Lambda(\hat{n} = \hat{z})\rangle$ 和 $|\phi_{-\Lambda}(\hat{n} = \hat{z})\rangle$ 分别为 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 。假设分子建立模型为一个刚性哑铃 (振动冻结) 并且在原子核质心系 (CM) 中处理, 原子核坐标 $\mathbf{R}$ 只是一个 2-球 S^2 表面上极角 (θ, φ) 标记的点。双重电子态 $\hat{n}$ 指向任意方向 [由 (θ, φ) 确定] 是从 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 通过旋转 (在原子核坐标空间中) 获得。我们将标记它们为 $|\uparrow(\theta, \varphi)\rangle$ 和 $|\downarrow(\theta, \varphi)\rangle$ 。实际上, 回忆 Euler 定理 [定理 6.3 中方程 (6.25)] 和 (4.21), 我们有 (运用记号 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 来表示 $|\uparrow\rangle$ 或 $|\downarrow\rangle$)

$$|\uparrow\downarrow(\theta, \varphi)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_3} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_2} e^{\frac{i}{\hbar}\varphi J_3} |\uparrow\downarrow\rangle , \quad (38.57)$$

其中, 算符 $\exp\left(\frac{i}{\hbar}\varphi J_3\right)$ 作用在 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 上不产生效应 [因此关于 $\hat{z}$ 旋转一个角度 φ 不移动北极 (或南极) 点], 并且已经作为计算的一部分插入式中。

规范势 [如 (38.49) 定义] 可以从下面的量获得

$$\begin{aligned} i\hbar \langle \uparrow\downarrow(\theta, \varphi) | \nabla_{(\theta, \varphi)} | \uparrow\downarrow(\theta, \varphi) \rangle &= \frac{i\hbar}{R} \left\langle \uparrow\downarrow(\theta, \varphi) \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \right| \uparrow\downarrow(\theta, \varphi) \right\rangle e_\theta \\ &+ \frac{i\hbar}{R \sin \theta} \left\langle \uparrow\downarrow(\theta, \varphi) \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right| \uparrow\downarrow(\theta, \varphi) \right\rangle e_\varphi, \end{aligned} \quad (38.58)$$

其中, 常数 R 是核间距的一半。

我们继续计算上面方程等号右边的矩阵元素。我们有

$$\begin{aligned} &i\hbar \left\langle \uparrow\downarrow(\theta, \varphi) \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \right| \uparrow\downarrow(\theta, \varphi) \right\rangle \\ &= i\hbar \left\langle \uparrow\downarrow \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_3} e^{\frac{i}{\hbar}\theta J_2} e^{\frac{i}{\hbar}\varphi J_3} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_3} e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_2} e^{\frac{i}{\hbar}\varphi J_3} \right) \right| \uparrow\downarrow \right\rangle \\ &= \left\langle \uparrow\downarrow \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_3} e^{\frac{i}{\hbar}\theta J_2} J_2 e^{-\frac{i}{\hbar}\theta J_2} e^{\frac{i}{\hbar}\varphi J_3} \right| \uparrow\downarrow \right\rangle \\ &= \left\langle \uparrow\downarrow \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi J_3} J_2 e^{\frac{i}{\hbar}\varphi J_3} \right| \uparrow\downarrow \right\rangle \\ &= \langle \uparrow\downarrow | \cos \varphi J_2 - \sin \varphi J_1 | \uparrow\downarrow \rangle, \end{aligned} \quad (38.59)$$

其中, 在最后一个等号, 我们已经使用了算符恒等式

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha J_i} J_j e^{\frac{i}{\hbar}\alpha J_i} = (\cos \alpha) J_j + (\sin \alpha) \varepsilon_{ij}^k J_k, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (38.60)$$

其中, ε_{ij}^k 是完全反对称张量。

练习 38.4 说明上面恒等式的结果来自于一般算符

$$e^{\xi A} B e^{-\xi A} = B + \xi [A, B] + \frac{\xi^2}{2!} [A, [A, B]] + \frac{\xi^3}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \cdots, \quad \xi \in \mathbb{C}, \quad (38.61)$$

并且角动量算符的 Lie 代数结构如 (9.23) 给出:

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ij}^k J_k.$$

类似地, 通过反复应用 (38.60), 有

$$i\hbar \left\langle \uparrow\downarrow(\theta, \varphi) \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \right| \uparrow\downarrow(\theta, \varphi) \right\rangle = \langle \uparrow\downarrow | (\cos \theta - 1) J_3 - \sin \theta \cos \varphi J_1 - \sin \theta \sin \varphi J_2 | \uparrow\downarrow \rangle. \quad (38.62)$$

由于态 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 沿着 $e_3 = \hat{z}$ 的核间轴, 我们有

$$J_3 |\uparrow\rangle = +\Lambda \hbar |\uparrow\rangle, \quad (38.63)$$

$$J_3 |\downarrow\rangle = -\Lambda \hbar |\downarrow\rangle. \quad (38.64)$$

为了计算 J_1 和 J_2 的矩阵元素, 我们引入 Hermitian 共轭对 [回忆 (24.82) 和 (24.83)]

$$J_\pm \equiv \frac{J_1 \pm iJ_2}{\sqrt{2}}, \quad (38.65)$$

其意味着

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_+ + J_-), \quad (38.66)$$

$$J_2 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(J_+ - J_-). \quad (38.67)$$

临时分别将 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 写成 $|\Lambda\rangle$ 和 $|\Lambda\rangle$, ($\Lambda \geq 0$), 我们有

$$J_+|\pm\Lambda\rangle = \alpha_+(\Lambda)|\pm\Lambda+1\rangle, \quad (38.68)$$

$$J_-|\pm\Lambda\rangle = \alpha_-(\Lambda)|\pm\Lambda-1\rangle, \quad (38.69)$$

其中, $\alpha_+(\Lambda)$ 和 $\alpha_-(\Lambda)$ 是取决于 Λ 的常数。从 $SO(3)$ 的表示的一般理论 (Chapter 22), Λ 可以假设值 $n/2; n = 0, 1, 2, 3, \dots$ 。方程 (38.59) 和 (38.62) 很明显说明规范势 $\mathbf{A}_n^m$ 对于对应 $|\Lambda|$ 不同值的 $|\phi_n\rangle$ 和 $|\phi_m\rangle$ 消失。因此, 只有 Λ -双重态 (对于固定的 Λ) 可能通过规范势耦合。对于 $\Lambda \neq 1/2$, 双重态实际上是解耦的 (2×2 规范势矩阵是对角化的)。实际上, 对于 $\Lambda \neq 1/2$,

$$(A_\theta)_n^m = 0, \quad (38.70)$$

$$(A_\varphi)_n^m = \begin{pmatrix} -\frac{\Lambda\hbar(1-\cos\theta)}{R\sin\theta} & 0 \\ 0 & \frac{\Lambda\hbar(1-\cos\theta)}{R\sin\theta} \end{pmatrix}, \quad (38.71)$$

其中, 行指标和列指标分别是 n 和 m , 且对于 $\uparrow$ 值为 1, 对于 $\downarrow$ 值为 2。与一个磁单极子的吴-杨势 (38.5) 比较, 我们看到 (38.50) 的每个原子核波函数 $\Phi_\uparrow(\theta, \varphi)$ 和 $\Phi_\downarrow(\theta, \varphi)$ 满足一个 Schrödinger 方程, 该方程形式上类似于一个带电粒子在由一个 $U(1)$ -磁单极子 [(38.21)] 产生的场中的运动, 其中 $\Lambda\hbar$ 对于态 $\Phi_\downarrow$ 扮演磁荷的角色, 而 $-\Lambda\hbar$ 对于 $\Phi_\uparrow$ 扮演相同的角色。

对于 $\Lambda = 1/2$, 态 $|\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\rangle$ 不再解耦。实际上, 直接运用 (38.63) 到 (38.69) 来说明: 对于 $\Lambda = 1/2$, 有

$$A_\theta = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \lambda e^{-i\varphi}/R \\ \bar{\lambda} e^{i\varphi}/R & 0 \end{pmatrix}, \quad (38.72)$$

$$A_\varphi = \hbar \begin{pmatrix} -(1-\cos\theta)/(2R\sin\theta) & i\lambda e^{-i\varphi}/R \\ -i\bar{\lambda} e^{i\varphi}/R & (1-\cos\theta)/(2R\sin\theta) \end{pmatrix}, \quad (38.73)$$

其中

$$\hbar\lambda \equiv \langle \uparrow | J_2 | \downarrow \rangle. \quad (38.74)$$

练习 38.5 验证 (38.72) 和 (38.73)。

上面的向量势是一个 $U(2)$ -磁单极子的向量势, 数学上通过定义了基流形 S^2 的一个主 $U(2)$ -丛 $\pi: P \rightarrow S^2$ 来描述。注意到 A_θ 和 A_φ 都是 Hermitian 的, 因此 $-iA_\theta$ 和 $-iA_\varphi$ 都是反-Hermitian 的, 如被要求的那样因为 $\omega = -iA_\theta d\theta - iA_\varphi d\varphi$ 是一个 $U(2)$ -值联络 1-形式, 其中 $U(2)$ 是 $U(2)$ 的 Lie 代数。

最后我们提到整数量子 Hall 效应 (integral quantum Hall effect), 其在数学上是通

过 T^2 上的 $U(1)$ -丛描述 (2-环面)。所谓的 **Hall 电导率 (Hall conductance)** ($ne^2/h, n \in \mathbb{Z}$) 原来只是丛的第一陈数, 一个拓扑不变 (见 M. Kohmoto 1985 和 D. J. Thouless 1998)。

39. Riemann 几何

Riemann 几何是 Einstein 广义相对论的数学基础，广义相对论是引力的标准经典理论。它的研究对象是赋予了一个确定二次型度规的一个流形。

度规的概念已经在 Chapter 8 中非正式引入。我们回忆一下粗略地说，它是对于在一个流形上测量距离和角度的一个处理方法。在本章中，我们将首先更准确地定义 Riemann 度规，然后探讨该度规与由此产生的切丛上的唯一联络 (Levi-Civita 联络) 之间的关系。根据广义相对论，这种联络在四维时空上的曲率实际上就是引力场。

定义 39.1 假设 M 是一个 n 维光滑流形。 M 上一个 **Riemann 度规** (*Riemannian metric*) G 是 M 上一个对称、正定、协变 $(0, 2)$ -型张量场。

如果 $(U; x^i)$ 是 M 中一个坐标邻域，则 G 可以被局域 (U 上) 表述为

$$G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad (39.1)$$

其中，

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (39.2)$$

是 U 上一个对称光滑函数。在任意点 $x \in U$, G 给出 $T_x M$ 上一个双线性函数：如果 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 是 $T_x M$ 中两个切向量，则 [回忆 (8.6)]

$$G(X, Y) = g_{ij}(x) X^i Y^j. \quad (39.3)$$

度规 G 因此对于任意 $x \in M$ 确定 $T_x M$ 上一个内积。正定性意味着：对于任意 $X \in T_x M$ ，有

$$G(X, X) \geq 0. \quad (39.4)$$

并且仅当 $X = 0$ 时等号成立。注意到一个正定度规必须是非退化的。[一个度规非退化的概念

在 Chapter 8 的 (8.6) 之后的讨论中已经被引入]。

定义 39.2 M 上一个对称、非退化但是不正定的协变 $(0, 2)$ -型张量场被称为 M 上一个**赝 Riemann 度规 (pseudo-Riemannian metric)**。

Chapter 8 中引入的 Minkowski 度规 $\eta_{\mu\nu}$ 是一个平面 ($\eta_{\mu\nu} = \text{constant}$) 的一个例子, 四维时空上的赝 Riemann 度规。在本章中的发展将被应用到赋予了非退化度规的流形 (Riemann 或者赝 Riemann)。我们将松散地将这种流形称为 **Riemann 流形 (Riemannian manifold)**。

如果 G 是正定的, 则我们可以定义切向量的长度 $X = X^i \partial_i \in T_x M$ 为

$$|X| \equiv \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{G(X, X)}, \quad (39.5)$$

并且两个向量 $X, Y \in T_x M$ 之间的角度 θ 为

$$\cos \theta \equiv \frac{G(X, Y)}{|X||Y|} = \frac{X \cdot Y}{|X||Y|}. \quad (39.6)$$

此外, M 上的**弧长元素 (element of arc length)** 由下式给出

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (39.7)$$

因此如果 $C: [t_0, t_1] \rightarrow M$ 是一个由函数 $x^i(t), t_0 \leq t \leq t_1$ 确定的连续且分段光滑曲线, 则 C 的弧长被定义

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{ds}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt. \quad (39.8)$$

我们将只表述下面基本结论而不证明。

定理 39.1 在任意有限维光滑流形上存在一个 Riemann 度规。

Riemann 几何, 基于 (39.8), 可以被视为下面情况的一种特殊情况, 其中

$$s = \int_{t_0}^{t_1} F \left(x^1, \dots, x^n; \frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right) dt, \quad (39.9)$$

在其中 $F(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n)$ 被要求是 $2n$ 个变量的一个光滑、非负函数, 并且仅当 $y^1 = \dots = y^n = 0$ 取到值 0。进一步要求 y 的一阶项是**对称齐次 (symmetrically homogeneous)**:

$$F(x^1, \dots, x^n; \lambda y^1, \dots, \lambda y^n) = |\lambda| F(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (39.10)$$

亦或是 y 的一次项是**正齐次 (positively homogeneous)**:

$$F(x^1, \dots, x^n; \lambda y^1, \dots, \lambda y^n) = \lambda F(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n), \quad \lambda > 0. \quad (39.11)$$

$F(x; y)$ 被称为 **Finsler 函数 (Finsler function)** 并且对应 **Finsler 几何 (Finsler geometry)**。这种情况实际上已经由 Riemann 引入。然而, 更详细地考虑它超出了本文的范围。(见 Chern, Chen 和 Lam 1999; D. Bao, S. S. Chern 和 Z. Shen 2000)。

回到一个 Riemann(或赝 Riemann) 度规, 我们看到: 在局域坐标的一个变换下 [回忆 (2.1)]

和 (30.10)], 有

$$(g')_{ij} = g_{kl} \frac{\partial x^k}{\partial (x')^i} \frac{\partial x^l}{\partial (x')^j} . \quad (39.12)$$

因此 G 是非退化的, 矩阵 (g_{ij}) 有一个逆, 我们将其记为 (g^{ij}) :

$$g^{ik} g_{kj} = g_{jk} g^{ki} = \delta_j^i . \quad (39.13)$$

对于 g^{ij} 在局域坐标的一个改变下的变换规则将被展示如下

$$(g')^{ij} = g^{kl} \frac{\partial (x')^i}{\partial x^k} \frac{\partial (x')^j}{\partial x^l} . \quad (39.14)$$

练习 39.1 验证上面的表述。

因此 g^{ij} 是一个二阶对称逆变张量场 [或一个 $(2, 0)$ -型张量场]。

如 Chapter 8 中讨论的那样, 度规 G 提供了 $T_x M$ 和其对偶 $T_x^* M$ 之间的一个同构。实际上, 如果 $X \in T_x M$, 则存在一个唯一元素 $X^* \in T_x^* M$, 使得: 对于任意 $Y \in T_x M$, 有

$$\langle Y, X^* \rangle = G(Y, X) . \quad (39.15)$$

反之, 因为 G 是非退化的, 任意 $T_x^* M$ 中的元素可以表述成 X^* 的形式, 对于一些 $X \in T_x M$ 。如果我们写 X 和 X^* 分量形式依赖于自然基:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X^* = X_i dx^i \quad (39.16)$$

则 (39.15) 意味着

$$X_i = g_{ij} X^j, \quad X^i = g^{ij} X_j . \quad (39.17)$$

注意到根据 Chapter 2 中引入的术语, X^* (具有下指标分量) 是一个协变向量, 而 X (具有上指标分量) 是一个逆变向量。这些向量可以通过借助度规张量 g_{ij} 的帮助来升降指标从而相互生成。升降指标的张量算符实际上可以扩展到任意混合张量。比如, 如果 (t_{jk}^i) 是一个 $(1, 2)$ -型张量, 则 type

$$t_{ijk} = g_{il} t_{jk}^l, \quad t_k^{ij} = g^{jl} t_{lk}^i \quad (39.18)$$

分别是 $(0, 3)$ -型张量和 $(2, 1)$ -型张量。

让我们现在引入一个流形 M 上仿射联络 (affine connection) 的概念。它只是 M 的切丛 TM 上的一个联络 (定义 35.1)。在 M 的一个坐标邻域 $(U; x^i)$ 上, 我们有局域标架场 $\{s_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$, $i = 1, \dots, n$ (n 是 M 作为一个流形的维度)。则 U 上的一个仿射联络 D 由下式给出 [回忆 (35.8)]

$$Ds_i = \omega_i^j \otimes s_j = \Gamma_{ik}^j dx^k \otimes s_j , \quad (39.19)$$

其中, Γ_{ik}^j 是 U 上光滑函数。它们被称为依赖于局域坐标 x^i 的 D 的联络系数 (connection coefficients), 或者 Christoffel 符号 (Christoffel symbols)。[它们与 (35.8) 中联络系数 $A_{\alpha i}^\beta$ 对于一个一般向量丛的角色相同。假设 $(W; y^i)$ 是 M 中另一个坐标邻域, 并且 $(s')_i = \frac{\partial}{\partial y^i}$ 。

令

$$S = {}^t(s_1, \dots, s_n) = {}^t\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \quad (39.20)$$

和

$$S' = {}^t((s')_1, \dots, (s')_n) = {}^t\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right). \quad (39.21)$$

则在 $U \cap W \neq \emptyset$ 上, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \quad (39.22)$$

或者, 在矩阵记号中,

$$S' = J_{WU} S, \quad (39.23)$$

其中, 坐标改变的 Jacobi 矩阵 J_{WU} 由下式给出

$$J_{WU} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}. \quad (39.24)$$

从 (35.17) 得到, 在坐标的一个局域改变下, 1-形式 ω 的联络矩阵的变换规则由下式给出

$$\omega' = dJ_{WU} \cdot J_{WU}^{-1} + J_{WU} \omega J_{WU}^{-1}, \quad (39.25)$$

即:

$$(\omega')_i^j = d\left(\frac{\partial x^l}{\partial y^i}\right) \frac{\partial y^j}{\partial x^l} + \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \omega_l^m \frac{\partial y^j}{\partial x^m}, \quad (39.26)$$

其中

$$(\omega')_i^j = (\Gamma')_{ik}^j dy^k. \quad (39.27)$$

Christoffel 符号在坐标的一个局域改变下的变换规则则是

$$(\Gamma')_{ik}^j = \frac{\partial x^l}{\partial y^i} \frac{\partial x^p}{\partial y^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \Gamma_{lp}^m + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^k \partial y^i} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial x^l}. \quad (39.28)$$

练习 39.2 从 (39.26) 和 (39.27) 导出上面的方程。

只有 (39.28) 等号右边的第一项符合张量变换规则 [(2.1)]。因此, 第二项的出现说明 Γ_{ik}^j 不是一个张量场, 其意味着 Γ_{ik}^j 在一个确定点 $p \in M$ 的消失在坐标的一个改变下不是一个不变的性质。实际上, 在确定条件下, Γ_{ik}^j 可以使得在局域坐标的一个合适选择下对于 M 中任意点消失。(见下面的定理 39.2)。让我们现在来看看如何求在 M 上一个任意混合型张量场的协变导数, 即: 张量丛 $T_s^r(M)$ 的一个截面 [c.f. (30.16)]。从一个向量场 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 开始。通过

(35.2), 我们有

$$\begin{aligned} DX &= dX^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} + X^i D \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = dX^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} + X^i \omega_j^i \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= (dX^i + X^j \omega_j^i) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} dx^j + X^k \Gamma_{kj}^i dx^j \right) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &\equiv X_{,j}^i dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i}, \end{aligned} \quad (39.29)$$

其中

$$X_{,j}^i \equiv \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma_{kj}^i. \quad (39.30)$$

DX 是向量丛 $T^*(M) \otimes T(M)$ 的一个截面; 换句话说, 它是 M 上一个 $(1,1)$ -型张量场, 并且从一个 $(1,0)$ -型张量场 (即: X) 获得. 方程 (39.30) 是经典张量分析中一个基本公式.

如 Chapter 35 中讨论, 给定 M 上一个仿射联络 [向量丛 $T(M)$ 上一个联络], 对偶丛 $T^*(M)$ [c.f. (35.52)] 上存在一个诱导联络. 对于 $(s^*)^i = dx^i$, $1 \leq i \leq n$, 这个联络由下式给出

$$D(s^*)^i = -\omega_j^i (s^*)^j = -\Gamma_{jk}^i dx^k \otimes dx^j. \quad (39.31)$$

对于一个余切向量场 X^* 具有局域表达 $X^* = X_i dx^i$, 我们有

$$DX^* = (dX_i - X_j \omega_i^j) \otimes dx^i = X_{i,j} dx^j \otimes dx^i,$$

其中

$$X_{i,j} \equiv \frac{\partial X_i}{\partial x^j} - X_k \Gamma_{ij}^k. \quad (39.32)$$

[将其与 (39.30) 比较]. DX^* 是一个 $(0,2)$ -型张量场. 方程 (39.30) 和 (39.32) 允许我们来算一个任意阶混合型张量场的协变导数. 假设 T 是一个 (r,s) -型张量场. 则 DT 是一个 $(r,s+1)$ -型张量场. 考虑一个 $(2,1)$ -型张量场的例子, 局域表述为

$$T = T_k^{ij} dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (39.33)$$

则

$$DT = T_{k,l}^{ij} dx^l \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (39.34)$$

其中

$$T_{k,l}^{ij} \equiv \frac{\partial T_k^{ij}}{\partial x^l} + \Gamma_{hl}^i T_k^{hj} + \Gamma_{hl}^j T_k^{ih} - \Gamma_{kl}^h T_h^{ij}. \quad (39.35)$$

练习 39.3 证明 (39.34) 和 (39.35) 通过在 DT 手上运用 “Leibniz 法则”:

$$\begin{aligned} DT &= dT_k^{ij} \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} + T_k^{ij} D(dx^k) \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= T_k^{ij} \otimes dx^k \otimes D \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} + T_k^{ij} \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes D \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right), \end{aligned} \quad (39.36)$$

并且通过在 T_k^{ij} 的独立指标上运用 (39.30) 和 (39.32)。

考虑赋予了一个仿射联络 D 的一个 Riemann 流形 M 中的一个参数化曲线 $C: x^i(t)$, 而 M 上一个切向量场 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 即: 一个截面 $s \in \Gamma(T(M))$ 。沿着曲线 C , X 可以被写成

$$X(t) = X^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{C(t)}. \quad (39.37)$$

如果沿着 C , X 的方向协变导数 (c.f. 35.2) 消失, 即:

$$D_{X_C} X = 0, \quad (39.38)$$

其中

$$X_C = \frac{dx^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (39.39)$$

是曲线 C 上的切向量场, 则 $X(t)$ 被称为是沿着 C **平行的 (parallel)** (c.f. 定义 35.4), 或者是沿着 C **平行移动的 (parallelly displaced)**。从 (35.3), 条件 (39.38) 等价于 $\langle X_C, DX \rangle = 0$, 或者从 (39.29), 有

$$\left\langle \frac{dx^k}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}, X^i_{,j} dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \left(X^i_{,k} \frac{dx^k}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = 0. \quad (39.40)$$

因为 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ 在其它位置是线性无关的, (39.40) 意味着 $X^i_{,k} \frac{dx^k}{dt} = 0$, $i = 1, \dots, n$ 。从 (39.30) 得到如果 X 沿着 C 是平行的, 则有

$$\boxed{\frac{dX^i}{dt} + X^j \Gamma^i_{jk} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n}. \quad (39.41)$$

上面的条件也可以被写成

$$\frac{DX}{dt} = 0. \quad (39.42)$$

方程 (39.41) 是一阶常微分方程组。给定初始条件 $X^i(0)$, 即: 一些 $X \in T_{C(0)}M$, $X(t)$ 在曲线 $C(t)$ 中的任意点已经确定。因此平行移动的条件建立了沿着曲线 $C(t)$ 的任意两点 $C(t_1)$ 和 $C(t_2)$ 处的切空间 $T_{C(t_1)}(M)$ 和 $T_{C(t_2)}(M)$ 之间的一个同构。

特别令人感兴趣的是**自平行性 (self-parallelism)** 的情况, 即曲线 $C(t)$ 的切向量场 X_C 是沿着 C 平行的。我们称曲线 C 是**自平行的 (self-parallel)**, 或一个**测地线 (geodesic)**。In this case 在这种情况下 $X^i = \frac{dx^i}{dt}$, 并且 (39.41) 给出了下面对于一个曲线 $C: x^i(t)$ 是一个测地线的条件:

$$\boxed{\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n}. \quad (39.43)$$

这是一个二阶常微分方程组。这些方程的理论保证存在一个唯一经过 M 给定点且在该点处与一个给定切向量相切的测地线。

我们现在将考虑一个 Riemann 流形 M 上一个仿射联络 2-形式的曲率矩阵 ω 。令 ω 用 Christoffel 符号局域给出为

$$\omega^j_i = \Gamma^j_{ik} dx^k. \quad (39.44)$$

则通过回忆 (35.18), 有

$$\begin{aligned}\Omega_i^j &= d\omega_i^j - \omega_i^h \wedge \omega_h^j = \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^k - \Gamma_{il}^h \Gamma_{hk}^j dx^l \wedge dx^k \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^l} + \Gamma_{il}^h \Gamma_{hk}^j - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{hl}^j \right) dx^k \wedge dx^l .\end{aligned}\quad (39.45)$$

一个仿射联络的曲率张量 (curvature tensor) R_{ikl}^j 定义为 [c.f. (35.45)]

$$\Omega_i^j \equiv \frac{1}{2} R_{ikl}^j dx^k \wedge dx^l , \quad (39.46)$$

其中

$$R_{ikl}^j = \frac{\partial \Gamma_{il}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^l} + \Gamma_{il}^h \Gamma_{hk}^j - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{hl}^j . \quad (39.47)$$

注意到通过观察上面的方程,

$$R_{ikl}^j = -R_{ilk}^j . \quad (39.48)$$

我们需要说明曲率张量是通过考虑局域坐标的一个变换来全局定义的。假设 $(W; y^i)$ 是 M 上另一局域坐标系。则在 $U \cap W \neq \emptyset$ 中, 局域标架场 S' [由 (39.21) 给出] 与局域标架场 S [由 (39.20) 给出] 相关通过 $S' = J_{WU} S$, 其中 J_{WU} 是 (39.24) 给出的 Jacobi 行列式。从 (35.13) 和 (35.25) 得到: 在坐标系 $(W; y^i)$ 下, 曲率矩阵 Ω' 由下式给出

$$\Omega' = J_{WU} \cdot \Omega \cdot J_{WU}^{-1} . \quad (39.49)$$

写成分量形式为

$$(\Omega')_i^j = \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \Omega_p^q \frac{\partial y^j}{\partial x^q} . \quad (39.50)$$

定义曲率张量 $(R')_{ikl}^j$ 为

$$(\Omega')_i^j \equiv \frac{1}{2} (R')_{ikl}^j dy^k \wedge dy^l , \quad (39.51)$$

我们看到

$$(R')_{ikl}^j = R_{prs}^q \frac{\partial y^j}{\partial x^q} \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^r}{\partial y^k} \frac{\partial x^s}{\partial y^l} . \quad (39.52)$$

将这个方程与 (2.1) 比较, 我们看到 R_{ikl}^j 满足对于一个 $(1,3)$ -型张量的变换规则。因此具有分量 R_{ikl}^j 的曲率张量 R 是一个与局域坐标无关的全局物件, 但是其可以被局域表述为

$$R = R_{ikl}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i \otimes dx^k \otimes dx^l . \quad (39.53)$$

我们从 (35.27a) 和 (35.27b) 回忆 $R(X, Y) : \Gamma(T(M)) \rightarrow \Gamma(T(M))$, $X, Y \in \Gamma(T(M))$, 从切向量场到切向量场的映射。令切向量场 X, Y, Z 有局域表达

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} , \quad Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} , \quad Z = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i} . \quad (39.54)$$

则 (35) 产生

$$R(X, Y)Z = Z^i \langle X \wedge Y, \Omega_i^j \rangle \frac{\partial}{\partial x^j} = R_{ikl}^j Z^i X^k Y^l \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (39.55)$$

其中, 第二个等号来自于 (39.46), (28.28) 和对称性质 (39.48)。

练习 39.4 说明 (39.55) 的第二个等号是合理的。

通过在 (39.55) 中替换 X 为 $\frac{\partial}{\partial x^k}$, Y 为 $\frac{\partial}{\partial x^l}$ 和 Z 为 $\frac{\partial}{\partial x^i}$, 我们有

$$R_{ikl}^j = \left\langle R \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j \right\rangle. \quad (39.56)$$

对于一个给定仿射联络 D 局域由 Christoffel 符号 Γ_{ik}^j 表征, 定义量

$$T_{ik}^j \equiv \Gamma_{ki}^j - \Gamma_{ik}^j. \quad (39.57)$$

我们之前的讨论 [c.f. (39.28)] 暗示 Γ_{ik}^j 不是一个张量。然而, T_{ik}^j 是一个 $(1, 2)$ -型张量, 因为 (39.28) 也意味着

$$\begin{aligned} (T')_{ik}^j &= (\Gamma')_{ki}^j - (\Gamma')_{ik}^j \\ &= \frac{\partial x^l}{\partial y^k} \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \Gamma_{lp}^m + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^i \partial y^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} - \left(\frac{\partial x^l}{\partial y^i} \frac{\partial x^p}{\partial y^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \Gamma_{lp}^m + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^k \partial y^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^l} \right) \\ &= \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^k} (\Gamma_{lp}^m - \Gamma_{pl}^m) \\ &= \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^k} T_{pl}^m, \end{aligned} \quad (39.58)$$

其暗示 T_{ik}^j 在坐标的一个局域改变下张量一样变换。 $(1, 2)$ -型张量 T_{ik}^j 被称为仿射联络 D 的 **挠率张量 (torsion tensor)**。很明显从 (39.57) 得到挠率张量有下面对称性质:

$$T_{ik}^j = -T_{ki}^j. \quad (39.59)$$

挠率张量可以自然视为一个从 $\Gamma(T(M)) \times \Gamma(T(M))$ 到 $\Gamma(T(M))$ 的映射。实际上, 假设 X, Y 是 M 上任意两个切向量场。则挠率张量

$$T = T_{ik}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \otimes dx^i \otimes dx^k \quad (39.60)$$

作用在配对 (X, Y) 来产生

$$T(X, Y) = T_{ik}^j X^i Y^k \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (39.61)$$

类似于定理 35.2 [(35.32)], 我们有

$$\boxed{T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]}. \quad (39.62)$$

练习 39.5 说明在局域坐标中

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} . \quad (39.63)$$

练习 39.6 运用 (39.57), (39.61) 和由 (39.30) 给出的对于协变微分的分析表达来证明 (39.62)。

定义 39.3 如果一个仿射联络 D 的挠率张量消失, 则 D 被称为是**无挠的** (*torsion-free*)。

方程 (39.62) 给出挠率张量的一个几何意义。考虑 $X = \epsilon \frac{\partial}{\partial x^i}$ 和 $Y = \epsilon \frac{\partial}{\partial x^j}$, 则 $[X, Y] = 0$ 。如果 $T = 0$, 沿着 $\epsilon \frac{\partial}{\partial x^i}$ 平行移动无穷向量 $\epsilon \frac{\partial}{\partial x^j}$ 的结果与沿着 $\epsilon \frac{\partial}{\partial x^j}$ 平行移动 $\epsilon \frac{\partial}{\partial x^i}$ 相同, 即:

$$D_{(\epsilon \frac{\partial}{\partial x^i})} \left(\epsilon \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = D_{(\epsilon \frac{\partial}{\partial x^j})} \left(\epsilon \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

(见 Figure 39.1)。

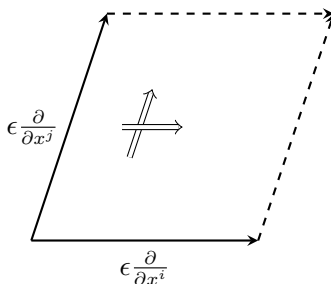


Figure 39.1

练习 39.7 用 Christoffel 符号 Γ_{ik}^j 给定一个仿射联络 D , 说明我们总是能构造一个无挠联络 D' 用 Christoffel 符号

$$\tilde{\Gamma}_{ik}^j = \frac{1}{2} (\Gamma_{ik}^j + \Gamma_{ki}^j) . \quad (39.64)$$

显式检验 $\tilde{\Gamma}_{ik}^j$ 满足变换规则 (39.28)。

假设 D 是一个无挠仿射联络在一个点 $p \in M$ 附近的一个局域坐标邻域 $(W; y^i)$ 中具有联络系数 $(\Gamma')_{ik}^j (= (\Gamma')_{ki}^j)$ 。令

$$x^i = y^i + \frac{1}{2} (\Gamma')_{mn}^i (p) (y^m - y^m(p)) (y^n - y^n(p)) . \quad (39.65)$$

则

$$\left. \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right|_p = \delta_j^i , \quad \left. \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^k} \right|_p = (\Gamma')_{jk}^i (p) . \quad (39.66)$$

因此, 矩阵 $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right)$ 在 p 附近是非退化的, 并且 (39.65) 构成 p 附近的一个局域坐标变换。则从 (39.28) 得到

$$\begin{aligned} (\Gamma')_{ik}^j (p) &= \delta_i^l \delta_k^n \delta_m^j \Gamma_{ln}^m (p) + (\Gamma')_{ki}^l (p) \delta_l^j \\ &= \Gamma_{ik}^j (p) + (\Gamma')_{ki}^j (p) = \Gamma_{ik}^j (p) + (\Gamma')_{ik}^j (p) , \end{aligned} \quad (39.67)$$

其意味着

$$\Gamma_{ik}^j(p) = 0 . \quad (39.68)$$

我们因此建立下面重要事实。

定理 39.2 如果 D 是 M 上一个无挠仿射联络, 则在任意点 $p \in M$, 存在一个局域坐标邻域 $(U; x^i)$ 使得对应联络系数 Γ_{ik}^j 在 p 出消失。

下面是对于一个无挠仿射联络的曲率张量的一个有用的恒等式。

定理 39.3 如果 D 是 M 上一个无挠仿射联络, 则 *Bianchi* 恒等式有形式

$$R_{ikl,h}^j + R_{ilh,k}^j + R_{ihk,l}^j = 0 . \quad (39.69)$$

证明: 令 ω 是一个无挠仿射联络的 1-形式的联络矩阵, 且 $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ 是对应 2-形式的曲率矩阵 *Bianchi* 恒等式由下式给出 [c.f. (35.36)]

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega . \quad (39.70)$$

写成矩阵元素

$$d\Omega_i^j = \omega_i^p \wedge \Omega_p^j - \Omega_i^p \wedge \omega_p^j . \quad (39.71)$$

根据 (39.46) 和 (39.44), 上面的方程等价于

$$\frac{\partial R_{ikl}^j}{\partial x^h} dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l = (\Gamma_{ih}^p R_{pkl}^j - \Gamma_{ph}^p R_{ikl}^j) dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l . \quad (39.72)$$

因为 [c.f. (39.35)]

$$R_{ikl,h}^j = \frac{\partial R_{ikl}^j}{\partial x^h} + \Gamma_{ph}^j R_{ikl}^p - \Gamma_{ih}^p R_{pkl}^j - \Gamma_{kh}^p R_{ipl}^j - \Gamma_{lh}^p R_{ikp}^j , \quad (39.73)$$

方程 (39.72) 意味着

$$R_{ikl,h}^j dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l = -(\Gamma_{kh}^p R_{ipl}^j + \Gamma_{lh}^p R_{ikp}^j) dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l . \quad (39.74)$$

运用无挠性质 ($\Gamma_{lh}^p = \Gamma_{hl}^p$) 和 $R_{ikp}^j = -R_{ipk}^j$ 的事实 [(39.48)], 上面方程的等号右边的第二项可以被写成

$$\begin{aligned} \Gamma_{lh}^p R_{ikp}^j dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l &= -\Gamma_{hl}^p R_{ipk}^j dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l \\ &= -\Gamma_{kh}^p R_{ipl}^j dx^k \wedge dx^l \wedge dx^h \\ &= -\Gamma_{kh}^p R_{ipl}^j dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l . \end{aligned} \quad (39.75)$$

从 (39.74) 得到

$$R_{ikl,h}^j dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l = 0 . \quad (39.76)$$

通过给等号左边加两个从交换指标 ($k \rightarrow l, l \rightarrow h, h \rightarrow k$) 获得的类似的项 (每项都为零), 我们获得

$$(R_{ikl,h}^j + R_{ilh,k}^j + R_{ihk,l}^j) dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l = 0 . \quad (39.77)$$

因为括号内的量关于指标 h, k, l , 是完全反对称的, 外积 $dx^h \wedge dx^k \wedge dx^l$ 也是一样完全反对称, 定理得证. $\square$

一个仿射联络 D 的曲率张量 R_{ikl}^j 和挠率张量 T_{ik}^j 完全确定任意混合型张量的方向协变导数的对易关系。我们将用一些例子来阐明这一事实。首先考虑 M 上一个函数 (一个标量场)。我们有下面的 (39.30) 的类似式

$$D_{\partial_i} f \equiv f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (39.78)$$

记

$$f_{,ij} \equiv (f_{,i})_{,j}. \quad (39.79)$$

则通过 (39.32), 有

$$f_{,ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - f_{,k} \Gamma_{ij}^k. \quad (39.80)$$

因此,

$$f_{,ij} - f_{,ji} = f_{,k} \Gamma_{ji}^k - f_{,k} \Gamma_{ij}^k = f_{,k} T_{ij}^k. \quad (39.81)$$

类似地, 对于一个切向量场 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, 我们定义

$$X_{,pq}^i \equiv (X_{,p}^i)_{,q}. \quad (39.82)$$

因此, 通过 (39.30) 和 (39.32), 有

$$X_{,pq}^i = \frac{\partial}{\partial x^q} (X_{,p}^i) + X_{,p}^k \Gamma_{kq}^i - X_{,l}^i \Gamma_{pq}^l, \quad (39.83)$$

和

$$\begin{aligned} & X_{,pq}^i - X_{,qp}^i \\ &= \frac{\partial}{\partial x^q} (X_{,p}^i) - \frac{\partial}{\partial x^p} (X_{,q}^i) + X_{,p}^k \Gamma_{kq}^i - X_{,l}^i \Gamma_{pq}^l - X_{,q}^k \Gamma_{kp}^i + X_{,l}^i \Gamma_{qp}^l \\ &= \frac{\partial}{\partial x^q} \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^p} + X^k \Gamma_{kp}^i \right) - \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^q} + X^k \Gamma_{kq}^i \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^p} + X^l \Gamma_{lp}^k \right) \Gamma_{kq}^i - \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^q} + X^l \Gamma_{lq}^k \right) \Gamma_{kp}^i + X_{,l}^i T_{pq}^l \\ &= -X^k \left(\frac{\partial \Gamma_{kp}^i}{\partial x^q} - \frac{\partial \Gamma_{kq}^i}{\partial x^p} + \Gamma_{kq}^l \Gamma_{lp}^i - \Gamma_{kp}^l \Gamma_{lq}^i \right) + X_{,l}^i T_{pq}^l. \end{aligned} \quad (39.84)$$

通过 (39.47), 得到

$$\boxed{X_{,pq}^i - X_{,qp}^i = -X^k R_{kpq}^i + X_{,l}^i T_{pq}^l}. \quad (39.85)$$

类似地, 对于一个协变向量场 X_i , 有

$$\boxed{X_{i,pq} - X_{i,qp} = X_l R_{ipq}^l + X_{i,l} T_{pq}^l}. \quad (39.86)$$

一个任意混合型张量的对易关系可以从 (39.85) 和 (39.86) 获得。举例, 一个 $(2, 1)$ -型张量 T_k^{ij} , 我们有

$$T_{k,pq}^{ij} - T_{k,qp}^{ij} = -T_k^{lj} R_{lpq}^i - T_k^{il} R_{lpq}^j + T_l^{ij} R_{kpq}^l + T_{k,l}^{ij} T_{pq}^l. \quad (39.87)$$

练习 39.8 用 (39.32) 验证 (39.86); 并用 (39.85) 和 (39.86) 验证 (39.87)。

我们现在回头来考虑 Riemann(或赝 Riemann) 度规 g_{ij} 和其与仿射联络的关系。

定义 39.4 假设 M 是定义了 Riemann(或赝 Riemann) 度规 $G = (g_{ij})$ 的一个 Riemann 流形并且 D 是 M 上的一个仿射联络。如果

$$DG = 0, \quad (39.88)$$

则 D 被称为 M 上一个**度规相容联络** (*metric-compatible connection*)。

我们将说明上面定义的度规相容意味着在平行移动下标量基保持。记 G 为 $G = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, 并且用 $\omega = (\omega_i^j)$ 表达在局域标架场 $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 下 D 的 1-形式的联络矩阵:

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \omega_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (39.89)$$

$$D(dx^i) = -\omega_j^i dx^j, \quad (39.90)$$

我们有

$$\begin{aligned} DG &= dg_{ij} \otimes dx^i \otimes dx^j - g_{ij} \omega_l^i dx^l \otimes dx^j - g_{ij} \omega_l^j dx^i \otimes dx^l \\ &= (dg_{ij} - \omega_i^k g_{kj} - \omega_j^k g_{ik}) \otimes dx^i \otimes dx^j. \end{aligned} \quad (39.91)$$

因此, (39.88) 等价于

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ik}, \quad (39.92)$$

或者, 在矩阵记号中,

$$dG = \omega \cdot G + G \cdot \omega^T, \quad (39.93)$$

其中

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ & \cdots & \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}, \quad (39.94)$$

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^n \\ & \cdots & \\ \omega_n^1 & \cdots & \omega_n^n \end{pmatrix}, \quad (39.95)$$

而 ω^T 是 ω 的转置。用联络系数 (Christoffel 符号) Γ_{ik}^j , (39.92) 可以被写成

$$dg_{ij} = g_{kj} \Gamma_{ih}^k dx^h + g_{ik} \Gamma_{jh}^k dx^h, \quad (39.96a)$$

或者

$$g_{ij,h} = 0. \quad (39.96b)$$

最后一个方程意味着, 对于一个度规相容张量 g_{ij} 在协变微分下表现得像一个常数。

现在考虑向量 $X = X^i \partial_i$ 和 $Y = Y^i \partial_i$ 沿着一条曲线 $C: x^i(t)$ 的平行移动。通过 (39.41),

我们有

$$\frac{dX^i}{dt} + X^j \Gamma_{jk}^i \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad \frac{dY^i}{dt} + Y^j \Gamma_{jk}^i \frac{dx^k}{dt} = 0. \quad (39.97)$$

因此 X 和 Y 的标量积, $g_{ij}X^iY^j$, 沿着曲线 C 变化, 根据

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_{ij}X^iY^j) &= \frac{dg_{ij}}{dt}X^iY^j + g_{ij}\frac{dX^i}{dt}Y^j + g_{ij}X^i\frac{dY^j}{dt} \\ &= \left(\frac{dg_{ij}}{dt} - g_{kj}\Gamma_{ih}^k \frac{dx^h}{dt} - g_{ik}\Gamma_{jh}^k \frac{dx^h}{dt} \right) X^iY^j. \end{aligned} \quad (39.98)$$

如果 (39.96) 保持, 上面的项将消失。因此, 如果 D 是度规相容, 当 X 和 Y 是平行移动时, $g_{ij}X^iY^j = \text{常数}$ 。

我们现在来到 Riemann 几何核心事实。

定理 39.4 — Riemann 几何基本定理 (Fundamental Theorem of Riemannian Geometry). 令 M 是一个 Riemann 流形 (定义一个 Riemann 或者 Riemann 度规)。则 M 上存在唯一无挠且度规相容联络, 称为 **Levi-Civita 联络 (Levi-Civita connection)**。

证明: 在一个局域坐标邻域 $(U; x^i)$ 中, 令联络矩阵 ω_i^j 由 $\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j dx^k$ 给出。假设联络是度规相容且无挠的。则通过 (39.92) 和 (39.57), 有

$$dg_{ij} = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ik}, \quad (39.99)$$

$$\Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j. \quad (39.100)$$

定义

$$\Gamma_{ijk} \equiv g_{lj} \Gamma_{ik}^l, \quad \omega_{ik} \equiv g_{lk} \omega_i^l. \quad (39.101)$$

则从 (39.99) 和 (39.100) 得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik}, \quad (39.102)$$

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{kji}. \quad (39.103)$$

另外两个类似于 (39.102) 的方程可以从对应指标 (ijk) 的偶排列 (jki) 和 (kij) 获得:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{jki} + \Gamma_{kji}, \quad (39.104)$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = \Gamma_{kij} + \Gamma_{ikj}. \quad (39.105)$$

计算 (39.104)+(39.105)-(39.102) 并运用 (39.103), 我们有

$$\Gamma_{ikj} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (39.106)$$

因为, 通过 (39.101), 有

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kl} \Gamma_{ilj}, \quad (39.107)$$

方程 (39.106) 意味着

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (39.108)$$

因此, 一个度规相容且无挠的联络的 Christoffel 符号由度规张量确定。

反之, 给定一个度规张量 g_{ij} , 由 (39.108) 定义的量 Γ_{ij}^k 可以通过验证它们在一个局域坐标变化下根据 (39.28) 变换来说明它们是一个 $(1, 2)$ -型张量的分量。因此, Γ_{ikj} 是一个 $(0, 3)$ -型张量。进一步, 很明显由 (39.106) 定义的 Γ_{ikj} 满足 (39.102) 和 (39.103)。因此, (39.108) 唯一确定 M 上度规相容且无挠的联络。□

量 Γ_{ikj} 和 Γ_{ij}^k 分别被称为**第一类和第二类 Christoffel 符号 (Christoffel symbols of the first and second kind)**。

有时候使用一个任意标架场 $e_i = X_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ [c.f. (37.3)] 更方便, 而不是自然标架场 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$, 其中 X_i^k 是局域坐标邻域 $(U; x^i)$ 上的函数。1-形式 $\theta^i \equiv (X^{-1})_j^i dx^j$ [c.f. (37.19)], 其中 X^{-1} 是 X 的逆矩阵, 则构成 $\{e_i\}$ 的一个对偶余标架场, 意思是

$$\langle e_i, \theta^j \rangle = \delta_i^j. \quad (39.109)$$

一个仿射联络由下式给出

$$D \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \omega_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (39.110)$$

我们看到 [c.f. (37.36)]

$$\theta_i^j = (X^{-1})_k^j (dX_i^k + X_i^l \omega_l^k) \quad (39.111)$$

是依赖于标架场 $\{e_i\}$ 的联络 1-形式:

$$De_i = \theta_i^j e_j. \quad (39.112)$$

我们注意到 1-形式 θ^i 和 θ_i^j 在这里引入是 M 上 1-形式, 并且实际上是映射 $f: M \rightarrow P, x \mapsto \{x; e_i\}$ 下的拉回, 类似标记的 1-形式 θ^i 和 θ_i^j 由 (37.19) 和 (37.36) 定义, 其是 M 的标架丛 P 上的形式 (c.f. Chapter 7)。我们有

$$dx^i = X_j^i \theta^j, \quad (39.113)$$

$$dX_i^j = -X_i^k \omega_k^j + X_k^j \theta_i^k. \quad (39.114)$$

对 (39.113) 取外微分, 我们有

$$\begin{aligned} 0 &= dX_j^i \wedge \theta^j + X_j^i d\theta^j = X_j^i (d\theta^j + \theta_k^j \wedge \theta^k) - X_j^k \omega_k^i \wedge \theta^j \\ &= X_j^i (d\theta^j - \theta^k \wedge \theta_k^j) - X_j^k \Gamma_{kl}^i dx^l \wedge \theta^j = X_j^i (d\theta^j - \theta^k \wedge \theta_k^j) - X_j^k \Gamma_{kl}^i X_m^l \theta^m \wedge \theta^j, \end{aligned} \quad (39.115)$$

其中在第二个等号处, (39.114) 已经使用了。通过乘以 X^{-1} , 我们获得

$$d\theta^j - \theta^k \wedge \theta_k^j = (X^{-1})_r^j X_k^p \Gamma_{pq}^r X_l^q \theta^l \wedge \theta^k = \frac{1}{2} (X^{-1})_r^j X_k^p X_l^q T_{pq}^r \theta^k \wedge \theta^l, \quad (39.116)$$

其中, T_{pq}^r 是挠率张量 [(39.57)]。对 (39.114) 外微分产生

$$\begin{aligned} 0 &= -dX_i^k \wedge \omega_k^j - X_i^k d\omega_k^j + dX_k^j \wedge \theta_i^k + X_k^j d\theta_i^k \\ &= (X_i^k \omega_k^l - X_k^l \theta_i^k) \wedge \omega_l^j - X_i^k d\omega_k^j - (X_k^l \omega_l^j - X_l^j \theta_k^l) \wedge \theta_i^k + X_k^j d\theta_i^k \\ &= -X_i^k (d\omega_k^j - \omega_k^l \wedge \omega_l^j) + X_k^j d\theta_i^k + X_k^j \theta_l^k \wedge \theta_i^l = -X_i^k \Omega_k^j + X_k^j (d\theta_i^k - \theta_i^l \wedge \theta_l^k), \end{aligned} \quad (39.117)$$

其中在第二个等号处我们已经使用了 (39.114), 而在第四个等号处我们已经使用了 2-形式的曲率矩阵: $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ [(35.18)] 的定义。因此

$$\begin{aligned} d\theta_i^j - \theta_i^l \wedge \theta_l^j &= X_i^k \Omega_k^j (X^{-1})_l^j = \frac{1}{2} (X^{-1})_l^j X_i^k R_{kmn}^l dx^m \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{2} (X^{-1})_l^j X_i^k X_r^m X_s^n R_{kmn}^l \theta^r \wedge \theta^s. \end{aligned} \quad (39.118)$$

记

$$P_{kl}^j \equiv (X^{-1})_r^j X_k^p X_l^q T_{pq}^r, \quad (39.119)$$

$$S_{ikl}^j \equiv (X^{-1})_q^j X_i^p X_k^r X_l^s R_{prs}^q, \quad (39.120)$$

其分别是挠率和曲率张量, 依赖于 $\{e_i\}$ 和 $\{\theta^i\}$, 方程 (39.116) 和 (39.118) 变成

$$d\theta^j - \theta^k \wedge \theta_k^j = \frac{1}{2} P_{kl}^j \theta^k \wedge \theta^l, \quad (39.121)$$

$$d\theta_i^j - \theta_i^l \wedge \theta_l^j = \frac{1}{2} S_{ikl}^j \theta^k \wedge \theta^l. \quad (39.122)$$

它们被称为联络的**结构方程 (structure equations)**。[与 (31.33) 和 (31.34) 比较], 对于一个无挠的联络, 联络 1-形式 θ_i^j 满足

$$d\theta^i - \theta^j \wedge \theta_j^i = 0. \quad (39.123)$$

ω 的度规相容性允许我们来定义一个反对称 (0,2)-型曲率张量的 2-形式。我们可以对度规相容条件 (39.93) 取外微分来产生

$$d\omega \cdot G - \omega \wedge dG + dG \wedge \omega^T + G \cdot (d\omega)^T = 0, \quad (39.124)$$

其意味着, 再次使用 (39.93), 有

$$d\omega \cdot G - \omega \wedge (\omega \cdot G + G \cdot \omega^T) + (\omega \cdot G + G \cdot \omega^T) \wedge \omega^T + G \cdot (d\omega)^T = 0, \quad (39.125)$$

或

$$(d\omega - \omega \wedge \omega) \cdot G + G \cdot ((d\omega)^T + \omega^T \wedge \omega^T) = 0. \quad (39.126)$$

因为 ω 是 1-形式的一个矩阵, $\omega^T \wedge \omega^T = -(\omega \wedge \omega)^T$ 。其可以如下看出。

$$\begin{aligned} (\omega^T \wedge \omega^T)_\alpha^\beta &= (\omega^T)_\alpha^\gamma \wedge (\omega^T)_\gamma^\beta = \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma \\ &= -\omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha = -(\omega \wedge \omega)_\beta^\alpha = -((\omega \wedge \omega)^T)_\alpha^\beta. \end{aligned}$$

方程 (39.126) 则读出

$$(d\omega - \omega \wedge \omega) \cdot G + G \cdot (d\omega - \omega \wedge \omega)^T = 0 .$$

通过 (35.18), 其导出

$$\Omega \cdot G + G \cdot \Omega^T = 0 .$$

因为 $G = (g_{ij})$ 是对称的, 我们有

$$\Omega \cdot G + (\Omega \cdot G)^T = 0 . \quad (39.127)$$

现在定义

$$\Omega_{ij} \equiv (\Omega \cdot G)_{ij} = \Omega_i^k g_{kj} . \quad (39.128)$$

方程 (39.127) 则变成

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0 . \quad (39.129)$$

Ω_{ij} 即为反对称曲率张量的 2-形式。方程 (39.128) 也意味着

$$\Omega_{ij} = (d\omega_i^k - (\omega \wedge \omega)_i^k) g_{kj} = (d\omega_i^k) g_{kj} - \omega_i^l \wedge \omega_l^k g_{kj} . \quad (39.130)$$

另一方面, 如果我们也定义

$$\omega_{ij} \equiv \omega_i^k g_{kj} , \quad (39.131)$$

则

$$\begin{aligned} d\omega_{ij} &= d(\omega_i^k g_{kj}) = (d\omega_i^k) g_{kj} - \omega_i^k \wedge dg_{kj} = (d\omega_i^k) g_{kj} - \omega_i^k \wedge (\omega_k^l g_{lj} + \omega_j^l g_{kl}) \\ &= (d\omega_i^k) g_{kj} - \omega_i^l \wedge \omega_l^k g_{kj} - \omega_i^k \wedge \omega_{jk} , \end{aligned} \quad (39.132)$$

其中第三个等号处, 我们已经对于 dg_{kj} 采用度规相容条件 (39.92)。因此, (39.130) 给出

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \omega_i^k \wedge \omega_{jk} . \quad (39.133)$$

让我们现在来定义 (0,4)-型曲率章来个

$$R_{ijkl} \equiv R_i^h{}_{kl} g_{hj} . \quad (39.134)$$

则通过回忆 (39.46), 我们有

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl} dx^k \wedge dx^l . \quad (39.135)$$

曲率张量 R_{ijkl} 可以用 Christoffel 符号 $\Gamma_{i \ k}^j$ 和 Γ_{ijk} 使用 (39.47) 和 (39.101) 计算。这些方程

给出

$$\begin{aligned}
 R_{ijkl} &= R_i^h{}_{kl} g_{hj} \\
 &= g_{hj} \left(\frac{\partial \Gamma_i^h{}_l}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_i^h{}_k}{\partial x^l} + \Gamma_i^m{}_l \Gamma_m^h{}_k - \Gamma_i^m{}_k \Gamma_m^h{}_l \right) \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial x^l} - \Gamma_i^h{}_l \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^k} + \Gamma_i^h{}_k \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^l} + \Gamma_i^m{}_l \Gamma_{mjk} - \Gamma_i^m{}_k \Gamma_{mjl} .
 \end{aligned} \tag{39.136}$$

在上面方程中对 $\partial g_{hj}/\partial x^k$ 和 $\partial g_{hj}/\partial x^l$ 使用 (39.102), 我们获得

$$R_{ijkl} = \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial x^l} + \Gamma_i^h{}_k \Gamma_{jhl} - \Gamma_i^h{}_l \Gamma_{jhk} . \tag{39.137}$$

曲率张量 R_{ijkl} 有下面重要的对称性质。

定理 39.5 一个 Riemann 流形的曲率张量 R_{ijkl} 满足下面:

$$1) \quad R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} ; \tag{39.138}$$

$$2) \quad R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0 ; \tag{39.139}$$

$$3) \quad R_{ijkl} = R_{klij} . \tag{39.140}$$

证明: 1) 这是 (39.129) 和 (39.137) 的一个直和。

2) 因为 Levi-Civita 联络是无挠的, 我们有从 (39.123),

$$dx^i \wedge \omega_i^k = 0 , \tag{39.141}$$

并且因此

$$dx^i \wedge \omega_i^k g_{kj} = dx^i \wedge \omega_{ij} = 0 . \tag{39.142}$$

对上面的方程取外微分并且使用 (39.133), 我们有

$$dx^i \wedge d\omega_{ij} = dx^i \wedge (\Omega_{ij} - \omega_i^k \wedge \omega_{jk}) = 0 . \tag{39.143}$$

从 (39.141) 得到

$$dx^i \wedge \Omega_{ij} = 0 . \tag{39.144}$$

对上面方程中的 Ω_{ij} 使用 (39.135) 和 $R_{ijkl} = -R_{jikl}$ 的事实 [从 1)], 我们得到

$$R_{jikl} dx^i \wedge dx^k \wedge dx^l = 0 . \tag{39.145}$$

通过增加从上面方程中交换指标 (i, k, l) 获得两项, 我们有

$$(R_{jikl} + R_{jkli} + R_{jlik}) dx^i \wedge dx^k \wedge dx^l = 0 . \tag{39.146}$$

通过 1) 每个 R 关于后两个指标是反对称的。则可以很容易看出上面方程中括号中的三个 R 关于后三个指标 i, k 和 l 是反对称的。但 $dx^i \wedge dx^k \wedge dx^l$ 关于相同三个指标也是反对称的。因

此, $\{dx^i \wedge dx^k \wedge dx^l \mid i < k < l\}$ 的线性无关性意味着 2)。

3) 将 2) 写成两种不同的方式:

$$R_{jikl} + R_{jkli} + R_{jlki} = 0, \quad (39.147)$$

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0. \quad (39.148)$$

从 (39.148) 减去 (39.147) 并运用 1), 我们有

$$2R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{ljik} + R_{iljk} + R_{jkil} = 0. \quad (39.149)$$

令 $i \leftrightarrow k, j \leftrightarrow l$, 上面的方程出现为

$$2R_{klij} + R_{kijl} + R_{jlki} + R_{kjli} + R_{likj} = 0. \quad (39.150)$$

但再一次从 1), $R_{iklj} = R_{kijl}$, $R_{ljik} = R_{jlki}$ 等。因此, $R_{ijkl} = R_{klij}$ 。

□

练习 39.9 说明类似于定理 39.5 的性质 2), 我们有

$$R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i = 0. \quad (39.151)$$

练习 39.10 运用 (39.96b) 说明类似于 (39.69)(定理 39.3), **Bianchi 恒等式 (Bianchi identity)** 也可以表述为

$$\boxed{R_{ijkl,h} + R_{ijlh,k} + R_{ijhk,l} = 0}. \quad (39.152)$$

练习 39.11 说明由于定理 39.5 的对称性质, Riemann 曲率张量 R_{ijkl} 的独立分量的个数是 $n^2(n^2 - 1)/12$, 其中 n 是 Riemann 流形的维度。

Riemann 曲率张量 R_{ijkl} , 具有分量的最大数, 是一个复杂的对象 (对于 Lorentz 时空, 其中 $n = 4$, 它有 20 个分量)。事实证明, 可以通过一个更简单的对象来描述 R_{ijkl} , 称为截曲率。

因为 R_{ijkl} 是一个 $(0,4)$ -型张量场, 在每一点 $p \in M$, 可以视为一个多重线性函数 $R : T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \times T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$, 其中

$$R = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l. \quad (39.153)$$

因此, 对于由 $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Z = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}, W = W^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 给出的 $X, Y, Z, W \in T_p(M)$, 有

$$R(X, Y, Z, W) = \langle X \otimes Y \otimes Z \otimes W, R \rangle = R_{ijkl} X^i Y^j Z^k W^l. \quad (39.154)$$

特别是

$$R_{ijkl} = R \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right). \quad (39.155)$$

通过 (39.55), 对于 $Z, W \in T_p(M)$, $R(Z, W)$ (曲率算符) 是从 $T_p(M)$ 到 $T_p(M)$ 的一个线性

映射:

$$R(Z, W)X = R_{ikl}^j X^i Z^k W^l \frac{\partial}{\partial x^j} . \quad (39.156)$$

从 (39.134) 得到

$$R(X, Y, Z, W) = (R(Z, W)X) \cdot Y , \quad (39.157)$$

其中, 点乘意思是 Riemann 度规 g_{ij} 的标量积。

通过定理 39.5, 4-线性函数 $R(X, Y, Z, W)$ 有下面的对称性质:

$$1) \quad R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = -R(X, Y, W, Z) ; \quad (39.158)$$

$$2) \quad R(X, Y, Z, W) + R(X, Z, W, Y) + R(X, W, Y, Z) = 0 ; \quad (39.159)$$

$$3) \quad R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y) . \quad (39.160)$$

使用度规张量 G , 我们可以定义 4-线性函数

$$G(X, Y, Z, W) \equiv G(X, Z)G(Y, W) - G(X, W)G(Y, Z) . \quad (39.161)$$

可以直接检验 $G(X, Y, Z, W)$ 也满足上面的对称性质 1), 2), 3)。

练习 39.12 如果 $X, Y \in T_p(M)$, 说明

$$G(X, Y, X, Y) = |X|^2 |Y|^2 \sin^2 \theta ,$$

其中, θ 是 X 和 Y 之间的角度。因此, $G(X, Y, X, Y)$ 是以 X 和 Y 为平行四边形边界的面积的平方。

假设 X, Y 生成 $T_p(M)$ 的一个二维子空间 E 。令 X', Y' 是 E 中另两个线性无关的向量。则 X', Y' 也生成 E , 并且它们通过一个非退化线性变换与 X, Y 相关联:

$$X' = aX + bY , \quad Y' = cX + dY , \quad (ad - bc \neq 0) .$$

运用上面 1) 到 3) 的性质和 R 是 4-线性函数的事实, 可以直接来说明

$$R(X', Y', X', Y') = (ad - bc)^2 R(X, Y, X, Y) . \quad (39.162)$$

练习 39.13 验证 (39.162)。

通过相同的象征,

$$G(X', Y', X', Y') = (ad - bc)^2 G(X, Y, X, Y) . \quad (39.163)$$

因此

$$\frac{R(X', Y', X', Y')}{G(X', Y', X', Y')} = \frac{R(X, Y, X, Y)}{G(X, Y, X, Y)} , \quad (39.164)$$

其意味着 $R(X, Y, X, Y)/G(X, Y, X, Y)$ 只取决于子空间 $E \subset T_p(M)$, 并且与 E 的基 $\{X, Y\}$

的选择无关。我们称量

$$K(X, Y) = K(E) \equiv -\frac{R(X, Y, X, Y)}{G(X, Y, X, Y)}, \quad (39.165)$$

其中, $\{X, Y\}$ 是二维子空间 $E \subset T_p(M)$ 的任意基, (p, E) 处 M 的**截曲率 (sectional curvature)**。历史上很重要的一个特殊情况是当 M 是三维 Euclid 空间中的一个曲面, 其中 K 是曲面上一个点处曲面的所谓**总曲率 (total curvature)**, 或 **Gauss 曲率 (Gaussian curvature)**。它由下式给出

$$K = -\frac{R_{1212}}{g}, \quad (39.166)$$

其中

$$g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2, \quad (39.167)$$

并且, 通过 (39.137), 有

$$R_{1212} = \frac{\partial \Gamma_{122}}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{121}}{\partial x^2} + \Gamma_{11}^h \Gamma_{2h2} - \Gamma_{12}^h \Gamma_{2h1}. \quad (39.168)$$

练习 39.14 对于三维 Euclid 空间中半径为 r 的球面, 从诱导度规开始 (依赖于自然坐标 θ, ϕ)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (39.169)$$

并且使用 (39.106) 到 (39.108) 来计算 Christoffel 符号 Γ_{ijk} 和 $\Gamma_i^j{}_k$, $i, j, k = 1, 2$ 。说明

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{121} = 0, \quad (39.170)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \cot \theta, \quad (39.171)$$

$$\Gamma_{221} = \Gamma_{122} = r^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (39.172)$$

则使用 (39.168) 来说明

$$R_{1212} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad (39.173)$$

并且因此 Gauss 曲率由下式给出

$$K = \frac{1}{r^2}. \quad (39.174)$$

练习 39.15 从 (31.36) 回忆, 依赖于正交规范标架场

$$e_1 = e_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad e_2 = e_\phi = \frac{1}{r \sin \theta},$$

Levi-Civita 联络的联络矩阵由下式给出

$$(\theta_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & \cos \theta d\phi \\ -\cos \theta d\phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (39.175)$$

说明曲率 2-形式 $\Omega_i^j = d\theta_i^j - \theta_i^k \wedge \theta_k^j$, 依赖于 (e_1, e_2) 由下式给出

$$(\Omega_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \, d\theta \wedge d\phi \\ \sin \theta \, d\theta \wedge d\phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (39.176)$$

练习 39.16 对 g_{ij} 使用 (39.169) 并对 Γ_{ij}^k 使用 (39.108) 来说明: 依赖于自然标架场 $(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \phi})$, Levi-Civita 联络的联络矩阵由下式给出

$$(\omega_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & \cot \theta \, d\phi \\ -\sin \theta \cos \theta \, d\phi & \cot \theta \, d\theta \end{pmatrix}. \quad (39.177)$$

练习 39.17 正交规范标架场 (e_θ, e_ϕ) 的对偶标架场是余标架场 (θ^1, θ^2) , 其中 [c.f. (31.37)]

$$\theta^1 = r d\theta, \quad \theta^2 = r \sin \theta d\phi. \quad (39.178)$$

记 [与 (39.46) 比较]

$$\Omega_i^j = \frac{1}{2} R_{i \, kl}^j \theta^k \wedge \theta^l, \quad (39.179)$$

其中, Ω_i^j 由 (39.176) 给出。因此

$$\Omega_1^2 = -\sin \theta \, d\theta \wedge d\phi.$$

从 (39.178) 和 (39.179) 说明: 依赖于 (e_θ, e_ϕ) , 有

$$R_{1 \, 12}^2 = -\frac{1}{r^2}. \quad (39.180)$$

因为 (e_θ, e_ϕ) 是标准正交的, 依赖于 (e_θ, e_ϕ) 的 Riemann 度规 (g_{ij}) 简化为 $g_{ij} = \delta_{ij}$ 。因此验证: 依赖于 (e_θ, e_ϕ) , 有

$$R_{1212} = R_{1 \, 12}^2 = -\frac{1}{r^2}, \quad (39.181)$$

并且因此

$$K = \frac{1}{r^2},$$

与 (39.174) 一致。

截曲率的重要性在于下面的定理, 将只表述而不证明。

定理 39.6 一个 Riemann 流形 M 在一个点 $p \in M$ 处的曲率张量 R_{ijkl} 是唯一由所有二维切子空间 $E \subset T_p(M)$ 的截曲率 $K(E)$ 确定。

Riemann 曲率张量 $R_{i \, kl}^j$ 可以被缩并来产生其它有用张量。

定义 39.5 令 $R_{i \, kl}^j$ 是一个 Riemann 流形 M 的曲率张量。 M 的 **Ricci 曲率张量 (Ricci**

curvature tensor) Ric 是 $R_i^j{}_{kl}$ 的缩并, 由下式给出

$$R_{ik} \equiv R_i^j{}_{kj} . \quad (39.182)$$

M 的标曲率 (*scalar curvature*) S 是 Ric 的缩并, 由下式给出

$$S \equiv g^{ij} R_{ij} . \quad (39.183)$$

如果 Ric 恒等于零, 则 M 被称为是 **Ricci 平坦 (Ricci flat)**。一个平坦流形 ($R_i^j{}_{kl} = 0$ 恒成立) 是确定 Ricci 平坦, 但是反之不是正确的。

引理 39.1 Ricci 曲率张量 R_{ij} 是对称的, 并且与自然标量场 $\{\partial/\partial x^i\}$ 相关给出为: 对于任意 $X, Y \in T_p(M)$, 有

$$Ric(X, Y) = \langle R(Y, \partial_k) X, dx^k \rangle , \quad (39.184)$$

证明: 通过 (39.184), 有

$$R_{ij} = Ric(\partial_i, \partial_j) = \langle R(\partial_j, \partial_k) \partial_i, dx^k \rangle = R_{ijk}^l \langle \partial_l, dx^k \rangle = R_{ijk}^l \delta_l^k = R_i^k{}_{jk} \quad (39.185)$$

Ric 的对称性的证明将在下面练习 39.19 之后给出。□

练习 39.18 令 $g = \det(g_{ij})$ 。说明

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \ln |g|^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{1}{2} g^{jm} \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} . \quad (39.186)$$

回忆 (34.106): $\det(e^B) = e^{\text{tr } B}$ 。令 $G = (g_{ij}) = e^B$ 。度规张量则满足

$$\det G = e^{\text{tr } \ln G} . \quad (39.187)$$

练习 39.19 说明

$$\Gamma_{kj}^j = \Gamma_{jk}^j = \frac{1}{2} g^{jm} \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} . \quad (39.188)$$

使用 (39.47) 来写

$$R_{ik} = R_{ikj}^j = \frac{\partial \Gamma_{ij}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^h \Gamma_{hk}^j - \Gamma_{ik}^h \Gamma_{hj}^j , \quad (39.189)$$

$$R_{ki} = R_{kij}^j = \frac{\partial \Gamma_{kj}^j}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^j}{\partial x^j} + \Gamma_{kj}^h \Gamma_{hi}^j - \Gamma_{ki}^h \Gamma_{hj}^j . \quad (39.190)$$

因此

$$R_{ik} - R_{ki} = \frac{\partial \Gamma_{ij}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^j}{\partial x^i} = 0 ,$$

其中, 第二个等号来自于 (39.188)。

依赖于一个正交规范标架场 $\{e_i\}[g_{ij} = G(e_i, e_j) = \delta_{ij}]$, Ricci 曲率张量可以被定义为: 对

于任意 $X, Y \in T_p(M)$, 有

$$\boxed{Ric(X, Y) \equiv \sum_k G(R(Y, e_k)X, e_k)} . \quad (39.191)$$

这很容易从下面看出。令 $X = e_i, Y = e_j$ 。则

$$\begin{aligned} R_{ij} &= Ric(e_i, e_j) = \sum_k G(R(e_j, e_k)e_i, e_k) \\ &= \sum_k R_{i\ jk}^l G(e_l, e_k) = \sum_k R_{i\ jk}^l \delta_{lk} = R_{i\ jl}^l . \end{aligned} \quad (39.192)$$

另一方面

$$R_{ij} = \sum_k R_{i\ jk}^l G(e_l, e_k) = \sum_k R_{i\ jk}^l g_{lk} = \sum_k R_{ikjk} = \sum_{k \neq i} R_{ikjk} . \quad (39.193)$$

在最后一个等号的右边, 求和被限制在 $k \neq i$, 因为通过定理 39.5 的性质 1) [(39.138)], $R_{iijk} = 0$ 。上面方程允许我们来建立依赖于正交规范标架场 $\{e_i\}$ 的 Ricci 曲率和截曲率之间一个有用的关系。我们有, 记 $g_{ij} = \delta_{ij}$,

$$Ric(e_i, e_i) = \sum_{k \neq i} R_{ikik} = \sum_{k \neq i} \frac{R_{ikik}}{g_{ii}g_{kk} - (g_{ik})^2} , \quad (39.194)$$

因此, 从 (39.165), 有

$$\boxed{Ric(e_i, e_i) = - \sum_{k \neq i} K(e_i, e_k)} . \quad (39.195)$$

下面有关 Ricci 张量“散度”的重要事实是 Einstein 广义相对论方程的基础。

定理 39.7 令 R_{ij} 是 Ricci 曲率张量 [(39.182)] 而 S 是一个 Riemann 流形 M 的标曲率 [(39.183)]。则有

$$\boxed{D^i \left(R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} S \right) = 0} , \quad (39.196)$$

其中, $D^i \equiv g^{ij} D_j$ 和 $D_j \equiv D_{\partial/\partial x^j}$ 。

证明: 回忆 Bianchi 恒等式 (39.69):

$$D_h R_{ikl}^j + D_k R_{ilh}^j + D_l R_{ihk}^j = 0 . \quad (39.197)$$

缩并指标对 (j, l) , 我们有

$$D_h R_{ik} - D_k R_{ih} + D_j R_{ihk}^j = 0 . \quad (39.198)$$

乘以 g^{ih} (对 h 求和) 并且使用度规相容性质 $D_k g^{ih} = 0$ [(39.96b)], 我们有

$$D_h R_k^h - D_k S + D_j (g^{ih} R_{ihk}^j) = 0 , \quad (39.199)$$

其中

$$R_k^h \equiv g^{ih} R_{ik} . \quad (39.200)$$

量 $g^{ih} R_{i\ hk}^j$ 合成 R_k^j 。事实上

$$g^{ih} R_{i\ hk}^j = R_{hk}^{hj} = -R_{hk}^{jh} = -g^{ij} R_{i\ hk}^h = g^{ij} R_{i\ kh}^h = g^{ij} R_{ik} = R_k^j , \quad (39.201)$$

其中在第二个等号处, 我们已经使用 (39.138) 的一个类似式。方程 (39.199) 则变成

$$D_j R_k^j - \frac{1}{2} \delta_k^j D_j S = 0 . \quad (39.202)$$

令 $D_j = g_{ji} D^i$, 上面方程等价于

$$D^i R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} D^i S = 0 .$$

□

无散张量 $R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} S$ 被称为 **Einstein 张量 (Einstein tensor)** G_{ij} :

$$\boxed{G_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} S} . \quad (39.203)$$

在建立广义相对论时, Einstein 寻找一个方程, 其描述物质存在, 或更一般的任何具有能量动量的物体是如何弯曲四维时空 (一个 Lorentz 流形)。能量动量流完全由一个对称 (0, 2)-型张量 $T_{\mu\nu}$ 描述, 称为**能动张量 (stress-energy tensor)**, 使得能量动量的局域守恒被表述为

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0 , \quad (39.204)$$

其与 $G_{\mu\nu}$ 满足相同的无散条件。因此, 他写下了所谓的 **Einstein 方程 (Einstein's equation)**:

$$\boxed{G_{\mu\nu} = 8\pi\kappa T_{\mu\nu}} , \quad (39.205)$$

其中, $\kappa = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{Kg}^2$ 是 Newton 引力常数。这是将时空曲率与物质的存在联系起来的最简单的方程, 其自然意味着能量动量守恒。这种情况与电磁场中情况类似, 其中 Maxwell 方程组 $\star d \star \Omega = J$ [(36.23)] 自然意味着连续性方程 [(36.31)] (电荷守恒)。

练习 39.20 考虑 Minkowski 时空, 其中 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ 。假设局域坐标是 (x^0, x^i) , $i = 1, 2, 3$ 。能动张量给出如下意义。 T^{00} = 能量密度, $T^{i0} = \partial_i$ 方向中的能流, T^{0i} = 动量第 i 分量的密度, T^{ij} = 在 ∂_i 方向中动量第 j 分量流。说明 (39.204) 等价于

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{i0}}{\partial x^i} = 0 \quad (\text{能量守恒}) , \quad (39.206)$$

和

$$\frac{\partial T^{0j}}{\partial t} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = 0 \quad (\text{动量守恒}) . \quad (39.207)$$

40. 复流形

一个**复流形 (complex manifold)** 形式上定义的方法完全类似于一个实流形 [c.f. Chapter 30]。取代实坐标邻域 $(U; x^i)$, $x^i \in \mathbb{R}$, 我们有复坐标邻域 $(U; z^i)$, $z^i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$ (流形的维度)。在非空交叠的区域 $(U; z^i)$ 和 $(W; w^i)$ 中, 要求所有复函数 (n 个复变量)

$$w^i = w^i(z^1, \dots, z^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (40.1)$$

是**全纯的 (holomorphic)**。全纯性条件可以表述为下面三种等价形式的任意一种:

- 1) **Cauchy-Riemann 条件 (Cauchy-Riemann conditions)**。如果我们写 $z^i = x^i + iy^i$, $x^i, y^i \in \mathbb{R}$ 和

$$w^i = g^i(x^k; y^l) + ih^i(x^k; y^l), \quad (40.2)$$

其中, g^i, h^i 是实函数, 则对于 $i = 1, \dots, n$, 有

$$\frac{\partial g^i}{\partial x^k} = \frac{\partial h^i}{\partial y^k}; \quad \frac{\partial g^i}{\partial y^k} = -\frac{\partial h^i}{\partial x^k} \quad 1 \leq k \leq n. \quad (40.3)$$

- 2) 对于任意具有复坐标 $(z_0^1, \dots, z_0^n)$ 的 $p \in U$, 存在一个邻域 $V \subset U$, 使得对于 V 中具有复坐标 $z^1, \dots, z^n, w^i$ 的点可以被表述为一个收敛级数:

$$w^i(z^1, \dots, z^n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} c_{k_1 \dots k_n} (z^1 - z_0^1)^{k_1} \dots (z^n - z_0^n)^{k_n}. \quad (40.4)$$

- 3) 导数 $\partial w^i / \partial z^k$, $1 \leq i, k \leq n$ 存在于 U 中。

我们进一步要求逆函数 $z^i = z^i(w^1, \dots, w^n)$ 存在, 并且也是全纯的, 因此

$$\det \frac{\partial(w^1, \dots, w^n)}{\partial(z^1, \dots, z^n)} \neq 0, \quad (40.5)$$

其中, $\partial(w^1, \dots, w^n)/\partial(z^1, \dots, z^n)$ 表示变换 (40.1) 的 Jacobi 矩阵。

一个一维复流形被称为一个 **Riemann 面 (Riemann surface)**。它是单复变量函数理论中研究的基本对象。

在一个复流形上, 我们可以施加度规结构, 其是实流形上 Riemann 度规的推广。为了理解这是如何做到的, 我们需要首先发展一个殆复流形的概念。

一个 n 维复流形可以被视为一个 $2n$ 维实流形。假设 $(U; z^i)$, $i = 1, \dots, n$, 是一个局域坐标邻域。令 $z^k = x^k + iy^k$, $x^k, y^k \in \mathbb{R}$ 。则 $\{x^k, y^k; 1 \leq k \leq n\}$ 是一个实流形 M 的一个局域坐标系; 并且 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^k}; 1 \leq k \leq n\right\}$ 给出 M 上一个局域自然标架场。考虑一个点 $x \in M$, 其局域坐标是 $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ 。定义一个线性变换 $J_x: T_x(M) \rightarrow T_x(M)$ 为

$$J_x \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial}{\partial y^k}; \quad J_x \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^k}; \quad k = 1, \dots, n. \quad (40.6)$$

J_x 显然满足 $J_x^2 = -id$, 其中 id 是 $T_x(M)$ 上的恒等映射。这个映射与局域坐标 z^i 的选择无关。事实上, 假设 $w^k = u^k + iv^k$, $k = 1, \dots, n$, 是 $x \in M$ 的局域坐标的另一个集合。则 Cauchy-Riemann 条件 (40.2) 意味着

$$\frac{\partial x^j}{\partial u^k} = \frac{\partial y^j}{\partial v^k}, \quad \frac{\partial x^j}{\partial v^k} = -\frac{\partial y^j}{\partial u^k}. \quad (40.7)$$

因此

$$J_x \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right) = J_x \left(\frac{\partial x^j}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial y^j}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \frac{\partial y^j}{\partial v^k} \frac{\partial}{\partial y^j} + \frac{\partial x^j}{\partial v^k} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial v^k}, \quad (40.8)$$

$$J_x \left(\frac{\partial}{\partial v^k} \right) = J_x \left(\frac{\partial x^j}{\partial v^k} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial y^j}{\partial v^k} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = -\frac{\partial y^j}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial y^j} - \frac{\partial x^j}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial x^j} = -\frac{\partial}{\partial u^k}. \quad (40.9)$$

对偶余标架场 $\{dx^k, dy^k; k = 1, \dots, n\}$ 上有一个诱导线性变换 (也记为 J_x) 定义为: 对于任意 $X \in T_x(M)$, $Y^* \in T_x^*(M)$, 有

$$\langle X, J_x Y^* \rangle \equiv \langle J_x X, Y^* \rangle. \quad (40.10)$$

因此从 (40.6) 得到

$$J_x(dx^k) = -dy^k; \quad J_x(dy^k) = dx^k; \quad k = 1, \dots, n. \quad (40.11)$$

诱导映射 $J_x: T_x^*(M) \rightarrow T_x^*(M)$ 也满足 $J_x^2 = -id$, 其中 id 是 $T_x^*(M)$ 上的恒等映射。

从 $z^k = x^k + iy^k$ 和 $\bar{z}^k = x^k - iy^k$, 我们有 $x^k = \frac{1}{2}(z^k + \bar{z}^k)$ 和 $y^k = \frac{1}{2i}(z^k - \bar{z}^k)$ 。从此得到: 对于 $1 \leq k \leq n$, 有

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{\partial}{\partial y^k} \right), \quad (40.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i \frac{\partial}{\partial y^k} \right); \quad (40.13)$$

和

$$dz^k = dx^k + i dy^k, \quad (40.14)$$

$$d\bar{z}^k = dx^k - i dy^k. \quad (40.15)$$

集合 $\left\{\frac{\partial}{\partial z^k}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right\}$, $k = 1, \dots, n$, 被看成是 $T_x(M)$ 的复化的一组基, 即: $T_x(M) \otimes \mathbb{C}$. 类似地, $\{dz^k, d\bar{z}^k\}$, $k = 1, \dots, n$, 是 $T_x^*(M) \otimes \mathbb{C}$ 的一组基. 实际上, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial y^k}\right\}$ 和 $\{dx^k, dy^k\}$ 也分别是 $T_x(M) \otimes \mathbb{C}$ 和 $T_x^*(M) \otimes \mathbb{C}$. 使用 (40.6) 和 (40.11), 则我们有: 对于 $1 \leq k \leq n$, 有

$$J_x \left(\frac{\partial}{\partial z^k} \right) = i \frac{\partial}{\partial z^k}, \quad J_x \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \right) = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}, \quad (40.16)$$

$$J_z (dz^k) = i dz^k, \quad J_z (d\bar{z}^k) = -i d\bar{z}^k. \quad (40.17)$$

因此, 向量 $\partial/\partial z^k$, $k = 1, \dots, n$, 生成一个子空间 $T_x(M)_{\mathbb{C}} \subset T_x(M) \otimes \mathbb{C}$, 其元素是本征值为 i 的所有本征向量 J_x . 而 $\partial/\partial \bar{z}^k$, $k = 1, \dots, n$, 生成一个子空间 $\overline{T_x(M)_{\mathbb{C}}} \subset T_x(M) \otimes \mathbb{C}$, 其元素是本征值为 $-i$ 的所有本征向量 J_x . 类似地, $\{dz^k\}$ 生成 $T_x^*(M)_{\mathbb{C}} \subset T_x^*(M) \otimes \mathbb{C}$, 本征值为 i 的 J_x 的本征向量的子空间, 而 $\{d\bar{z}^k\}$ 生成 $\overline{T_x^*(M)_{\mathbb{C}}} \subset T_x^*(M) \otimes \mathbb{C}$, 本征值为 $-i$ 的 J_x 的本征向量的子空间. 进一步, 我们有下面的向量空间直和分解:

$$T_x(M) \otimes \mathbb{C} = T_x(M)_{\mathbb{C}} \oplus \overline{T_x(M)_{\mathbb{C}}} \quad (40.18)$$

$$T_x^*(M) \otimes \mathbb{C} = T_x^*(M)_{\mathbb{C}} \oplus \overline{T_x^*(M)_{\mathbb{C}}} \quad (40.19)$$

练习 40.1 验证 (40.18) 和 (40.19)。

$T_x(M)_{\mathbb{C}} (T_x^*(M)_{\mathbb{C}})$ 中向量 (形式) 被称为型 $(1, 0)$ 的向量 (形式); 而 $\overline{T_x(M)_{\mathbb{C}}} (\overline{T_x^*(M)_{\mathbb{C}}})$ 中向量 (形式) 被称为型 $(0, 1)$ 的向量 (形式)。

我们可以开始于一个任意偶数维实向量空间 V 并且引入一个实向量空间上的一个复结构的概念如下。

定义 40.1 令 V 是一个 $2n$ 维实向量空间。 V 上一个复结构是一个线性变换 $J: V \rightarrow V$ 使得 $J^2 = -id$ 。

明显 J 的本征值必须是 $\pm i$, i 和 $-i$ 成对出现. 本征向量是复化空间 $V \otimes \mathbb{C}$ 中的向量; 本征值为 i 的那些构成一个子空间 $V_{\mathbb{C}} \subset V \otimes \mathbb{C}$, 而本征值为 $-i$ 的地方的人那些构成一个子空间 $\bar{V}_{\mathbb{C}} \subset V \otimes \mathbb{C}$. 总的来说, $V \otimes \mathbb{C}$ 分解为直和

$$V \otimes \mathbb{C} = V_{\mathbb{C}} \oplus \bar{V}_{\mathbb{C}}. \quad (40.20)$$

对于 $V_{\mathbb{C}}$ 选择一组基 $\{\xi_i\}$, $i = 1, \dots, n$, ξ_j 也总是可以被写成

$$\xi_j = \alpha - i\beta, \quad (40.21)$$

其中, $\alpha, \beta \in \mathbb{V}$ 。条件 $J\xi_j = i\xi_j$ 意味着

$$J\alpha = \beta, \quad J\beta = -\alpha. \quad (40.22)$$

定义

$$\bar{\xi}_j \equiv \alpha + i\beta. \quad (40.23)$$

则

$$J\bar{\xi}_j = J\alpha + iJ\beta = \beta - i\alpha = -i(\alpha + i\beta) = -i\bar{\xi}_j. \quad (40.24)$$

因此, $\bar{\xi}_j \in \overline{\mathbb{V}_{\mathbb{C}}}$; 而实际上 $\{\bar{\xi}_j\}, j = 1, \dots, n$, 生成 $\overline{\mathbb{V}_{\mathbb{C}}}$ 。因此, 通过 (40.20), $\{\xi_i, \bar{\xi}_i\}, i = 1, \dots, n$, 组成 $\mathbb{V} \otimes \mathbb{C}$ 的一组基。 $\mathbb{V}_{\mathbb{C}}$ 和 $\overline{\mathbb{V}_{\mathbb{C}}}$ 中的向量分别被称为型-(1,0) 和型-(0,1) 的向量, 依赖于复结构 J 。

定义 $2n$ 个向量的一个集合 $\{e_i, e_{n+i}\} \in \mathbb{V}, i = 1, \dots, n$, 为

$$\xi_j = \frac{1}{2}(e_j - ie_{n+j}), \quad j = 1, \dots, n; \quad (40.25)$$

$$\bar{\xi}_j = \frac{1}{2}(e_j + ie_{n+j}), \quad j = 1, \dots, n. \quad (40.26)$$

则我们看到 $\{e_i, e_{n+i}\}$ 是 $\mathbb{V}$ 的一组基, 也是 $\mathbb{V} \otimes \mathbb{C}$ 的一组基。从 (40.22), 我们也有

$$Je_i = e_{n+i}, \quad Je_{n+i} = -e_i. \quad (40.27)$$

这些方程类似于 (40.6)。令 $\{(e^*)^i, (e^*)^{n+i}\}$ 是 $\mathbb{V}^*$ 的基并且与 $\{e_i, e_{n+i}\}$ 对偶。在 $\mathbb{V}^*$ 上定义一个诱导复结构, 也记作 J , 为: 对于任意 $v \in \mathbb{V}$ 和 $u^* \in \mathbb{V}^*$ [c.f. (40.10)], 有

$$\langle v, Ju^* \rangle = \langle Jv, u^* \rangle. \quad (40.28)$$

则很容易来验证 [与 (40.11) 比较]

$$J(e^*)^i = -(e^*)^{n+i}, \quad J(e^*)^{n+i} = (e^*)^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (40.29)$$

练习 40.2 运用 (40.27) 和 (40.28) 来验证 (40.29)。

令

$$\lambda^j = (e^*)^j + i(e^*)^{n+j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (40.30)$$

$$\bar{\lambda}^j = (e^*)^j - i(e^*)^{n+j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (40.31)$$

则通过 (40.29) 有

$$J\lambda^j = i\lambda^j, \quad J\bar{\lambda}^j = -i\bar{\lambda}^j. \quad (40.32)$$

因此, $\lambda^j \in \mathbb{V}_{\mathbb{C}}^*$, $\bar{\lambda}^j \in \overline{\mathbb{V}_{\mathbb{C}}^*}$, 其中

$$\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{C} = \mathbb{V}_{\mathbb{C}}^* \oplus \overline{\mathbb{V}_{\mathbb{C}}^*}. \quad (40.33)$$

事实上, $\{\lambda^j\}$, $j = 1, \dots, n$, 是 $\mathbb{V}_{\mathbb{C}}^*$ 的一组基, $\{\bar{\lambda}^j\}$, $j = 1, \dots, n$, 是 $\overline{\mathbb{V}_{\mathbb{C}}^*}$ 的一组基, 而 $\{\lambda^j, \bar{\lambda}^j\}$, $j = 1, \dots, n$, 是 $\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{C}$ 的一组基. 注意到 $\{(e^*)^i, (e^*)^{n+i}\}$ 也构成 $\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{C}$ 的一组基. 进一步, 基 $\{\lambda^j, \bar{\lambda}^j\}$ 和 $\{\xi_i, \bar{\xi}_i\}$ 互相对偶:

$$\langle \xi_j, \lambda^k \rangle = \langle \bar{\xi}_j, \bar{\lambda}^k \rangle = \delta_j^k, \quad (40.34)$$

$$\langle \bar{\xi}_j, \lambda^k \rangle = \langle \xi_j, \bar{\lambda}^k \rangle = 0. \quad (40.35)$$

练习 40.3 验证上面两个方程。

我们将只表述下面基本事实而不证明。

定理 40.1 假设 $\mathbb{V}$ 是一个具有复结构 J 的 $2n$ 维实向量空间. 则任意具有形式 $\{e_i, Je_i\}$, $i = 1, \dots, n$, 的两组基给出对 $\mathbb{V}$ 相同的定向. (c.f. 29.1)。

我们现在可以定义一个殆复流形的概念。

定义 40.2 令 M 是一个 $2n$ 维光滑实流形. 如果对于任意 $x \in M$, 切空间 $T_x(M)$ 上存在一个复结构 J_x 使得 J 是 M 上 $(1,1)$ -型的一个光滑张量场, 则 J 被称为 M 上一个**殆复结构** (*almost complex structure*). 被赋予一个殆复结构的一个光滑实流形被称为一个**殆复流形** (*almost complex manifold*).

通过定理 40.1, 我们看到一个殆复流形必须是一个偶数维的可定向流形. 然而, 这些条件对于具备一个殆复结构的一个实流形不是足够的. 另一方面, 一个复流形自然是一个殆复流形, 具有由 (40.6) 给出的殆复结构, 称为一个复流形的**正则殆复结构** (*canonical almost complex structure*). 对于一个殆复流形, 它也是一个复流形, 殆复结构必须满足一组所谓的可积条件, 细节将不在这里展示. (见 Chern 1979; Chern, Chen 和 Lam 1999)。

在一个殆复流形 M 上, 我们可以施加一个 **hermite 度规** (*hermitian metric*), 其与 Riemann 度规相似, 是 M 上一个光滑 $(0,2)$ -型张量场 H 使得对于每个 $x \in M$, $H_x : T_x(M) \times T_x(M) \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个复值函数, 其满足下面的条件:

1) 对于任意 $X_1, X_2, Y \in T_x(M)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, 有

$$H_x(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y) = \alpha_1 H_x(X_1, Y) + \alpha_2 H_x(X_2, Y); \quad (40.36)$$

2) 对于任意 $X, Y \in T_x(M)$, 我们有

$$H_x(Y, X) = \overline{H_x(X, Y)}, \quad (40.37)$$

3) 对于任意 $X, Y \in T_x(M)$, 有

$$H_x(J_x X, Y) = i H_x(X, Y). \quad (40.38)$$

[比较 (8.27) 和 (8.28)]。 H_x 被称为实向量空间 $T_x(M)$ 上的一个 **hermite 结构 (hermitian structure)**，被赋予了复结构 J_x 。

分成实和复部分， $H_x(X, Y)$ 可以被给作

$$H_x(X, Y) = F_x(X, Y) + iG_x(X, Y) , \quad (40.39)$$

其中， F_x 和 G_x 是 $T_x(M)$ 上实值双线性函数。条件 2) 则意味着

$$F_x(Y, X) + iG_x(Y, X) = F_x(X, Y) - iG_x(X, Y) . \quad (40.40)$$

因此

$$F_x(Y, X) = F_x(X, Y) ; \quad G_x(Y, X) = -G_x(X, Y) , \quad (40.41)$$

即： F_x 是一个对称双线性函数而 G_x 是一个反对称双线性函数。应用条件 3)，我们有

$$F_x(J_x X, Y) = -G_x(X, Y) ; \quad G_x(J_x X, Y) = F_x(X, Y) . \quad (40.42)$$

从 (40.41) 得到

$$F_x(J_x X, J_x Y) = F_x(X, Y) , \quad (40.43)$$

$$G_x(J_x X, J_x Y) = G_x(X, Y) . \quad (40.44)$$

因此， $T_x(M)$ 上一个给定 hermite 结构由 $T_x(M)$ 上两个实值双线性函数确定，它们在 J_x 下是不变的，一个是对称的而另一个是反对称的。如果对应一个 hermite 结构 H_x 的 F_x 是正定的，则我们称 H_x 是**正定的 (positive definite)**。一个正定 H_x 确定 $T_x(M)$ 上一个内积 $(\cdot, \cdot)$ ，其在 J_x 下是不变的，由下式给出：对于任意 $X, Y \in T_x(M)$ ，有

$$(X, Y) \equiv F_x(X, Y) = \frac{1}{2} \left(H_x(X, Y) + \overline{H_x(X, Y)} \right) . \quad (40.45)$$

一个实向量空间 $\mathbb{V}$ 的 hermite 结构可以被表述为 $\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{C}$ 的 $(1, 0)$ -型和 $(0, 1)$ -型基向量 λ^j 和 $\bar{\lambda}^j$ [c.f. (40.30) 和 (40.31)] 的项。假设 $X, Y \in \mathbb{V}$ ($\dim \mathbb{V} = 2n$)。用基向量 $\{e_i, e_{n+i}\}$ 写成的项满足 (40.27)，我们可以写

$$X = \sum_{j=1}^n (X^j e_j + X^{n+j} J e_j) , \quad (40.46)$$

$$Y = \sum_{j=1}^n (Y^j e_j + Y^{n+j} J e_j) , \quad (40.47)$$

其中， $X^j, Y^j, X^{n+j}, Y^{n+j} \in \mathbb{R}$ 。因此，从 (40.36) 到 (40.38)，有

$$H(X, Y) = \sum_{j,k=1}^n (X^j + iX^{n+j}) (Y^k - iY^{n+k}) H(e_j, e_k) . \quad (40.48)$$

练习 40.4 验证上面的方程。

另一方面, 由于 $\{e_j, e_{n+j}\}$ 和 $\{(e^*)^j, (e^*)^{n+j}\}$, $j = 1, \dots, n$, 之间的对偶性, 从 (40.30) 和 (40.31), 我们有

$$\lambda^j(X) = (e^*)^j(X) + i(e^*)^{n+j}(X) = X^j + iX^{n+j}, \quad (40.49)$$

$$\bar{\lambda}^k(Y) = Y^k - iY^{n+k}. \quad (40.50)$$

从 (40.48) 得到

$$H(X, Y) = h_{j\bar{k}} \lambda^j(X) \bar{\lambda}^k(Y), \quad (40.51)$$

其中

$$h_{j\bar{k}} \equiv H(e_j, e_k), \quad (40.52)$$

在上式中指标 k 上面的 bar 表明该指标对应 $(0, 1)$ -型基向量 $\bar{\lambda}^k$ 。因此, hermite 结构 H 可以被写为

$$H = h_{j\bar{k}} \lambda^j \otimes \bar{\lambda}^k, \quad (40.53)$$

其中, 从 (40.37), 分量 $h_{j\bar{k}}$ 满足 hermite 对称性质

$$\overline{h_{j\bar{k}}} = h_{k\bar{j}}. \quad (40.54)$$

换句话说, 矩阵 $h_{k\bar{j}}$ 是一个 hermite 矩阵。

因为

$$G(X, Y) = -\frac{i}{2}(H(X, Y) - \overline{H(X, Y)})$$

是 $\mathbb{V}$ 上一个实值反对称双线性函数, 它对应一个外 2-形式 $\hat{H}$ 定义为

$$\langle X \wedge Y, \hat{H} \rangle \equiv -G(X, Y). \quad (40.55)$$

因此, 从 (40.53) 我们有

$$\begin{aligned} -G(X, Y) &= \frac{i}{2}(H(X, Y) - \overline{H(X, Y)}) \\ &= \frac{i}{2} \left\{ h_{j\bar{k}} \lambda^j(X) \bar{\lambda}^k(Y) - \overline{h_{k\bar{j}} \lambda^k(X) \bar{\lambda}^j(Y)} \right\} \\ &= \frac{i}{2} h_{j\bar{k}} \left(\lambda^j(X) \bar{\lambda}^k(Y) - \lambda^j(Y) \bar{\lambda}^k(X) \right) = \langle X \wedge Y, \frac{i}{2} h_{j\bar{k}} \lambda^j \wedge \bar{\lambda}^k \rangle, \end{aligned} \quad (40.56)$$

其中最后一个等号来自于 (28.28)。方程 (40.55) 则给出

$$\boxed{\hat{H} = \frac{i}{2} h_{j\bar{k}} \lambda^j \wedge \bar{\lambda}^k}, \quad (40.57)$$

其被称为 hermite 结构 H 的 **Kähler 形式 (Kähler form)**。

由于一个 n 维复流形 M 自然是一个 $2n$ 维殆复 (实) 流形, 我们可以定义 $T_z(M)$ 上对于每个 $z \in M$ 一个 hermite 结构。等价地, 一个 hermite 结构可以定义在切丛 $T(M)$ 上。在一

个局域坐标邻域 $(U; z^i)$ 中, 这个结构由 hermite 矩阵给出

$$H\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^k}\right) = h_{i\bar{k}} = \overline{h_{k\bar{i}}} . \quad (40.58)$$

如果 ξ, η 是 U 上两个 $(1, 0)$ -型切向量场

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad \eta = \eta^k \frac{\partial}{\partial z^k}, \quad (40.59)$$

其中, ξ^i, η^k 是 U 上光滑复值函数, 则

$$H(\xi, \eta) = h_{i\bar{k}} \xi^i \overline{\eta^k}. \quad (40.60)$$

对应于 M 上一个 hermite 结构, 我们有 M 上一个 Kähler 形式由下式给出

$$\hat{H} = \frac{i}{2} h_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k. \quad (40.61)$$

通过 (40.55), 这是一个实值 $(1, 1)$ -型微分形式。一般来说, 一个 (p, q) -型形式 α 可以表述为

$$\alpha = \alpha_{i_1 \dots i_p, \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}. \quad (40.62)$$

所有 (p, q) -型的集合形成一个复流形 M , 记为 $A_{p,q}$, 是 $(z^1, \dots, z^n; \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n)$ 的光滑复值函数的环上一个模。不同阶的形式的外积和 (p, q) -型形式的外微分可以非常直接地从实形式上类似操作推广得到 (分别 c.f. Chapters 28 和 30)。我们有下面的性质:

- 1) 如果 $\alpha \in A_{p,q}$, 则 $\bar{\alpha} \in A_{q,p}$;
- 2) 如果 $\alpha \in A_{p,q}$ 和 $\beta \in A_{r,s}$, 则 $\alpha \wedge \beta \in A_{p+r, q+s}$;
- 3) 外微分满足

$$dA_{p,q} \subset A_{p+1,q} \oplus A_{p,q+1};$$

- 4) 如果无论 p 或 $q > n$ (其中 $n = M$ 的复维度), 则 $A_{p,q} = 0$ 。

由于上面的性质 3), 我们有重要线性映射 $\partial: A_{p,q} \rightarrow A_{p+1,q}$ 和 $\bar{\partial}: A_{p,q} \rightarrow A_{p,q+1}$ 定义为

$$\partial\omega = \prod_{p+1,q} d\omega, \quad \bar{\partial}\omega = \prod_{p,q+1} d\omega, \quad (40.63)$$

其中, ω 是一个 (p, q) -型形式, 而 $\prod$ 是一个投影映射从 $d\omega$ 挑出一个特定型的对应形式。举例, 如果 ω 使用一个 $(1, 2)$ -型形式, 则 $d\omega = \omega^1 \oplus \omega^2$, 其中 $\omega^1 \in A_{2,2}$, $\omega^2 \in A_{1,3}$; 而 $\partial\omega = \omega^1$, $\bar{\partial}\omega = \omega^2$ 。明显在复流形上

$$d = \partial + \bar{\partial}. \quad (40.64)$$

假设 $f(z^1, \dots, z^n; \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n)$ 是一个 n 维复流形 M 上的一个光滑复值函数。则 (同 $z^j = x^j + iy^j$)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k + \frac{\partial f}{\partial y^k} dy^k = \frac{\partial f}{\partial z^k} dz^k + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k, \quad (40.65)$$

其中, $\partial/\partial z^k$ 和 $\partial/\partial \bar{z}^k$ 分别由 (40.12) 和 (40.13) 给出。因此,

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z^k} dz^k, \quad \bar{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k. \quad (40.66)$$

对于由 (40.62) 给出的一个 (p, q) -型形式 α , 我们有

$$\partial \alpha = \frac{\partial(\alpha_{i_1 \dots i_p, \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q})}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}, \quad (40.67)$$

$$\bar{\partial} \alpha = (-1)^p \frac{\partial(\alpha_{i_1 \dots i_p, \bar{j}_1 \dots \bar{j}_q})}{\partial \bar{z}^k} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^k \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}. \quad (40.68)$$

如果我们令 $f = g + ih$, 其中 g 和 h 是实值函数, 通过 (40.13) 我们有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i \frac{\partial}{\partial y^k} \right) (g + ih) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial x^k} - \frac{\partial h}{\partial y^k} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x^k} + \frac{\partial g}{\partial y^k} \right). \quad (40.69)$$

因此, 从 Cauchy-Riemann 条件 [c.f. (40.3)], 对于 f 是一个全纯函数的一个充分必要条件是 $\bar{\partial} f = 0$ 。如果 $\alpha \in A_{p,0}$ 是一个 $(p, 0)$ -型形式具有局域表述

$$\alpha = \alpha_{k_1 \dots k_p} dz^{k_1} \wedge \dots \wedge dz^{k_p}, \quad (40.70)$$

其中, $\alpha_{k_1 \dots k_p}$ 都是全纯函数, 则 α 被称为一个**全纯 p -形式 (holomorphic p -form)**。因为在这种情况下 $\bar{\partial} \alpha_{k_1 \dots k_p} = 0$, 我们有

$$d\alpha = \partial \alpha = \frac{\alpha_{k_1 \dots k_p}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^{k_1} \wedge \dots \wedge dz^{k_p}. \quad (40.71)$$

算符 ∂ 因此从全纯 $(p, 0)$ -形式映射到全纯 $(p+1, 0)$ -形式。

定义 40.3 如果一个 *hermite* 流形 M (一个赋予了一个 *hermite* 结构的复流形) 的 *Kähler* 形式 [c.f. (40.61)] 是闭的, 即: 如果

$$d\hat{H} = 0, \quad (40.72)$$

则 M 被称为一个 **Kähler 流形 (Kähler manifold)**。

我们通过提供单复变量函数的理论中两个基本事实来总结本章 (推论 40.1 和定理 40.3 如下)。先回忆两个定义。

定义 40.4 一个开集 $U \subset \mathbb{C}$ 上的一个光滑 (C^∞) 函数 $f = g + ih$, 其中 g 和 h 是实值, 被称为是全纯的, 如果它满足 *Cauchy-Riemann* 条件

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (40.73)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial h}{\partial x}, \quad (40.74)$$

其中, $x + iy = z \in U$; 或等价地

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (40.75)$$

定义 40.5 一个开集 $U \subset \mathbb{C}$ 上的一个光滑函数 f 被称为是**解析的** (*analytic*), 如果对于任意 $z_0 \in U$, f 在 $z - z_0$ 中有一个局域级数展开:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (40.76)$$

在一些圆盘 $\Delta_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ 中, 而且级数绝对且一致收敛于 Δ_ε 中。

定理 40.2 — Cauchy 积分公式 (Cauchy's Integral Formula). 对于 $\mathbb{C}$ 中一个圆盘 Δ , $z \in \Delta$ 和 $f \in C^\infty(\overline{\Delta})$, 其中 $\overline{\Delta}$ 是 Δ 的闭包, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(w)dw}{w-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\partial f(w)}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}, \quad (40.77)$$

其中, 沿着边界 $\partial\Delta$ 的积分是逆时针方向的。

证明: 考虑 (1,0)-型形式

$$\eta = \frac{1}{2\pi i} \frac{f dw}{w-z}. \quad (40.78)$$

我们有: 对于 $z \neq w$, 有

$$d\eta = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{f}{w-z} \right) d\bar{w} \wedge dw = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}. \quad (40.79)$$

令 $\Delta_\varepsilon = \Delta_\varepsilon(z)$ 是圆心为 z 半径为 ε 的圆盘 (见 Figure 40.1)。则 $\Delta - \Delta_\varepsilon$ 中形式 η 是光滑

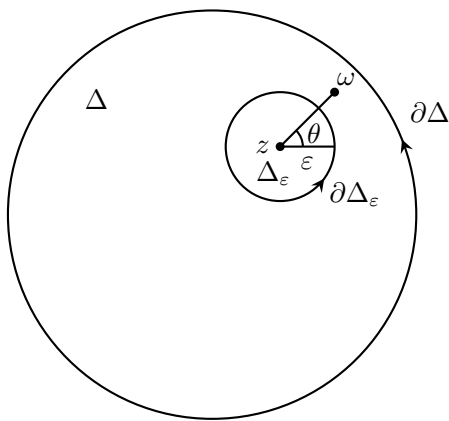


Figure 40.1

的。因此, 我们可以对这个区域应用 Stokes 定理 (定理 32.4) 并且得到

$$\int_{\partial(\Delta - \Delta_\varepsilon)} \eta = \int_{\partial\Delta} \eta - \int_{\partial\Delta_\varepsilon} \eta = \int_{\Delta - \Delta_\varepsilon} d\eta, \quad (40.80)$$

或

$$\int_{\partial\Delta_\varepsilon} \eta = \int_{\partial\Delta} \eta - \int_{\Delta - \Delta_\varepsilon} d\eta. \quad (40.81)$$

从 (40.78) 和 (40.79) 得到

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{f dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f dw}{w-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta-\Delta_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}. \quad (40.82)$$

令 $w-z = re^{i\theta}$, 我们有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{f(w)dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f(z). \quad (40.83)$$

此外, 在 $\Delta - \Delta_\varepsilon$ 中 (同 $w-z = x+iy = re^{i\theta}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$), 有

$$dw \wedge d\bar{w} = -2i dx \wedge dy = -2ir dr \wedge d\theta. \quad (40.84)$$

因此

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} \right| = 2 \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} dr \wedge d\theta \right| \leq c |dr \wedge d\theta|, \quad (40.85)$$

其中, $c \in \mathbb{R}$. 因此 $\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z}$ 在 Δ 上是完全可积的, 并且因此在 Δ 上是可积的. 上面的方程也意味着

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Delta_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \frac{dw \wedge d\bar{w}}{w-z} = 0. \quad (40.86)$$

对 (40.82) 的等号两边取极限 $\varepsilon \rightarrow 0$, 便得到定理. $\square$

推论 40.1 如果 $f \in C^\infty(U)$ 在一个包含 $\bar{\Delta}$ 的开区域 U 中是全纯的, 其中 $\bar{\Delta}$ 是一些圆盘 Δ 的闭包, 则对于任意 $z \in \Delta$, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(w)dw}{w-z}. \quad (40.87)$$

这也被称为 **Cauchy 积分公式 (Cauchy's integral formula)**. 它是单复变函数理论的基础.

定理 40.3 令 $f \in C^\infty(U)$ 是一个开集 $U \subset \mathbb{C}$ 中的一个光滑函数. 则 f 在 U 中是全纯的当且仅当在 U 中是解析.

证明: 假设 f 是全纯的, 则 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. 通过推论 40.1, 我们有: 对于 $z \in \Delta_\varepsilon(z_0)$, $z_0 \in U$, ε 足够小, 有

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{f(w)dw}{w-z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{f(w)dw}{(w-z_0) - (z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{f(w)dw}{(w-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}} \right) (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \end{aligned} \quad (40.88)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\varepsilon} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}. \quad (40.89)$$

在第四个等号处, 我们已经使用了下面级数的绝对且一致收敛性

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - w_0} \right)^n = \left[1 - \left(\frac{z - z_0}{w - w_0} \right) \right]^{-1}, \quad (40.90)$$

同 $|z - z_0|/|w - w_0| < 1$ 。通过定义 40.5, f 在 U 中是解析的。

反之, 假设 f 在 U 中是解析的。则它有一个幂级数展开: 对于 $z \in \Delta_\varepsilon(z_0)$, $z_0 \in U$, 有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (40.91)$$

因为 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (z - z_0)^n = 0$, 展开的部分和满足 Cauchy 积分公式 (40.87); 而通过 (40.91) 的一致收敛性, $f(z)$ 也一样成立, 即:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(w)dw}{w - z}, \quad (40.92)$$

其中, Δ 是包含 z 的圆盘。则我们可以在积分符号下取微分来得到

$$\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{f(w)}{w - z} \right) dw = 0. \quad (40.93)$$

从定义 40.4 得到 $f(z)$ 在 U 中是全纯的。 $\square$

41. 示性类

示性类是用于纤维丛的结构分类的几何对象，特别是对丛的非平凡性。一般定义由定义 41.3 给出。它们在物理应用中变得越来越重要，其中几何的和拓扑的考虑会起一定作用，举例而言，在所谓的拓扑量子数中。这些类中称为陈类的一型在称为 Atiyah-Singer 指标定理的深层数学结论中特别重要 (Chapter 43)，其用几何不变形表述了一个流形上一个椭圆算符的指标。这个定理也在现代物理中发现了重要应用。

我们将从研究示性类的一个具体例子陈类开始，其很自然地装备了联络的复向量丛得到。一个**复向量丛 (complex vector bundle)** $\pi : E \rightarrow M$ 仅仅是定义了基流形 M 的一个向量丛 E ，其中典型丛是一个有限维复向量空间 V 。一个一般复丛的结构群因此是 $GL(q; \mathbb{C})$ ，其中 $q = \dim(V)$ 。 M 上所有截面的集合记为 $\Gamma(E)$ ，则其因此有一个复线性结构，并且事实上是 M 上所有光滑复值函数的环上的一个模。一个复向量丛上一个联络的定义与一个实向量丛类似 (定义 35.1)，逐字而言，就是把实数域 $\mathbb{R}$ 的地方用复数域 $\mathbb{C}$ 代替。先前得到的所有关于 1-形式 (ω_i^j) 的联络矩阵和伴随 2-形式 (Ω_i^j) 的伴随曲率矩阵的基本结论在现在的复数形式下依然成立。为了方便，我们在下面回忆一下。

假设 $\{e_\alpha, \alpha = 1, \dots, q\}$ 是基流形 M 上的一个局域标架场。则协变导数 $D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^*(M))$ 由下式给出

$$De_\alpha = \omega_\alpha^\beta e_\beta, \quad (41.1)$$

或者，在矩阵记号中，有

$$De = \omega e. \quad (41.2)$$

在标架场的一个局域改变下

$$g' = ge, \quad (41.3)$$

联络矩阵变换如下

$$\omega' = dg \cdot g^{-1} + g\omega g^{-1}, \quad (41.4)$$

其中, $De' = \omega'e'$ 。

对于联络 ω 的曲率矩阵 Ω 是

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega . \quad (41.5)$$

在标架场的局域变换 (41.3) 下, 曲率矩阵变换根据

$$\Omega' = g\Omega g^{-1} . \quad (41.6)$$

协变导数 D 也作用在 $\Gamma(E) \otimes A^r(M)$ (截面值 r -形式) 和 $\Gamma(E \otimes E^*) \otimes A^r(M)$ (矩阵值 r -形式, 或等价地, r -形式的矩阵) 中的对象上, 或者更一般地, 分量是复值 r -形式的张量对象。举例而言, 我们有: 回忆 (35.59) 和 (35.66), 有

$$D\lambda = d\lambda + (-1)^r \lambda \wedge \omega , \quad \lambda \in \Gamma(E) \otimes A^r(M) , \quad (41.7)$$

$$D\eta = d\eta - [\omega, \eta]_{\text{gr}} , \quad \eta \in \Gamma(E \otimes E^*) \otimes A^r(M) , \quad (41.8)$$

$$D(\eta_1 \wedge \eta_2) = D\eta_1 \wedge \eta_2 + (-1)^{r_1} \eta_1 \wedge D\eta_2 , \quad (41.9)$$

其中在最后一个方程中, 有 $\eta_1 \in \Gamma(E \otimes E^*) \otimes A^{r_1}(M)$ 和 $\eta_2 \in \Gamma(E \otimes E^*) \otimes A^{r_2}(M)$, 即: 分别是 r_1 -形式和 r_2 -形式的张量矩阵。

练习 41.1 证明 (41.9)。

在 (41.8) 中, 分次交换子 $[\ , \]_{\text{gr}}$ 由 (35.65) 定义

$$[\omega, \eta]_{\text{gr}} = \omega \wedge \eta - (-1)^r \eta \wedge \omega . \quad (41.10)$$

对于 Ω 的 Bianchi 恒等式是

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega , \quad (41.11)$$

或者, 通过 (41.8)

$$D\Omega = 0 . \quad (41.12)$$

我们也有 [c.f. (35.71) 和 (35.73)]

$$D^2\lambda = \lambda \wedge \Omega , \quad \lambda \in \Gamma(E) \otimes A^r(M) , \quad (41.13)$$

$$D^2\eta = [\eta, \Omega] = [\eta, \Omega]_{\text{gr}} , \quad \eta \in \Gamma(E \otimes E^*) \otimes A^r(M) , \quad (41.14)$$

通过对于曲率矩阵的变换性质 (41.6), 陈省身被引导去考虑矩阵的复值函数, 其在 (41.6) 所示的伴随变换下不变。考虑 r 个 $q \times q$ 矩阵 $A_1, \dots, A_r$ 的一个 r -线性函数 $P(A_1, \dots, A_r)$ 。令 A_i 表述成它的矩阵元素 (复值) 项为

$$A_i = (a_{\alpha\beta}^i) , \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq q, \quad 1 \leq i \leq r . \quad (41.15)$$

则一般地, 我们可以将 P 写成

$$P(A_1, \dots, A_r) = \sum_{1 \leq \alpha_i, \beta_i \leq q} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \beta_1 \dots \beta_r} a_{\alpha_1 \beta_1}^1 \dots a_{\alpha_r \beta_r}^r, \quad (41.16)$$

其中, $\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \beta_1 \dots \beta_r}$ 是复数。如果对于 $\{1, \dots, r\}$ 的任意排列 σ , 我们有

$$P(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(r)}) = P(A_1, \dots, A_r), \quad (41.17)$$

则 P 被称为 $A_1, \dots, A_r$ 的一个**对称多项式 (symmetric polynomial)**。如果对于任意 $g \in GL(q; \mathbb{C})$, 我们有

$$P(gA_1g^{-1}, \dots, gA_rg^{-1}) = P(A_1, \dots, A_r), \quad (41.18)$$

则 P 被称为一个**ad-不变多项式 (ad-invariant polynomial)**。陈省身运用下面的方法构造了一系列对称的、ad-不变的多项式。对于一个 $q \times q$ 矩阵 A 写

$$\det \left(1 + \frac{i}{2\pi} A \right) = \sum_{0 \leq j \leq q} P_j(A), \quad (41.19)$$

其中, $P_j(A)$ 是 A 的元素 $a_{\alpha\beta}$ 的一个第 j 阶齐次多项式, 而等号左边的 "1" 是 $q \times q$ 单位矩阵。举例而言, 对于一个 2×2 矩阵 A , 我们有

$$\det \left(1 + \frac{i}{2\pi} A \right) = 1 + \frac{i}{2\pi} \operatorname{Tr} A + \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \det A,$$

并且所以

$$P_0(A) = 1, \quad P_1(A) = \left(\frac{i}{2\pi} \right) \operatorname{Tr} A, \quad P_2(A) = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \det A.$$

对于一个 3×3 矩阵 A , 有

$$\begin{aligned} \det \left(1 + \frac{i}{2\pi} A \right) &= 1 + \frac{i}{2\pi} \operatorname{Tr} A \\ &\quad + \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32}) \\ &\quad + \left(\frac{i}{2\pi} \right)^3 \det A, \end{aligned}$$

意味着

$$\begin{aligned} P_0(A) &= 1, \quad P_1(A) = \left(\frac{i}{2\pi} \right) \operatorname{Tr} A, \\ P_2(A) &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 (a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21} - a_{13}a_{31} - a_{23}a_{32}), \\ P_3(A) &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^3 \det A. \end{aligned}$$

对于任意 $g \in GL(q; \mathbb{C})$, 我们有

$$1 + \frac{i}{2\pi} gAg^{-1} = g \left(1 + \frac{i}{2\pi} A \right) g^{-1}. \quad (41.20)$$

因此, 回忆定理 16.6, 有

$$\det \left(1 + \frac{i}{2\pi} gAg^{-1} \right) = \det \left(1 + \frac{i}{2\pi} A \right). \quad (41.21)$$

从 (41.19) 得到 $P_j(A)$ 是 ad-不变的:

$$P_j(gAg^{-1}) = P_j(A). \quad (41.22)$$

现在引入 $P_j(A)$ 的**完全极化多项式 (completely polarized polynomial)** $P_j(A_1, \dots, A_j)$ 。我们要求 $P_j(A_1, \dots, A_j)$ 是 $A_1, \dots, A_j$ 的一个对称 j -线性方程满足

$$P_j(\underbrace{A, \dots, A}_{j\text{次}}) = P_j(A). \quad (41.23)$$

举例,

$$\begin{aligned} P_2(A_1, A_2) &= \frac{1}{2} \{P_2(A_1 + A_2) - P_2(A_1) - P_2(A_2)\}, \\ P_3(A_1, A_2, A_3) &= \frac{1}{6} \{P_3(A_1 + A_2 + A_3) - P_3(A_1 + A_2) - P_3(A_1 + A_3) \\ &\quad - P_3(A_2 + A_3) + P_3(A_1) + P_3(A_2) + P_3(A_3)\}. \end{aligned}$$

练习 41.2 运用前面给出 $P_2(A)$ 和 $P_3(A)$ 的显示表达验证上面的两个方程。

由于 $P_j(A)$ 是 ad-不变的, 极化 $P_j(A_1, \dots, A_j)$ 也是 ad-不变的, 而因此通过定义, 是对称且 ad-不变的。

假设 $P(A_1, \dots, A_r)$ 是一个对称 ad-不变的多项式, 并且令 $g \in GL(q; \mathbb{C})$ 写成

$$g = 1 + g', \quad (41.24)$$

其中, 1 是 $q \times q$ 单位矩阵。则

$$g^{-1} = 1 - g' + O((g')^2), \quad (41.25)$$

其中, $O((g')^2)$ 表示 g' 的二阶和更高阶项的元素求和。调用 ad-不变性质 (41.18) 并且运用线性性质, 我们有

$$\sum_{1 \leq i \leq r} P(A_1, \dots, g'A_i - A_i g', \dots, A_r) = 0, \quad (41.26)$$

通过考虑 g' 的线性项。

我们现在推广到 $A_i = (a_{\alpha\beta}^i)$ 是 M 上微分形式的 $q \times q$ 矩阵的情况。从 (41.16) 得到,

$P(A_1, \dots, A_r)$ 由下式给出

$$P(A_1, \dots, A_r) = \sum_{1 \leq \alpha_i, \beta_i \leq q} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \beta_1 \dots \beta_r} a_{\alpha_1 \beta_1}^1 \wedge \dots \wedge a_{\alpha_r \beta_r}^r. \quad (41.27)$$

ad-不变性质 (41.26) 对于 A_i 是外微分的矩阵的情况依然有用。这个事实引导出下面结论。

引理 41.1 对于 $i = 1, \dots, r$, 令 A_i 是微分 d_i -形式的一个 $q \times q$ 矩阵。假设 $P(A_1, \dots, A_r)$ 是一个对称的、ad-不变的多项式。则对于任意微分 1-形式的 $q \times q$ 矩阵 θ , 有

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(A_1, \dots, \theta \wedge A_i, \dots, A_r) \\ & + \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^{d_1 + \dots + d_i + 1} P(A_1, \dots, A_i \wedge \theta, \dots, A_r) = 0, \end{aligned} \quad (41.28)$$

或等价地,

$$\sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(A_1, \dots, [\theta, A_i]_{\text{gr}}, \dots, A_r) = 0. \quad (41.29)$$

证明: 我们只需要对于 $\theta = \sum_l (g')_l a_l$ 证明引理, 其中 $(g')_l$ 是任意 $q \times q$ (复数的) 矩阵, 且 $a_l \in A^1(M)$ (M 上的一个 1-形式)。事实上, 通过 P 的多线性性质, 我们只需要对于 $\theta = g'a$ 说明 (41.25)。(41.28) 的等号右边则读出

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(A_1, \dots, A_{i-1}, g'a \wedge A_i, \dots, A_r) \\ & + \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^{d_1 + \dots + d_i + 1} P(A_1, \dots, A_i \wedge g'a, \dots, A_r) \\ & = a \wedge \left\{ \sum_{1 \leq i \leq r} P(A_1, \dots, g'A_i, \dots, A_r) - \sum_{1 \leq i \leq r} P(A_1, \dots, A_i g', \dots, A_r) \right\}, \end{aligned} \quad (41.30)$$

通过 P 和 (41.26) 的线性性质其消失。在上面的等式中, 我们已经使用 (41.27) 和外积的反对易规则 (28.5)。□

由于 ad-不变性质, $P(A_1, \dots, A_r)$ 是一般定义在 M 上的一个外微分 $(d_1 + \dots + d_r)$ -形式, 其中 A_i 是 d_i -形式的一个 $q \times q$ 矩阵, $1 \leq i \leq r$ 。引理 41.1 的一个推论是下面重要事实。

引理 41.2 令 $P(A_1, \dots, A_r)$ 是一个对称的、ad-不变的多项式, 如果 A_i 是 M 上 d_i -形式 ($i = 1, \dots, r$) 的一个 $q \times q$ 矩阵, 且一个联络 ω 在复向量丛 $x: E \rightarrow M$ 上给出 (其中纤维空间的维度是 q), 则 $P(A_1, \dots, A_r)$ 是 M 上一个微分 $(d_1 + \dots + d_r)$ -形式, 并且

$$dP(A_1, \dots, A_r) = \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(A_1, \dots, DA_i, \dots, A_r), \quad (41.31)$$

其中, D 是对应于联络 ω 的协变导数。

证明：我们直接计算 $P(A_1, \dots, A_r)$ 的外导数，并且通过运用 (41.27) 获得

$$\begin{aligned}
 dP(A_1, \dots, A_r) &= \sum_{1 \leq \alpha_i, \beta_i \leq q} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \beta_1 \dots \beta_r} d(a_{\alpha_1 \beta_1}^1 \wedge \dots \wedge a_{\alpha_r \beta_r}^r) \\
 &= \sum_{1 \leq \alpha_i, \beta_i \leq q} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_r, \beta_1 \dots \beta_r} \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} a_{\alpha_1 \beta_1}^1 \wedge \dots \wedge da_{\alpha_i \beta_i}^i \wedge \dots \wedge a_{\alpha_r \beta_r}^r \\
 &= \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(A_1, \dots, dA_i, \dots, A_r) \\
 &= \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(A_1, \dots, DA_i + [\omega, A_i]_{\text{gr}}, \dots, A_r) \\
 &= \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(A_1, \dots, DA_i, \dots, A_r) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(A_1, \dots, \omega \wedge A_i + (-1)^{d_i+1} A_i \wedge \omega, \dots, A_r) \\
 &= \sum_{i=1}^r (-1)^{d_1 + \dots + d_{i-1}} P(A_1, \dots, DA_i, \dots, A_r),
 \end{aligned} \tag{41.32}$$

其中，第四个等号来自于 (41.8) 而最后一个等号来自于引理 41.1。 $\square$

现在我们准备好表述并证明本章的主要定理。

定理 41.1 — Chern-Weil 定理 (Chern-Weil Theorem). 假设 $\pi: E \rightarrow M$ 是一个光滑 n 维流形 M 上的一个 q -维复向量丛，而 Ω 是与 E 上一个给定联络 ω 相关联的曲率。令 $P_j(A_1, \dots, A_j)$ 是一个对称的、 ad -不变的多项式，其中 $A_i, i = 1, \dots, j$, 是 $q \times q$ 矩阵。则

i) $2j$ -形式 $P_j(\Omega)$ 是闭的：

$$dP_j(\Omega) = 0, \tag{41.33}$$

其中， $P_j(A_1, \dots, A_j)$ 是 $P_j(A)$ 的完全极化多项式 c.f. [(41.23)]。

假设 $\tilde{\omega}$ 是 E 上对应于 $\tilde{\Omega}$ 另一联络，则

ii) 存在 M 上一个 $(2j-1)$ -微分形式 Q ，使得

$$P_j(\tilde{\Omega}) - P_j(\Omega) = dQ, \tag{41.34}$$

即： $P_j(\tilde{\Omega}) - P_j(\Omega)$ 是恰当的。

证明：在 (41.31) 中令 $A_1 = \dots = A_r = \Omega$ ，我们有

$$dP_j(\Omega) = \sum_{i=1}^j P_j(\Omega, \dots, \underbrace{D\Omega}_{\text{第 } i \text{ 项}}, \dots, \Omega), \tag{41.35}$$

因为对于 $1 \leq i \leq j$ 有 $d_i = 2$ 。凭借 Bianchi 恒等式 ($D\Omega = 0$) [c.f. (41.12)] 和 P_j 的线性性等号右边消失。这证明了表述 i)。

为了证明表述 ii)，令

$$\eta \equiv \tilde{\omega} - \omega. \tag{41.36}$$

我们说明 η 是一个 1-形式张量矩阵如下。在标架场的一个局域改变 $e' = ge$ 下, 有

$$(\tilde{\omega})' = (dg)g^{-1} + g\tilde{\omega}g^{-1}, \quad (41.37)$$

$$\omega' = (dg)g^{-1} + g\omega g^{-1}, \quad (41.38)$$

其中, $De' = \omega'e'$ 和 $\tilde{D}e' = (\tilde{\omega})'e'$ 。因此

$$\eta' = (\tilde{\omega})' - \tilde{\omega} = g(\tilde{\omega} - \omega)g^{-1} = g\eta g^{-1}. \quad (41.39)$$

因此两个联络之间的区别是一个张量。我们用 η 生成一族联络为

$$\omega_t \equiv \omega + t\eta, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (41.40)$$

所以有 $\omega_0 = \omega$ 和 $\omega_1 = \tilde{\omega}$ 。 ω_t 的曲率 Ω_t 由下式给出

$$\begin{aligned} \Omega_t &= d\omega_t - \omega_t \wedge \omega_t = d\omega + t d\eta - (\omega + t\eta) \wedge (\omega + t\eta) \\ &= (d\omega - \omega \wedge \omega) + t(d\eta - (\eta \wedge \omega + \omega \wedge \eta)) - t^2 \eta \wedge \eta \\ &= \Omega + tD\eta - t^2 \eta \wedge \eta, \end{aligned} \quad (41.41)$$

其中在最后一个等号我们使用了 (41.8)。因此

$$\frac{d\Omega_t}{dt} = D\eta - 2t \eta \wedge \eta, \quad (41.42)$$

其中, D 是对于 ω 的协变导数。

对应于给定对称的、ad-不变的多项式 $P_j(A_1, \dots, A_j)$, 我们令

$$P_j(A) \equiv P_j(\overbrace{A, \dots, A}^{j \uparrow}), \quad (41.43)$$

和

$$Q_j(B, A) \equiv jP_j(B, \overbrace{A, \dots, A}^{(j-1) \uparrow}). \quad (41.44)$$

则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_j(\Omega_t) &= jP_j\left(\frac{d\Omega_t}{dt}, \Omega_t, \dots, \Omega_t\right) = jP_j(D\eta - 2t \eta \wedge \eta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) \\ &= Q_j(D\eta, \Omega_t) - 2tQ_j(\eta \wedge \eta, \Omega_t). \end{aligned} \quad (41.45)$$

现在从 (41.41) 得到

$$\begin{aligned} D\Omega_t &= D\Omega + tD^2\eta - t^2D(\eta \wedge \eta) = tD^2\eta - t^2D(\eta \wedge \eta) \\ &= t[\eta, \Omega] + t^2[\eta, D\eta] = t[\eta, \Omega_t], \end{aligned} \quad (41.46)$$

其中在第三个等号处我们使用了 (41.9) 和 (41.14), 而在第四个等号处我们使用了 (41.41)。另

一方面, 从引理 41.2 [(41.31)] 和 P_j 的对称性质, 我们有

$$\begin{aligned} dQ_j(\eta, \Omega_t) &= j dP_j(\eta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) \\ &= j P_j(D\eta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) - j(j-1) P_j(\eta, D\Omega_t, \underbrace{\Omega_t, \dots, \Omega_t}_{(j-2)\text{个}}). \end{aligned} \quad (41.47)$$

因此, 通过 (41.46), 有

$$dQ_j(\eta, \Omega_t) = j P_j(D\eta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) - j(j-1)t P_j(\eta, [\eta, \Omega_t], \Omega_t, \dots, \Omega_t). \quad (41.48)$$

同时, 在 (41.29) 中令 $\theta = \eta = A_1$ 和 $A_2 = \dots = A_j = \Omega_t$, 我们获得

$$2P_j(\eta \wedge \eta, \Omega_t, \dots, \Omega_t) - (j-1)P_j(\eta, [\eta, \Omega_t], \Omega_t, \dots, \Omega_t) = 0. \quad (41.49)$$

通过对上面的方程乘以 j 并且回忆 (41.44), 我们有

$$2Q_j(\eta \wedge \eta, \Omega_t) - j(j-1)P_j(\eta, [\eta, \Omega_t], \Omega_t, \dots, \Omega_t) = 0. \quad (41.50)$$

比较这个方程与 (41.48), 我们则获得

$$dQ_j(\eta, \Omega_t) = Q_j(D\eta, \Omega_t) - 2tQ_j(\eta \wedge \eta, \Omega_t) = \frac{dP_j(\Omega_t)}{dt}, \quad (41.51)$$

其中最后一个等号来自于 (41.45)。最后在上方的方程中两边对 t 从 0 到 1 积分得到

$$P_j(\tilde{\Omega}) - P_j(\Omega) = d \left(\int_0^1 dt Q_j(\eta, \Omega_t) \right). \quad (41.52)$$

(41.34) 中 M 上要求的 $(2j-1)$ -形式 Q 因此由下式给出

$$Q = \int_0^1 Q_j(\eta, \Omega_t) dt. \quad (41.53)$$

□

Chern-Weil 定理是一个卓越的结论。回忆 de Rham 上调群的定义 [定义 33.2, 方程 (33.1)], 它说明 $P_j(\Omega)$ 确定一个 de Rham 上调类 (de Rham 上调群 $H^{2j}(M)$ 的一个元素), 在复向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 上与联络 ω 的选择独立。 $P_j(\Omega)$ 上可以通过局域数据 (即: 曲率形式) 的方法进行计算, 但是它确定一个 de Rham 上调类, 其揭示了 E (和 M) 上的纯全局 (拓扑) 信息。这是一个流形的局域和全局性质之间深层关系的绝妙例子。

我们终于可以构造 Chern 类, 其是从一个复向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 上曲率形式构造的实 de Rham 上调类 $[\in H^{2j}(M, \mathbb{R}), j = 1, \dots, q]$, 其中 q 是纤维空间的维度。

回忆一个复向量空间上的一个 Hermite 结构的概念 [c.f. (8.27) 和 (8.28)]。假设在纤维空间 $\pi^{-1}(x)$ 上对任意 $x \in M$ 光滑分配一个正定 Hermite 结构, 即: 对于 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,

$X, Y, X_1, X_2 \in \pi^{-1}(x)$, 和任意 $x \in M$, 存在一个复值共轭双线性函数 $H(X, Y)$ 使得

$$1) \quad H(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 H(X_1, Y) + \lambda_2 H(X_2, Y) , \quad (41.54)$$

$$2) \quad H(X, Y) = \overline{H(Y, X)} , \quad (41.55)$$

$$3) \quad H(X, X) \geq 0 . \quad (41.56)$$

当且仅当 $X = 0$ 时等号成立。注意到 1) 和 2) 意味着 [c.f. (8.28b)]

$$H(Y, \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2) = \overline{\lambda_1} H(Y, X_1) + \overline{\lambda_2} H(Y, X_2) . \quad (41.57)$$

同时, 如果 J 是 $2n$ -维实向量空间 V 上的一个复结构, 我们可以定义

$$iX = JX , \quad X \in V , \quad (41.58)$$

并且将 V 变成一个 n -维复向量空间。(见定义 40.1 之后的讨论)。一个复向量丛 $\pi : E \rightarrow M$ 装备 M 上的正定 Hermite 结构的一个光滑分配被称为一个 **Hermite 向量丛 (hermitian vector bundle)**。类似于 Riemann 度规 (g_{ij}) , 我们将记 E 上的我们的 Hermite 结构为

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = H(s_\alpha, s_\beta) , \quad (41.59)$$

依赖于一个局域标架场 $\{s_1, \dots, s_q\}$ 。上面的条件 2) 意味着矩阵 $H = (h_{\alpha\bar{\beta}})$ 是 Hermite 的, 即:

$${}^t \overline{H} = H . \quad (41.60)$$

更进一步, 如果 $X = X^\alpha s_\alpha$, $Y = Y^\beta s_\beta$, 则

$$H(X, Y) = H(X^\alpha s_\alpha, Y^\beta s_\beta) = X^\alpha \overline{Y^\beta} h_{\alpha\bar{\beta}} . \quad (41.61)$$

类似于定理 39.1 关于 Riemann 度规的存在性, 我们有下面基本事实 (表述而不证明)。

定理 41.2 一个复向量丛上总存在一个 Hermite 结构。

类似于一个 Riemann 流形上一个度规相容联络的概念, 我们有一个 Hermite 向量丛上的一个相容联络的概念。

定义 41.1 令 ω 是一个 Hermite 向量丛 $\pi : E \rightarrow M$ 上一个联络并且 D 对应协变导数。如果对于任意两个平行场 $X, Y \in \Gamma(E)$ (即: $DX = DY = 0$), $H(X, Y) = \text{常数}$, 则 ω 被称为 Hermite 向量丛上的一个 **相容联络 (compatible connection)**。

对于 $X = X^\alpha s_\alpha$, $Y = Y^\beta s_\beta$, 对于 X 和 Y 的平行的条件意味着

$$dX^\alpha + X^\gamma \omega_\gamma^\alpha = 0 , \quad (41.62)$$

$$dY^\beta + Y^\gamma \omega_\gamma^\beta = 0 . \quad (41.63)$$

因此, 从 (41.61), 有

$$\begin{aligned} dH(X, Y) &= (dh_{\alpha\bar{\beta}}) X^\alpha \bar{Y}^\beta + X^\alpha (d\bar{Y}^\beta) h_{\alpha\bar{\beta}} + (dX^\alpha) \bar{Y}^\beta h_{\alpha\bar{\beta}} \\ &= \left(dh_{\alpha\bar{\beta}} - h_{\gamma\bar{\beta}} \omega_\alpha^\gamma - h_{\alpha\bar{\gamma}} \bar{\omega}_\beta^\gamma \right) X^\alpha \bar{Y}^\beta. \end{aligned} \quad (41.64)$$

对于 ω 相容条件则有

$$dh_{\alpha\bar{\beta}} - h_{\gamma\bar{\beta}} \omega_\alpha^\gamma - h_{\alpha\bar{\gamma}} \bar{\omega}_\beta^\gamma = 0. \quad (41.65)$$

[与 (39.99) 比较, 其对于 Levi-Civita 联络表述相容条件]。在矩阵记号中, (41.65) 看出

$$dH = \omega H + H^t \bar{\omega}. \quad (41.66)$$

对这个方程取外微分, 我们获得

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega \cdot H - \omega \wedge dH + dH \wedge {}^t \bar{\omega} + H \wedge d^t \bar{\omega} \\ &= (d\omega - \omega \wedge \omega) \cdot H + \omega \wedge \omega H - \omega \wedge (\omega H + H^t \bar{\omega}) + (\omega H + H^t \bar{\omega}) \wedge {}^t \bar{\omega} + H \cdot d^t \bar{\omega} \\ &= (d\omega - \omega \wedge \omega) H + H (d^t \bar{\omega} + {}^t \bar{\omega} \wedge {}^t \bar{\omega}). \end{aligned} \quad (41.67)$$

从 $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ [(41.5)] 的事实, 我们获得

$${}^t \bar{\Omega} = d^t \bar{\omega} + {}^t \bar{\omega} \wedge {}^t \bar{\omega}. \quad (41.68)$$

练习 41.3 说明从 (41.5) 得到 (41.68)。

因此, 由于 H 是 Hermite 的, 而 $\Omega \cdot H$ 是反 Hermite 的 [与 (39.127) 比较]

$$\Omega H + H^t \bar{\Omega} = 0, \quad (41.69)$$

或者

$$\boxed{{}^t \bar{\Omega} = -H^{-1} \Omega H}. \quad (41.70)$$

从 (41.19) 我们写: 对于对应于一个纤维维度是 q 的 Hermite 向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 上的一个相容联络 ω 的一个 $q \times q$ 曲率矩阵 Ω , 有

$$\boxed{\det \left(1 + \frac{i}{2\pi} \Omega \right) = 1 + \cdots + C_j(\Omega) + \cdots + C_q(\Omega)}, \quad (41.71)$$

其中, $C_j(\Omega)$ 是一个全局定义在 M 上的 $2j$ -形式。根据 Chern-Weil 定理 (定理 41.1) $C_j(\Omega)$ 确定 M 的一个 $2j$ -上同调类。它实际上是实的, 因为

$$\begin{aligned} \overline{\det \left(1 + \frac{i}{2\pi} \Omega \right)} &= \det \left(1 - \frac{i}{2\pi} \bar{\Omega} \right) = \det \left(1 - \frac{i}{2\pi} {}^t \bar{\Omega} \right) \\ &= \det \left(1 + \frac{i}{2\pi} H^{-1} \Omega H \right) = \det \left[H^{-1} \left(1 + \frac{i}{2\pi} \Omega \right) H \right] = \det \left(1 + \frac{i}{2\pi} \Omega \right), \end{aligned} \quad (41.72)$$

其中第二个等号来自于 $\det A = \det {}^t A$ 的事实, 第三个等号来自于 (41.70), 而最后一个等号

来自于定理 16.6 [方程 (16.75)]。因此

$$\overline{C_j(\Omega)} = C_j(\Omega)$$

确定 $M : C_j(\Omega) \in H^{2j}(M; \mathbb{R})$ 上的一个实 $2j$ -de Rham 上同调类，并且它与 $\pi : E \rightarrow M$ 上的 Hermite 结构的选择和对应的相容联络独立。它称为复向量丛 $\pi : E \rightarrow M$ 的第 j 陈类 (Chern class) (具有实参数)。(41.71) 等号左边的参数 i 确保了 $C_j(\Omega)$ 是实的，而参数 2π 是一个归一化常数实际上使得陈类是上同调类的积分常数 (见 Kobayashi 和 Nomizu 1969, Vol. II, Chapter XII):

$$C_j(\Omega) \in H^{2j}(M; \mathbb{Z}) . \quad (41.73)$$

通过直接将 (41.71) 等号左边直接展开，可以看到

$$C_j(\Omega) = \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j \sum 1 \leq \alpha_r, \beta_r \leq q \delta_{\beta_1 \dots \beta_j}^{\alpha_1 \dots \alpha_j} \Omega_{\alpha_1}^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{\alpha_j}^{\beta_j} , \quad (41.74)$$

其中， $\delta_{\beta_1 \dots \beta_j}^{\alpha_1 \dots \alpha_j}$ 是由 (28.16) 定义的广义 Kronecker δ -符号。

练习 41.4 对于一个行列式的展开运用 (16.77) 或 (16.80) 来验证 (41.74)。

下面显式公式来自于 (41.74):

$$C_0(\Omega) = 1 , \quad (41.75)$$

$$C_1(\Omega) = \left(\frac{i}{2\pi} \right) \text{Tr} \Omega , \quad (41.76)$$

$$C_2(\Omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 [\text{Tr} \Omega \wedge \text{Tr} \Omega - \text{Tr}(\Omega \wedge \Omega)] , \quad (41.77)$$

$$\vdots$$

$$C_q(\Omega) = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^q \det \Omega . \quad (41.78)$$

注意到如果 $\dim(M) = n$ ，满足 $2j > n$ 的 $C_j(\Omega)$ 消失。

练习 41.5 从 (41.74) 导出 (41.77)。

从陈类，我们可以获得所谓的陈特征。**总陈特征 (total Chern character)** $Ch(\Omega)$ 定义为

$$Ch(\Omega) \equiv \text{Tr} \left(\exp \left(\frac{i}{2\pi} \Omega \right) \right) = \sum_{j=1} \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j \text{Tr}(\underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_{j\text{个}}) . \quad (41.79)$$

由于 $\Omega \wedge \dots \wedge \Omega$ 在 $2j > n = \dim(M)$ 是消失， $Ch(\Omega)$ 是一个有限阶多项式。第 j 陈特征 (Chern character) $Ch_j(\Omega)$ 为

$$Ch_j(\Omega) \equiv \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j \text{Tr}(\underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_{j\text{个}}) . \quad (41.80)$$

陈特征可以表述成陈类的形式。举例而言, 通过 (41.76) 和 (41.77), 有

$$Ch_0(\Omega) = q, \quad (41.81)$$

$$Ch_1(\Omega) = C_1(\Omega), \quad (41.82)$$

$$Ch_2(\Omega) = \frac{1}{2} (C_1(\Omega) \wedge C_1(\Omega) - 2C_2(\Omega)), \quad (41.83)$$

$$\vdots$$

其中, q 是纤维维度。

陈类满足下面实用的性质, 其中的一些性质将只表述而不证明。

定理 41.3 令 $\pi: E \rightarrow M$ 是定义了一个给定联络并且对应曲率 Ω 的一个复向量丛, 而 $f: N \rightarrow M$ 是一个光滑映射。则**总陈类 (total Chern class)**

$$C(\Omega) \equiv \det \left(1 + \frac{i}{2\pi} \Omega \right)$$

而总陈特征 $Ch(\Omega)$ 满足下面:

$$C(f^*\Omega) = f^*C(\Omega), \quad (41.84)$$

$$Ch(f^*\Omega) = f^*Ch(\Omega). \quad (41.85)$$

这些被称为自然条件 (*naturality conditions*)。

定理 41.4 令 $\pi: E \rightarrow M$ 和 $\pi': F \rightarrow M$ 是具有相同基流形 M 的两个复向量丛, 而 Ω_E, Ω_F 分别是 E 和 F 上曲率。则总陈类和总陈特征满足下面关系。

$$i) \quad C(\Omega_{E \oplus F}) = C(\Omega_E) \wedge C(\Omega_F), \quad (41.86)$$

$$ii) \quad Ch(\Omega_{E \oplus F}) = Ch(\Omega_E) \oplus Ch(\Omega_F), \quad (41.87)$$

$$iii) \quad Ch(\Omega_{E \otimes F}) = Ch(\Omega_E) \wedge Ch(\Omega_F). \quad (41.88)$$

证明: 假设 E 的纤维空间是 q_E -维的, 而 F 的纤维空间是 q_F -维的。则 $\Omega_{E \oplus F}$ 可以被显式表示成分块矩阵形式为

$$\Omega_{E \oplus F} = \begin{pmatrix} \Omega_E & 0 \\ 0 & \Omega_F \end{pmatrix}, \quad (41.89)$$

其中, Ω_E 的分块是 $q_E \times q_E$ 矩阵而 Ω_F 的分块是 $q_F \times q_F$ 矩阵。从此得出

$$\begin{aligned} C(\Omega_{E \oplus F}) &= \det \left(1 + \frac{i}{2\pi} \Omega_{E \oplus F} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2\pi} \Omega_E & 0 \\ 0 & 1 + \frac{i}{2\pi} \Omega_F \end{pmatrix} \\ &= \det \left(1 + \frac{i}{2\pi} \Omega_E \right) \wedge \det \left(1 + \frac{i}{2\pi} \Omega_F \right) = C(\Omega_E) \wedge C(\Omega_F). \end{aligned} \quad (41.90)$$

因此 i) 成立。

从 (41.79) 中 $Ch(\Omega)$ 的定义, 我们有

$$\begin{aligned} Ch(\Omega_{E \oplus F}) &= \text{Tr} \left(\exp \left(\frac{i}{2\pi} \Omega_{E \oplus F} \right) \right) = \exp \left(\text{Tr} \left(\frac{i}{2\pi} \Omega_{E \oplus F} \right) \right) \\ &= \sum_j \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j \text{Tr} \left(\underbrace{\Omega_{E \oplus F} \wedge \cdots \wedge \Omega_{E \oplus F}}_{j \uparrow} \right) \end{aligned} \quad (41.91)$$

从 (41.89), 有

$$\text{Tr}(\Omega_{E \oplus F}) = \text{Tr}(\Omega_E) \oplus \text{Tr}(\Omega_F), \quad (41.92)$$

$$\Omega_{E \oplus F} \wedge \Omega_{E \oplus F} = \begin{pmatrix} \Omega_E & 0 \\ 0 & \Omega_F \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Omega_E & 0 \\ 0 & \Omega_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_E \wedge \Omega_E & 0 \\ 0 & \Omega_F \wedge \Omega_F \end{pmatrix}, \quad (41.93)$$

$$\underbrace{\Omega_{E \oplus F} \wedge \cdots \wedge \Omega_{E \oplus F}}_{j \uparrow} = \begin{pmatrix} \overbrace{\Omega_E \wedge \cdots \wedge \Omega_E}^{j \uparrow} & 0 \\ 0 & \underbrace{\Omega_F \wedge \cdots \wedge \Omega_F}_{j \uparrow} \end{pmatrix}. \quad (41.94)$$

因此, (41.91) 生成

$$\begin{aligned} Ch(\Omega_{E \oplus F}) &= \sum_j \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j (\text{Tr}(\overbrace{\Omega_E \wedge \cdots \wedge \Omega_E}^{j \uparrow}) \oplus \text{Tr}(\overbrace{\Omega_F \wedge \cdots \wedge \Omega_F}^{j \uparrow})) \\ &= Ch(\Omega_E) \oplus Ch(\Omega_F) \end{aligned} \quad (41.95)$$

因此 ii) 成立。

为了证明 iii), 我们开始于观察

$$\Omega_{E \otimes F} = (\Omega_E \otimes I_F) \oplus (I_E \otimes \Omega_F), \quad (41.96)$$

其中, I_F 是 $q_F \times q_F$ 单位矩阵而 I_E 是 $q_E \times q_E$ 单位矩阵。因此

$$\begin{aligned} Ch(\Omega_{E \otimes F}) &= \text{Tr} \left(\exp \left(\frac{i}{2\pi} \Omega_{E \otimes F} \right) \right) \\ &= \text{Tr} \left(\exp \left(\frac{i}{2\pi} \{(\Omega_E \otimes I_F) \oplus (I_E \otimes \Omega_F)\} \right) \right) \\ &= \sum_j \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j \text{Tr} \{(\Omega_E \otimes I_F) \oplus (I_E \otimes \Omega_F)\}^j \\ &= \sum_j \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j \text{Tr} \left[\sum_{m=1}^j \binom{j}{m} (\Omega_E \otimes I_F)^m \wedge (I_E \otimes \Omega_F)^{j-m} \right], \end{aligned} \quad (41.97)$$

其中, $A^j \equiv \overbrace{A \wedge \cdots \wedge A}^{j \uparrow}$, 对于一个微分形式的矩阵 A 。让我们写成分块形式

$$\Omega_E \otimes I_F = \begin{pmatrix} \Omega_E & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_E & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & \Omega_E \end{pmatrix}, \quad (41.98)$$

其中, 每一个分块是 $q_E \times q_E$ 矩阵, 而这个矩阵有 $q_F \times q_F$ 个分块。类似地, 写出

$$I_E \otimes \Omega_F = \begin{pmatrix} (\Omega_F)_1^1 I_E & (\Omega_F)_1^2 I_E & \cdots & (\Omega_F)_1^{q_F} I_E \\ \vdots & \vdots & & \\ (\Omega_F)_{q_F}^1 I_E & & & (\Omega_F)_{q_F}^{q_F} I_E \end{pmatrix}. \quad (41.99)$$

这个矩阵与 (41.98) 中有相同的分块结构 $q_F \times q_F$ 个分块并且每个分块是 $q_E \times q_E$ 矩阵。对于这个定理剩下的证明, 我们将记 Tr_q 为 $(q \times q)$ 矩阵的迹。从 (41.99), 运用 α 和 β 为分块指标, 其中 $\alpha, \beta = 1, \dots, q_F$, 我们有

$$\begin{aligned} X_\alpha^\beta &\equiv \overbrace{\left((I_E \otimes \Omega_F)^{j-m} \right)_\alpha}^{(q_E \times q_E) \text{ 矩阵}}^\beta \\ &= (\Omega_F)_\alpha^{i_1} \wedge (\Omega_F)_{i_1}^{i_2} \wedge \cdots \wedge (\Omega_F)_{i_{j-m-2}}^{i_{j-m-1}} \wedge (\Omega_F)_{i_{j-m-1}}^\beta \times I_E. \end{aligned} \quad (41.100)$$

则有

$$\begin{aligned} & \text{Tr}_{q_E q_F} \left[(\Omega_E \otimes I_F)^m \wedge (I_E \otimes \Omega_F)^{j-m} \right] \\ &= \text{Tr}_{q_E q_F} \begin{pmatrix} (\Omega_E)^m \wedge X_1^1 & \cdots \\ \cdots & (\Omega_E)^m \wedge X_2^2 \\ & \vdots & \\ \cdots & (\Omega_E)^m \wedge X_{q_F}^{q_F} \end{pmatrix} \\ &= \text{Tr}_{q_E} \left[(\Omega_E)^m \wedge (X_1^1 + \cdots + X_{q_F}^{q_F}) \right] = \text{Tr}_{q_E} \left[(\Omega_E)^m \wedge \left(\text{Tr}_{q_F} (\Omega_F)^{j-m} \right) I_E \right] \\ &= \text{Tr}_{q_E} (\Omega_E)^m \wedge \text{Tr}_{q_F} (\Omega_F)^{j-m}. \end{aligned} \quad (41.101)$$

从 (41.97) 得到

$$\begin{aligned} Ch(\Omega_{E \otimes F}) &= \sum_j \sum_m \frac{1}{j!} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^j \frac{j!}{m!(j-m)!} \text{Tr}_{q_E} (\Omega_E)^m \wedge \text{Tr}_{q_F} (\Omega_F)^{j-m} \\ &= \sum_l \sum_m \left(\frac{i}{2\pi} \right)^{m+l} \frac{1}{m!l!} \text{Tr}_{q_E} (\Omega_E)^m \wedge \text{Tr}_{q_F} (\Omega_F)^l = Ch(\Omega_E) \wedge Ch(\Omega_F), \end{aligned} \quad (41.102)$$

其中在第二个等号我们已经令 $j - m = l$ 。因此 iii) 成立。 $\square$

定理 41.5 — 分裂原理 (The Splitting Principle). 为了计算陈类的目的, 一个复向量丛 (纤维维度为 q) 表现得像它是 q 线丛的一个和丛。

这个定理的证明将不会在这里展示, 但是它的应用将会被讨论。假设 $\pi: E \rightarrow M$ 实际上是 q 线丛 L_j , $j = 1, \dots, q$ 的一个求和:

$$E = L_1 \oplus \cdots \oplus L_q . \quad (41.103)$$

(一个复向量丛是一个典型纤维是一个一维复向量空间的复向量丛)。则定理 41.4 的 i) 表述意味着

$$C(\Omega_E) = C(\Omega_{L_1}) \wedge \cdots \wedge C(\Omega_{L_q}) , \quad (41.104)$$

其中

$$C(\Omega_{L_j}) = 1 + C_1(\Omega_{L_j}) \equiv 1 + x_j . \quad (41.105)$$

注意到对于一个线丛由于 $q = 1$, (41.71) 意味着

$$\det \left(1 + \frac{i}{2\pi} \Omega_{L_j} \right) = 1 + C_1(\Omega_{L_j}) .$$

则

$$\begin{aligned} C(\Omega_E) &= (1 + x_1) \wedge \cdots \wedge (1 + x_q) \\ &= 1 + (x_1 + \cdots + x_q) + (x_1 \wedge x_2 + \cdots + x_{q-1} \wedge x_q) + \cdots + (x_1 \wedge \cdots \wedge x_q) \\ &= 1 + C_1(\Omega_E) + C_2(\Omega_E) + \cdots + C_q(\Omega_E) , \end{aligned} \quad (41.106)$$

其中

$$C_0(\Omega_E) = 1 , \quad (41.107)$$

$$C_1(\Omega_E) = x_1 + \cdots + x_q , \quad (41.108)$$

$$C_2(\Omega_E) = x_1 \wedge x_2 + \cdots + x_{q-1} \wedge x_q , \quad (41.109)$$

$$\vdots$$

$$C_j(\Omega_E) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_j} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_j} , \quad (41.110)$$

$$\vdots$$

$$C_q(\Omega_E) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_q . \quad (41.111)$$

如果 $q \times q$ 矩阵 $X \equiv \frac{i}{2\pi} \Omega_E$ 是对角化的且对角元素等于 x_j , $j = 1, \dots, q$, 我们将获得相同的结论。由于 $\det(1 + X)$ 是 ad -不变的, 我们可以取展开 $(1 + x_1) \wedge \cdots \wedge (1 + x_q)$, 计算第 j 阶项 (其包括 x_j 的一个第 j 阶齐次多项式), 将其表述为 Ω_E 的 ad -不变函数, 然后用 $C_j(\Omega_E)$ 验证它。在这种方法下, 举例而言, 方程 (41.76) 到 (41.78) 的结论可以很简单从对应的方程 (41.108) 到 (41.110) 得到。这可能比直接从 (41.74) 计算 $C_j(\Omega_E)$ 要少很多繁琐。

陈类与两种其它类型的示性类相关, 它们可表达为实上同调类。它们是 Pontrjagin 类, 表

征具有结构群 $GL(q; \mathbb{R})$ [约化为 $O(q)$ 或 $SO(q)$] 的实向量丛 (或主丛); 而 Euler 类只表征具有结构群 $SO(q)$ 的那些。这种约化可以通过赋予丛 E 一个纤维度规并且在每个纤维上引入标准正交标架来实现。我们提醒读者陈类表征具有结构群 $GL(q; \mathbb{C})$ [约化为 $U(q)$] 的复向量丛。

一个实 $O(q)$ 向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 的**总 Pontrjagin 类 (total Pontrjagin class)** 定义为

$$p(\Omega) \equiv \det \left(1 + \frac{\Omega}{2\pi} \right), \quad (41.112)$$

其中, Ω 是对应一个给定联络的 2-形式的曲率矩阵。如果 Ω_i^j 被给出依赖于一个标准正交标架场, 则 $\Omega^T = -\Omega$ [对于结构群 $O(q)$, $\mathcal{O}(q)$ -值 (Lie 代数-值) Ω 必须是反对称的]。从此得到

$$\det \left(1 + \frac{\Omega}{2\pi} \right) = \det \left(1 + \frac{\Omega^T}{2\pi} \right) = \det \left(1 - \frac{\Omega}{2\pi} \right), \quad (41.113)$$

这意味着 $p(\Omega)$ 必须是 Ω 的一个偶函数。当 Ω 被表述为依赖于任意标架场时, 由于 $p(\Omega)$ 是 ad-不变的, 这点依然是正确的。类似于 (41.71), 我们则可以展开

$$p(\Omega) = \det \left(1 + \frac{\Omega}{2\pi} \right) = 1 + p_1(\Omega) + p_2(\Omega) + \cdots, \quad (41.114)$$

其中, $p_j(\Omega)$ 是 Ω 中一个 $2j$ 阶多项式, 并且因此是一个 $4j$ -形式。它被称为第 j **Pontrjagin 类 (Pontrjagin class)**。注意到: 如果 $2j > q$, 其中 q 是纤维维度, 或者 $4j > n$, 其中 n 是基流形的维度, 则级数终止: $p_j(\Omega) = 0$ 。根据 Chern-Weil 定理 (定理 41.1) (其依旧应用在现在实向量丛的情况), 有

$$p_j(\Omega) \in H^{4j}(M; \mathbb{R}),$$

(基流形 M 上具有实参数的 $4j$ -de Rham 上调群)。注意到

$$\det \left(1 - \frac{\Omega}{2\pi} \right) = \det \left(1 + \frac{i}{2\pi} (i\Omega) \right). \quad (41.115)$$

我们可以关联复丛 $E \otimes \mathbb{C}$ 的 Pontrjagin 类 $p_j(\Omega)$ 和陈类 $C_{2j}(\Omega)$ 为

$$p_j(\Omega_E) = i^{2j} C_{2j}(\Omega_{E \otimes \mathbb{C}}) = (-1)^j C_{2j}(\Omega_{E \otimes \mathbb{C}}). \quad (41.116)$$

因此从 (41.74) 我们有

$$p_j(\Omega) = \frac{1}{(2j)!(2\pi)^{2j}} \sum_{1 \leq \alpha_r, \beta_r \leq q} \delta_{\beta_1 \dots \beta_{2j}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2j}} \Omega_{\alpha_1}^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\alpha_{2j}}^{\beta_{2j}}. \quad (41.117)$$

类似于定理 41.4 的表述 i), 我们有下面的事实:

$$p(\Omega_{E \oplus F}) = p(\Omega_E) \wedge p(\Omega_F). \quad (41.118)$$

可以用完全相同的方法证明它。假设 M 是一个偶数维定向的 Riemann 流形, 维度为 $q = 2l$, 并且考虑切丛 TM 。结构群可以通过使用一个由 Riemann 度规确定的标准正交标架场被约化

为 $SO(2l)$ 。我们可以定义 M 上一个 $2l$ -形式 e , 称 **Euler 类 (Euler class)**, 为

$$e(A) \wedge e(A) = p_l(A), \quad (41.119)$$

其中, p_l 是第 l Pontrjagin 类而 A 是一个 2 -形式的 $2l \times 2l$ 矩阵。注意到即使 $p_l(\Omega)$ 同样消失 [由于 $p_l(\Omega) \in H^{4l}(M; \mathbb{R})$ 和 $\dim(M) = 2l$], $e(\Omega)$ 由 (41.119) 良好定义。如果 $\dim(M)$ 是奇数, 我们定义 $e(\Omega) = 0$ 。我们将用装备一般度规 [(39.169)] 的简单例子 $M = S^2$ 来表述这种情况。在这种情况下, Ω_i^j 由 [(39.176)] 给出

$$(\Omega_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta d\theta \wedge d\phi \\ \sin \theta d\theta \wedge d\phi & 0 \end{pmatrix}.$$

根据 (41.116) 和 (41.77), 有

$$\begin{aligned} p_1(\Omega_{T(S^2)}) &= -C_2(\Omega) = -\frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(\Omega \wedge \Omega) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\phi \right) \wedge \left(\frac{1}{2\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\phi \right). \end{aligned} \quad (41.120)$$

这种表达式同样消失; 但是它允许我们根据 (41.119) 来验证 $e(\Omega)$ 为

$$e(\Omega_{T(S^2)}) = \frac{1}{2\pi} \sin \theta d\theta \wedge d\phi. \quad (41.121)$$

很有意思的注意到

$$\int_{S^2} e(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2, \quad (41.122)$$

其是 S^2 的 Euler 示性数 $\chi(S^2)$ [c.f. (33.15)]。实际上, (41.122) 是 Gauss-Bonnet 定理的一个特殊情况。

定理 41.6 — Gauss-Bonnet 定理 (Gauss-Bonnet Theorem). 对于一个紧致定向的 Riemann 流形 M , 有

$$\boxed{\int_M e(M) = \chi(M)}, \quad (41.123)$$

其中, $e(M)$ 是 M 的 Euler 类而 $\chi(M)$ 是 M 的 Euler 示性数。

这个具有历史意义的定理的证明远远超出了本书的范围, 将不会在这里展示。一个漂亮的证明参见 Chern 通过一个固有方法 (一个无需假设 M 嵌入在一个更高的维度流形中的方法), 实际上打开了研究示性类的大门 (见 S. S. Chern, 1944)。

Euler 类 $e(\Omega)$ 可以被显式写成曲率矩阵 Ω 作为下面引理的一个结论。

引理 41.3 假设 A 是一个反对称 $2l \times 2l$ 矩阵。则

$$\det A = [Pf(A)]^2, \quad (41.124)$$

其中多项式 $Pf(A)$ 称为矩阵 A 的 **Pfaffian** 由下式给出

$$Pf(A) \equiv \frac{(-1)^l}{2^l l!} \sum_{\sigma \in S(2l)} (\text{sgn } \sigma) A_{\sigma(1)}^{\sigma(2)} A_{\sigma(3)}^{\sigma(4)} \cdots A_{\sigma(2l-1)}^{\sigma(2l)} . \quad (41.125)$$

上面方程中的求和遍历对称群 $S(2l)$ 中所有的排列。

证明：假设 A 是一个反对称 $2l \times 2l$ 矩阵。则它可以通过一些 $g \in O(2l)$ 分块对角化

$$g^{-1}Ag = g^T Ag = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & & \cdots \\ & & \ddots & \\ \cdots & & & 0 & \lambda_l \\ 0 & & & -\lambda_l & 0 \end{pmatrix} \equiv A' . \quad (41.126)$$

由于行列式在相似变换下是不变的 (c.f. 定理 16.6), 有

$$\det A = \det A' = (\lambda_1)^2 (\lambda_2)^2 \cdots (\lambda_l)^2 = \prod_{i=1}^l (\lambda_i)^2 . \quad (41.127)$$

根据由 (41.125) 给出的一个 Pfaffian 的定义, 有

$$Pf(A') = (-1)^l (A')_1^2 (A')_3^4 \cdots (A')_{2l-1}^{2l} = (-1)^l \prod_{i=1}^l \lambda_i . \quad (41.128)$$

从 (41.127) 得到

$$\det A = \det A' = [Pf(A')]^2 . \quad (41.129)$$

练习 41.6 运用 (41.126) 中显式给出的矩阵 A' 来证明 (41.128)。注意到 A' 的唯一不为零的元素是

$$(A')_1^2 = -(A')_2^1 = \lambda_1, (A')_3^4 = -(A')_4^3 = \lambda_2, \dots, (A')_{2l-1}^{2l} = -(A')_{2l}^{2l-1} = \lambda_l .$$

因此, $[Pf(A)]^2$ 对于任意反对称 $2l \times 2l$ 矩阵在 $O(2l)$ -相似变换下是一个不变量:

$$[Pf(A)]^2 = [Pf(g^T Ag)]^2 , \quad (41.130)$$

因而引理成立。 $\square$

对于一个 $2l$ -维 Riemann 流形的切丛 TM , 有

$$p_l(\Omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2l} \det \Omega . \quad (41.131)$$

[c.f. (41.114) 和 (41.112)]。因此, 从 (41.119), (41.124) 和 (41.125), 我们可以表述 Euler 类

$e(\Omega)$ 为

$$e(\Omega) = \frac{(-1)^l}{l! (4\pi)^l} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(2l)} (\text{sgn } \sigma) \Omega_{\sigma(1)}^{\sigma(2)} \wedge \Omega_{\sigma(3)}^{\sigma(4)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(2l-1)}^{\sigma(2l)} . \quad (41.132)$$

我们将用一个关于示性类如何服务于分类主 G -丛的一般且有点正式的概括来总结本章，其的一个成员一般写成 $\pi: P \rightarrow X$ ，其中总空间 P ，基流形 G 和基流形 X (c.f. 定义 37.2)。分类问题中的一个基本问题如下：给定一个基流形 X 和一个结构 G ，它们有多少种等价的方法组成主 G -丛？ X 上的两个主 G -丛 $\pi_1: P_1 \rightarrow X$ 和 $\pi_2: P_2 \rightarrow X$ 被称为是**等价的 (equivalent)**，如果它们之间存在一个 G -等变 (G -equivariant) 同胚 $\varphi: P_1 \rightarrow P_2$ ，即： φ 满足性质 $\pi_1 = \pi_2 \circ \varphi$ 。等价地，如 Figure 41.1 中的图像所示。

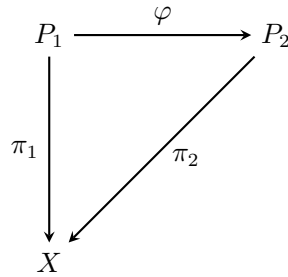


Figure 41.1

此时回忆一个主丛的平凡性的概念及相关事实会有一定帮助 (c.f. 定义 37.4, 定义 37.5 和定理 37.2)。主 G -丛在 X 上给出为 $P = X \times G$ ，被称为**积丛 (product bundle)**，其中 $L_g(x, g') = (x, gg')$ 和 $\pi(x, g) = x$ ， $x \in X$ ， $g, g' \in G$ 。任意等价于积丛的丛被称为是**平凡的 (trivial)**。对于主丛是平凡的充分必要条件是它容纳一个全局截面。我们将记主 G -丛在 X 上的等价类 $[P]$ 的集合为 $Bndl_G(X)$ 。

定义 41.2 令 $\pi: P \rightarrow X$ 是一个主 G -丛而 $f: Y \rightarrow X$ 是一个连续映射。 P 在基流形 Y 的**拉回丛 (pullback bundle)** $f^*(P)$ 被定义为一个丛，其总空间为

$$\{(p, y) \in P \times Y \mid \pi(p) = f(y)\} ,$$

其中，投影为 $(p, y) \mapsto y$ 和左 G -作用为 $L_g(p, y) = (L_g(p), y)$ ， $g \in G$ 。

定理 41.7 假设两个主 G -丛 $\pi_1: P_1 \rightarrow X$ 和 $\pi_2: P_2 \rightarrow X$ 相互是等价的： $P_1 \sim P_2$ 或 $[P_1] = [P_2] \in Bndl_G(X)$ ；而 $f: Y \rightarrow X$ 是一个连续映射。则

$$f^*(P_1) \sim f^*(P_2) , \quad (41.133)$$

即：等价丛的拉回丛是等价的。丛拉回映射 f^* 则可以考虑成从 $Bndl_G(X)$ 到 $Bndl_G(Y)$ 的映射，即： $f: Y \rightarrow X$ 诱导映射

$$f^*: Bndl_G(X) \rightarrow Bndl_G(Y) .$$

练习 41.7 证明上面的定理。

主丛的分类理论的第一个重要事实是下面的定理，将只表述而不证明。

定理 41.8 — 覆盖同伦定理 (Covering Homotopy Theorem). 丛拉回映射 $f^* : Bndl_G(X) \rightarrow Bndl_G(Y)$ 只取决于 f 的同伦类 $[f]$ 。

此时，一个示性类的一般概念可以被引入 (上面考虑的陈类, Pontrjagin 类和 Euler 类都是特殊例子)。

定义 41.3 假设 $f : Y \rightarrow X$ 是流形之间的一个连续映射。主 G -丛在 X 上的一个示性类 (*characteristic class*) C 是一个映射

$$C : Bndl_G(X) \rightarrow H^*(X)$$

其分配给每个主 G -丛 P 在 X 上一个元素 $C(P) \in H^*(X)$, 其中 $H^*(X)$ 是 X 的一些上同调环 (比如 *de Rham* 上同调), 使得 *i)* **自然条件 (naturality condition)** [c.f. (41.84)]

$$C(f^*(P)) = f^*(C(P)) \quad (41.134)$$

满足。同时 *ii)* $C(P) = C(P')$, 如果 P 等价于 P' : 对于 G -丛所有的示性类的集合被记为 $Char(G)$ 。

引理 41.4 如果基流形 X 被收缩到一个点, 则一个主 G -丛 $\pi : P \rightarrow X$ 是平凡的。

证明: 假设 X 被收缩 (*contractible*) 到一个点。则存在映射 $[f(t)] : X \rightarrow X$, $0 \leq t \leq 1$ 的一个同伦类使得 $f(0)$ 是恒等映射 [对于任意 $x \in X$, 有 $(f(0))(x) = x$] 而 $f(1)$ 把 X 中每个点映射到一个固定点 $x_0 \in X$ 。我们注意到对于任意 $t \in [0, 1]$ 有 $f(t)(x_0) = x_0$ 。考虑拉回丛 $(f(1))^*(P)$ 。通过定义 41.2, 它只是积丛 $\pi^{-1}(x_0) \times Y$, 其是平凡的。通过覆盖同伦定理 (定理 41.8), 由于 $f(0) \sim f(1)$, 因此 $(f(0))^*(P)$ 等价于 $(f(1))^*(P)$ (两个映射属于相同同伦类)。但是由于 $f(0)$ 是 X 中恒等映射, $(f(0))^*(P)$ 恰好是 $\pi : P \rightarrow X$ 。因此, $\pi : P \rightarrow X$ 是平凡的。□

举例而言, 由于 $\mathbb{R}^n$ 可被收缩到一个点, 在 $\mathbb{R}^n$ 上的标架丛是平凡的。则根据定理 37.2, 在 $\mathbb{R}^n$ 上存在一个全局标架场。

引理 41.5 如果主 G -丛 $\pi : P \rightarrow M$ 是平凡的, 则存在一个连续映射 $f : M \rightarrow \{p\}$, 其中 $\{p\}$ 是包括一个单个点 p 的一个空间, 使得 $\pi : P \rightarrow M$ 是一个拉回丛 $f^*(E)$, 其中 $\pi' : E \rightarrow \{p\}$ 是一个在点 P 上的 G -丛。

证明: 由于 $\pi : P \rightarrow M$ 是平凡的, 我们可以不失一般性地记 $P = M \times G$, 其中 $\pi(x, g) = x$, $x \in M$, $g \in G$ 。令 $\pi' : E \rightarrow \{p\}$ 是具有总空间 $E = \{p\} \times G$ 的 G -丛 $\pi'(p, g) = p$ 。则通过定义 41.2, 拉回丛 $f^*(E)$ 是由总空间如下的丛给出

$$\{(p, g), x\} \in (\{p\} \times G) \times M \mid \pi'(p, g) = f(x) = p\},$$

其只是 $(\{p\} \times G) \times M$, 具有投影 $((p, g), x) \mapsto x \in M$ 。这个丛很明显与 $\pi : M \times G \rightarrow M$ 或

$\pi : P \rightarrow M$ 是等价的。 $\square$

在上面引理的条件下，自然条件意味着：对于任意 $C \in \text{Char}(G)$ ，有

$$C(f^*(E)) = C(P) = f^*(C(E)) \quad (41.135)$$

但是由于 $\pi' : E \rightarrow \{p\}$ 是在一个点上的丛，根据一个单个点的一个空间的所有上同调群都是平凡的事实（每个都包括一个单个元素，恒元 0）， $C(E) \in H^*(\{p\})$ 是平凡的。因此 $f^*(C(E))$ 也是平凡的，并且我们有下面的基本结论。

推论 41.1 一个平凡丛的示性类都是平凡的。

总的来说，所有示性类的等价对于两个 G -丛的等价性是一个必要（但不充分）条件；虽然在很多情况下，充分性也保持。

我们现在将说明覆盖同伦定理是如何通过简化成寻找流形之间所有连续映射的同伦类的问题“解决”主 G -丛的分类问题。令 $[X, Z]$ 表示从 X 到 Z 的连续映射的所有同伦类的集合而 $f : Y \rightarrow X$ 是一个连续映射。则对于 $[h] \in [X, Z]$ ，有

$$f^*[h] = [h \circ f] \in [Y, Z]. \quad (41.136)$$

如 Figure 41.2 中的图。

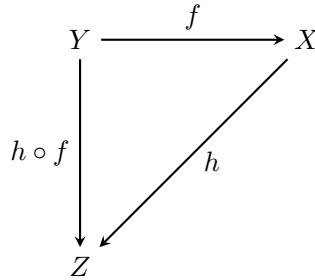


Figure 41.2

考虑任意主 G -丛 $\pi : P \rightarrow Z$ 。通过覆盖同伦定理，我们有一个映射 $\alpha : [X, Z] \rightarrow \text{Bndl}_G(X)$ 由下式给出：对于任意 $[h] \in [X, Z]$ ，有

$$\alpha([h]) = [h^*(P)], \quad (41.137)$$

使得自然条件

$$\alpha \circ f^* = f^* \circ \alpha \quad (41.138)$$

满足。我们现在定义一个所谓的**泛 G -丛 (universal G -bundle)**，其可以被用来分类所有主 G -丛。

定义 41.4 如果上面引入的映射 $\alpha : [X, Z] \rightarrow \text{Bndl}_G(X)$ [(41.137) 和 (41.138)] 是双射，则一个主 G -丛 $\pi : P \rightarrow Z$ 被称为是**泛的 (universal)**。

分类的可能性取决于下面事实，将只表述而不证明。

定理 41.9 给定一个群 G ，泛 G -丛总是存在的。实际上，如果一个主 G -丛 $\pi: P \rightarrow Z$ 的总空间 P 是收缩的，则 $\pi: P \rightarrow Z$ 是泛的。

我们将记 G -丛为 $\pi_U: U_G \rightarrow B_G$ ，其中基流形 B_G 被称为对于群 G 的**分类空间 (classifying space)**。则如果 $\pi: P \rightarrow X$ 是任意主 G -丛， $\pi: U_G \rightarrow B_G$ 的泛性意味着有唯一一个 $[h] \in [X, B_G]$ 使得 $P \sim h^*(U_G)$ (给定主 G -丛通过 h^* 等价于泛 G -丛的拉回)。 $[h]$ 的任意表示 h 则被称为对于 P 的一个**分类映射 (classifying map)**。很明显从 Figure 41.3 中看到：对于任意连续映射 $f: Y \rightarrow X$ ， $h \circ f$ 对于拉回丛 $\pi': f^*(P) \rightarrow Y$ 是一个拉回丛。因此，无论基流形如何， $\pi_G: U_G \rightarrow B_G$ 对于所有主 G -丛的分类都很好。注意到对于 U_G 的分类映射只是 B_G 的恒等映射到它自身。

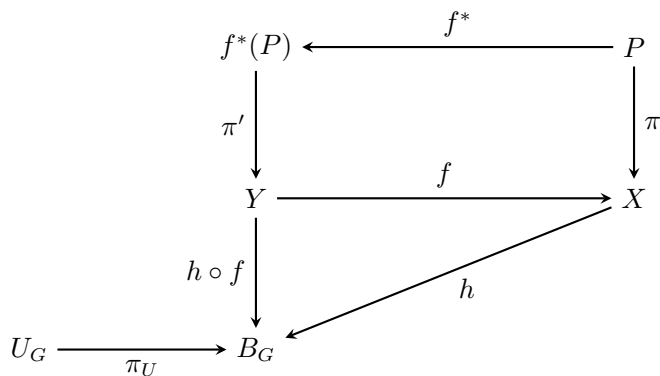


Figure 41.3

通过示性类分类主 G -丛的正式策略则包括下面步骤：

- 1) 对于一个给定群 G 和基流形 X ，寻找一个泛 G -丛 $\pi_U: U_G \rightarrow B_G$ 。
- 2) 意识到对于 U_G 所有示性类的集合是规范同构于分类空间 B_G 的上同调环：

$$\text{Char}(G) \sim H^*(B_G) . \quad (41.139)$$

- 3) 对于感兴趣的主 G -丛 $\pi: P \rightarrow X$ ，寻找一个分类映射 h 使得 $P = h^*(U_G)$ 。
- 4) 泛丛 $C(U_G) \in H^*(B_G)$ 的每个示性类则通过拉回给出感兴趣的一个示性类 $C(P)$ ：

$$C(P) = h^*(C(U_G)) . \quad (41.140)$$

我们将对于泛主 G -丛表述下面有趣的事实而不证明。在下面的表述 i) 到 v) 中，令 $m =$ 感兴趣的主 G -丛 $\pi: P \rightarrow M$ 中基流形 M 的维度，且商群都是右陪集空间。

- i) 对于 $G = O(k)$ ，分类空间由下式给出

$$B_G = \text{Gr}(N, k, \mathbb{R}) \sim \frac{O(N)}{O(k) \times O(N-k)} , \quad (41.141)$$

其中， $N \geq m + k + 1$ 而 $\text{Gr}(N, k, \mathbb{R})$ 被称为 k -维平面经过 $\mathbb{R}^N$ 的原点的 **Grassmann 流形 (Grassmann manifold)**。总空间由下式给出

$$U_G = V_{N, N-k}(\mathbb{R}) \sim \frac{O(N)}{O(N-k)} , \quad (41.142)$$

称为一个 **Stiefel 流形 (Stiefel manifold)**。对于给定 N 和 k ，它实际上在 $\mathbb{R}^N$ 中是 k -标架的流形。投影 π 在泛丛

$$\pi : V_{N, N-k}(\mathbb{R}) \rightarrow Gr(N, k, \mathbb{R})$$

投影到 $\mathbb{R}^n$ 中 k -标架其组成的 k -平面。一个具体 k -平面上纤维则是组成它的所有 k -标架的集合，当然它同构于 $O(k)$ 。注意到 Grassmann 流形 $Gr(N, k, \mathbb{R})$ 的维度可以从 (41.141) 和事实

$$\dim(O(m)) = \frac{m(m-1)}{2}, \quad \text{和} \quad \dim(G/H) = \dim G - \dim H.$$

获得。因此

$$\begin{aligned} \dim(Gr(N, k, \mathbb{R})) &= \frac{1}{2}N(N-1) - \left[\frac{1}{2}k(k-1) + \frac{1}{2}(N-k)(N-k-1) \right] \\ &= k(N-k). \end{aligned} \quad (41.143)$$

由于一个平凡主 G -丛 $\pi : P \rightarrow M$ 的总空间 P 可以写成 $M \times G$ ，我们的泛丛的非平凡性可以被认为成下面不等式成立程度的衡量标准：

$$\left(\frac{O(N)}{O(k) \times O(N-k)} \right) \times O(k) \neq \frac{O(N)}{O(N-k)}. \quad (41.144)$$

ii) 对于 $G = SO(k)$ ，分类空间为

$$B_G = \widetilde{Gr}(N, k, \mathbb{R}) \sim \frac{SO(N)}{SO(k) \times SO(N-k)}, \quad (41.145)$$

其中， $N \geq m + k + 1$ 。它被称为**定向 Grassmann 流形 (oriented Grassmann manifold)**。总空间为

$$U_G = \widetilde{V}_{N, N-k}(\mathbb{R}) \sim \frac{SO(N)}{SO(N-k)}. \quad (41.146)$$

iii) 对于 $G = U(k)$ ，有

$$B_G = Gr(N, k, \mathbb{C}) \sim \frac{U(N)}{U(k) \times U(N-k)}, \quad (41.147)$$

其中， $m \geq 2N - 2k$ 。它是实维度为 $2k(N-k)$ 的复 Grassmann 流形。总空间为

$$U_G = \widetilde{V}_{N, N-k}(\mathbb{C}) \sim \frac{U(N)}{U(N-k)}. \quad (41.148)$$

iv) 对于任意实维度为 k 的紧致 Lie 群 G

$$B_G = \frac{O(N)}{G \times O(N-k)}, \quad (41.149)$$

其中, $N \geq m + k + 1$ 。总空间还是 $U_G = O(N)/(O(N - k))$ 。

v) 对于 G (实维度为 k) 连通但不一定紧致, 令 $H \subset G$ 是 G 的最大紧致子群。则

$$B_G = \frac{O(N)}{H \times O(N - k)}, \quad (41.150)$$

其中, $N \geq m + k + 1$ 。总空间依旧是 $U_G = O(N)/(O(N - k))$ 。

到目前为止, 我们只显示讨论了对于主 G -丛的分类的泛丛。One can also obtain universal vector bundles 我们可以很自然地获得泛向量丛 $\pi_E : U_E \rightarrow B_G$ 对于伴随向量丛 $\pi : E \rightarrow M$ (定义了结构群 G) 的分类。分类空间 B_G 和前面的完全一致。简单地把 B_G 中每个点上面的纤维当作点本身, 这就是 G 自然作用于它上的一个向量空间。对于泛主 G -丛, 我们有一个类似图像 (Figure 41.4)。

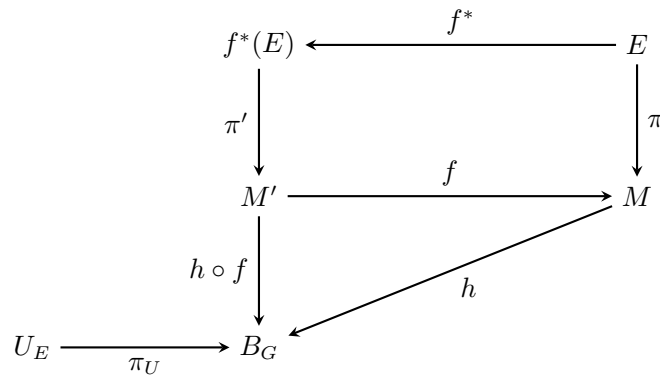


Figure 41.4

感兴趣的向量丛的示性类通过拉回计算 [c.f. (41.140)]:

$$C(E) = h^*(C(U_E)). \quad (41.151)$$

实际上, 公式 (41.74), (41.117) 和 (41.132) 是计算 $C(E)$ 的显式算法别对于陈类, Pontrjagin 类和 Euler 类。

我们最后再提一个示性类的例子, 称为 **Stiefel-Whitney 类 (Stiefel-Whitney classes)**。它们在 $O(n)$ -丛中出现, 但是不像先前考虑的类, 它们不能从曲率 2-形式中计算。对于 $\pi : E \rightarrow M$, 它们在所谓的 Čech 上同调 $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ 中取值, 其中系数在 $\mathbb{Z}_2 = \{+1, -1\}$ 中。我们将不考虑 Stiefel-Whitney 类的任何其它细节, 除了表述下面两个关键结论:

- 1) 当且仅当切丛的第一 Stiefel-Whitney 类 $w_1(TM)$ 是平凡的, 一个流形 M 是定向的。
- 2) 当且仅当第二 Stiefel-Whitney 类 $w_2(TM)$ 是平凡的, 在一个流形 M 上存在一个自旋结构 (见定义 43.10)。

结论 2) 很明显对于物理重要, 因为它在 M 的拓扑学方面对可以生活在 M 上的粒子种类进行了限制。

42. 陈-Simons 形式

陈-Simons 形式通过一个叫做**超渡 (transgression)**的过程从陈类中产生，其涉及到将一个丛 $\pi: E \rightarrow M$ 的基流形 M 上的一个特征形式 C 通过 π^* 拉回到总空间 E ，从而使得拉回组成 E 上一个正合形式：

$$\pi^*C = d(CS(C)) .$$

如此获得的陈-Simons 形式 $CS(C)$ 在物理学中产生了许多重要应用，举例而言，在拓扑量子场论和凝聚态物理学中 (分数统计和量子 Hall 效应)。

我们将从超渡的非正式讨论开始。跟随陈省身 (见陈省身, 1990)，我们运用二维 Gauss-Bonnet 公式的例子 [c.f. (41.123), 定理 41.6]。令 M 是一个二维定向 Riemann 流形而 $\pi: P \rightarrow M$ 是 M 的标准正交标架丛。总空间 P 中的一个点则被写成 $(x; e_1 e_2)$ ，其中 (e_1, e_2) 是原点在 $x \in M$ 的一个标准正交标架，而投影 π 将 $(x; e_1 e_2)$ 映射到它的原点 x 。选择一个标架场 (e_1^0, e_2^0) 具有余标架场 $((\omega^0)^1, (\omega^0)^2)$ 。则我们有局域表达

$$e_1 = (\cos \tau) e_1^0 + (\sin \tau) e_2^0, \quad e_2 = (-\sin \tau) e_1^0 + (\cos \tau) e_2^0; \quad (42.1)$$

和

$$\omega^1 = (\cos \tau)(\omega^0)^1 + (\sin \tau)(\omega^0)^2, \quad \omega^2 = (-\sin \tau)(\omega^0)^1 + (\cos \tau)(\omega^0)^2, \quad (42.2)$$

其中， (ω^1, ω^2) 是 (e_1, e_2) 的对偶余标架而 e_1^0 和 e_1 之间的夹角 τ 是局域纤维坐标。方程 (42.2) 说明 ω^1 和 ω^2 是 P 上全局良定义的 1-形式。对于 ω^1 取外微分，我们得到

$$d(\omega^1) = -\sin \tau d\tau \wedge (\omega^0)^1 + \cos \tau d\tau \wedge (\omega^0)^2 + \cos \tau d(\omega^0)^1 + \sin \tau d(\omega^0)^2. \quad (42.3)$$

我们总是可以写

$$d(\omega^0)^1 = a(\omega^0)^1 \wedge (\omega^0)^2, \quad d(\omega^0)^2 = b(\omega^0)^1 \wedge (\omega^0)^2, \quad (42.4)$$

其中, a 和 b 只取决于基流形坐标。通过 (42.2), 我们则有

$$d(\omega^0)^1 = a' \omega^1 \wedge \omega^2, \quad d(\omega^0)^2 = b' \omega^1 \wedge \omega^2, \quad (42.5)$$

其中, a' 和 b' 现在是取决于基流形坐标和纤维坐标 τ 的量, 即: P 上的函数。将 (42.5) 代入 (42.3), 并且对于 $d\omega^2$ 进行类似的计算, 我们获得

$$d\omega^1 = d\tau \wedge \omega^2 + A \omega^1 \wedge \omega^2, \quad d\omega^2 = \omega^1 \wedge d\tau + B \omega^1 \wedge \omega^2, \quad (42.6)$$

其中, A 和 B 是 P 上的函数。现在在 P 上定义下面 1-形式

$$\omega_1^2 \equiv d\tau + A \omega^1 + B \omega^2 = -\omega_2^1. \quad (42.7)$$

则有

$$d\omega^1 = \omega_1^2 \wedge \omega^2 = \omega^2 \wedge \omega_2^1, \quad (42.8)$$

$$d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2. \quad (42.9)$$

它们正是由 (31.33) 给出的结构方程: 它们完全确定 1-形式 ω_1^2 , 实际上是联络 1-形式。结构方程 (42.8) 和 (42.9) 表述联络是挠自由的事实 [c.f. (39.123)]。对 (42.8) 的两边取外导数我们找到

$$0 = d\omega_1^2 \wedge \omega^2 - \omega_1^2 \wedge d\omega^2. \quad (42.10)$$

但是从 (42.6) 和 (42.7), 有

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \wedge d\omega^2 &= (d\tau + A\omega^1 + B\omega^2) \wedge (\omega^1 \wedge d\tau + B\omega^1 \wedge \omega^2) \\ &= B d\tau \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + B \omega^2 \wedge \omega^1 \wedge d\tau = 0. \end{aligned} \quad (42.11)$$

因此

$$d\omega_1^2 \wedge \omega^2 = 0. \quad (42.12)$$

类似地, 对 (42.9) 取外微分产生

$$d\omega_1^2 \wedge \omega^1 = 0. \quad (42.13)$$

上面两个方程意味着下面超渡的基本结论:

$$\boxed{d\omega_1^2 = -K \omega^1 \wedge \omega^2}. \quad (42.14)$$

可以怀疑 K 在一般情况下是 P 上一个函数, 但是事实上只是 M 上一个函数。实际上, 对 (42.14) 取外微分给出

$$\begin{aligned} 0 &= -dK \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 - K d(\omega^1 \wedge \omega^2) \\ &= dK \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 - K(d\omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^1 \wedge d\omega^2) = dK \wedge \omega^1 \wedge \omega^2, \end{aligned} \quad (42.15)$$

其中最后一个等号来自于由 (42.6) 给出的 $d\omega^1$ 和 $d\omega^2$ 的表达。现在 (42.7) 意味着

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega_1^2 = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge d\tau \neq 0. \quad (42.16)$$

由于 ω^1 , ω^2 以及 ω_1^2 都是全局定义的, 上面的方程表明: P 有一个余标架场 $\omega^1, \omega^2, \omega_1^2$, 并且因此是**可平行化的 (parallelizable)**。如果 K 确实取决于纤维坐标 τ , dK 将有一项与 $d\tau$ 成正比并且 (42.16) 则将意味着 $dK \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0$, 其与 (42.15) 矛盾。因此 K 是基流形 M 上的一个函数。我们观察到 $\omega^1 \wedge \omega^2$ 是 M 上的区域元素而 K 是 M 的 Gauss 曲率。[c.f. (39.166) 和练习 39.14 到练习 39.17 的结论]。

超渡的结论 (42.14) 包含陈省身对 Gauss-Bonnet 定理的优雅证明的本质。它的重要性在于以下几点。通过 (42.16) 和事实: K 是 M 上的一个函数, $-K\omega^1 \wedge \omega^2$ 是 M 上的一个 2-形式, 并且如此, 不是正合的。然而当拉回到 P , (42.14) 的等号左边表示它成为 P 上的 1-形式的外导数 (联络 1-形式 ω_1^2) 并且因此在 P 上是正合的。通过 Gauss-Bonnet 定理, 2-形式 $\frac{1}{2\pi} K\omega^1 \wedge \omega^2$ 实际上是 Euler 类。

上面所述的超渡过程基于一个基本事实: P 总是可平行化的, 等价地, P 上总存在一个全局标架场, 即使它可能不存在在基流形 M 上。这一事实很容易看出如下。考虑一个任意主 G -丛 $\pi: P \rightarrow M$ 。运用投影算符 π , 我们可以构造基流形为 P 的拉回丛 $\pi^*(P)$, 称为 P 的**方丛 (square bundle)**。这个丛接纳了“对角”全局截面 $p \mapsto (p, p)$, 并且因此通过定理 37.2, 它总是平凡的。这种意义上, 总空间 P 总是比基流形 M 更简单。

让我们现在来对陈类应用超渡过程, 通过将它们拉回到伴随一个复向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 的标架丛 $\pi': P \rightarrow M$ 。假设在 M 的一个局域坐标邻域中, 我们有对于一个给定联络有一个局域表达式 ω 依赖于 E 上一个局域标架场 $\{e_i\}$ 的一个选择。在规范的一个局域改变下, 或者标架场的一个局域改变下, 有

$$(e')_i = g_i^j e_j, \quad (g_i^j) \in G, \quad (42.17)$$

我们对于联络矩阵有下面的表达式 [c.f. (35.17)]:

$$\varphi = (dg)g^{-1} + g\omega g^{-1}. \quad (42.18)$$

如果矩阵 g 的元素 g_i^j 被考虑成局域纤维坐标, 则 φ 通过 $(\pi')^*$ 成为 ω 的拉回, 即:

$$\varphi = (\pi')^*(\omega), \quad (42.19)$$

并且是 P 上 1-形式的一个良定义联络矩阵。对应 2-形式的曲率矩阵

$$\Phi = d\varphi - \varphi \wedge \varphi = g\Omega g^{-1}, \quad (42.20)$$

其中, $\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega$ 也在 P 上是良定义的。

考虑第一陈类 [(41.76)]

$$C_1(\Phi) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr } \Phi. \quad (42.21)$$

通过 (42.20), $\text{Tr } \Phi$ 由下式给出

$$\text{Tr } \Phi = \text{Tr } d\varphi - \text{Tr}(\varphi \wedge \varphi) = \text{Tr}(d\varphi) = d(\text{Tr } \varphi) , \quad (42.22)$$

因为

$$\text{Tr}(\varphi \wedge \varphi) = 0 , \quad (42.23)$$

通过事实有

$$\text{Tr}(\varphi \wedge \varphi) = \varphi_i^j \wedge \varphi_j^i = -\varphi_j^i \wedge \varphi_i^j = -\text{Tr}(\varphi \wedge \varphi) . \quad (42.24)$$

因此, 有

$$\boxed{C_1(\Phi) = \frac{i}{2\pi} d(\text{Tr } \varphi)} . \quad (42.25)$$

换句话说, 第一陈类可以被写成 P 上一个正合形式。现在考虑第二陈类 [(41.77)]

$$C_2(\Phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 [\text{Tr } \Phi \wedge \text{Tr } \Phi - \text{Tr}(\Phi \wedge \Phi)] . \quad (42.26)$$

对于 P 上曲率形式 Φ , 我们有 Bianchi 恒等式 [c.f. (35.36)]

$$d\Phi = \varphi \wedge \Phi - \Phi \wedge \varphi . \quad (42.27)$$

从 (42.22), 有

$$\text{Tr } \Phi \wedge \text{Tr } \Phi = d(\text{Tr } \varphi) \wedge d(\text{Tr } \varphi) = d(\text{Tr } \varphi \wedge d(\text{Tr } \varphi)) . \quad (42.28)$$

为了说明 $C_2(\Phi)$ 中 $\text{Tr}(\Phi \wedge \Phi)$ 的项在 P 上也是正合的, 我们进行下面的计算。首先我们有, 对 Φ 使用 (42.20) 并且运用 Bianchi 恒等式 (42.27), 有

$$\begin{aligned} d(\text{Tr}(\varphi \wedge \Phi)) &= \text{Tr}(d(\varphi \wedge \Phi)) = \text{Tr}(d\varphi \wedge \Phi - \varphi \wedge d\Phi) \\ &= \text{Tr}(d\varphi \wedge \Phi) - \text{Tr}(\varphi \wedge d\Phi) \\ &= \text{Tr}((\Phi + \varphi \wedge \varphi) \wedge \Phi) - \text{Tr}(\varphi \wedge (\varphi \wedge \Phi - \Phi \wedge \varphi)) \\ &= \text{Tr}(\Phi \wedge \Phi) + \text{Tr}(\varphi \wedge \Phi \wedge \varphi) = \text{Tr}(\Phi \wedge \Phi) - \text{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \Phi) , \end{aligned} \quad (42.29)$$

其中在最后一个等号, 我们已经使用了事实

$$\text{Tr}(\varphi \wedge \Phi \wedge \varphi) = -\text{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \Phi) , \quad (42.30)$$

它可以论证如下:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\varphi \wedge \Phi \wedge \varphi) &= \varphi_i^j \wedge \Phi_j^k \wedge \varphi_k^i = \varphi_i^j \wedge \varphi_k^i \wedge \Phi_j^k \\ &= -\varphi_k^i \wedge \varphi_i^j \wedge \Phi_j^k = -\text{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \Phi) . \end{aligned} \quad (42.31)$$

再一次从 (42.20) 和 (42.27), 我们也有

$$\begin{aligned}
 d[\text{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \varphi)] &= \text{Tr}[d(\varphi \wedge \varphi \wedge \varphi)] = \text{Tr}[d(\varphi \wedge (d\varphi - \Phi))] \\
 &= \text{Tr}[d(\varphi \wedge d\varphi) - d(\varphi \wedge \Phi)] = \text{Tr}[d\varphi \wedge d\varphi - (d\varphi \wedge \Phi - \varphi \wedge d\Phi)] \\
 &= \text{Tr}[(\Phi + \varphi \wedge \varphi) \wedge (\Phi + \varphi \wedge \varphi) - (\Phi + \varphi \wedge \varphi) \wedge \Phi + \varphi \wedge (\varphi \wedge \Phi - \Phi \wedge \varphi)] \quad (42.32) \\
 &= \text{Tr}[\Phi \wedge \varphi \wedge \varphi + \varphi \wedge \varphi \wedge \Phi - \varphi \wedge \Phi \wedge \varphi + \varphi \wedge \varphi \wedge \varphi] \\
 &= 3 \text{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \Phi) .
 \end{aligned}$$

在最后一个等号处, 我们已经运用了 (42.30) 和事实

$$\text{Tr}(\Phi \wedge \varphi \wedge \varphi) = \text{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \Phi) , \quad (42.33)$$

$$\text{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \varphi \wedge \varphi) = 0 . \quad (42.34)$$

练习 42.1 证明 (42.33) 和 (42.34)。参考 (42.31) 给出 (42.30) 的推导。

从 (42.29) 和 (42.32), 有

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\Phi \wedge \Phi) &= d(\text{Tr}(\varphi \wedge \Phi)) + \text{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \Phi) \\
 &= d(\text{Tr}(\varphi \wedge \Phi)) + \frac{1}{3} d(\text{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \varphi)) \quad (42.35) \\
 &= d[\text{Tr}(\varphi \wedge \Phi) + \frac{1}{3} \text{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \varphi)] ;
 \end{aligned}$$

并且因此

$$C_2(\Phi) = d \left[\frac{1}{2} \left(\frac{i}{2\pi} \right)^2 \{ \text{Tr} \varphi \wedge d(\text{Tr} \varphi) - CS(\varphi) \} \right] . \quad (42.36)$$

其中 $CS(\varphi)$, 称为**陈-Simons 3-形式 (Chern-Simons 3-form)**, 由下式给出

$$CS(\varphi) \equiv \text{Tr}(\varphi \wedge \Phi) + \frac{1}{3} \text{Tr}(\varphi \wedge \varphi \wedge \varphi) . \quad (42.37)$$

因此, 至于 $C_1(\Phi)$, 第二陈类 $C_2(\Phi)$ 在 P 上也是正合的。运用 (42.20), 陈-Simons 3-形式也可以被写成

$$CS(\varphi) = \text{Tr}(\varphi \wedge d\varphi - \frac{2}{3} \varphi \wedge \varphi \wedge \varphi) . \quad (42.38)$$

有一个很简单的原因为什么 P 上的拉回形式 $C_i(\Phi)$ 必须是正合的。首先, 通过陈类的自然性, 有

$$C_i(\Phi) = C_i((\pi')^* \Omega) = (\pi')^*(C_i(\Omega)) . \quad (42.39)$$

因此, $C_i(\Phi)$ 是陈类 $C_i(\Omega)$ 的拉回, 其中后者被定义在标架丛 $\pi': P \rightarrow M$ 上。换句话说, $C_i(\Phi)$ 是方丛 $(\pi')^*(P)$ 的陈类 (具有基空间 P), 其正如我们所见是平凡的。由于 $C_i(\Phi) \in H^{2i}(P)$, 而平凡丛的所有示性类是平凡的 [通过推论 41.1], $C_i(\Phi)$ 必须是正合的 (作为 P 上一个 $2i$ -形式)。我们则总可以写

$$C_i(\Phi) = (\pi')^*(C_i(\Omega)) = d(TC_i(\varphi)) , \quad (42.40)$$

其中, $TC_i(\varphi)$ 表示第 i 陈类的超渡。 $TC_i(\varphi)$ 也可以参考为陈-Simons 形式 (Chern-Simons forms)。注意到它们不必是示性类, 因为 $TC_i(\varphi)$ 不必是闭的 $[d(TC_i(\varphi)) = C_i(\Phi)]$ 。

陈-Simons 形式可以通过下面的定理给出显式的一般表达式。

定理 42.1 令 $P_j(\Omega)$ 是一个 j 阶的 ad -不变多项式 [c.f. (41.43)], 其中 Ω 是一个主 G -丛 $\pi': P \rightarrow M$ 上的一个 G -值联络 ω 的曲率形式 (c.f. 定义 37.7 和定义 37.11)。令 $\Phi = (\pi')^*(\Omega)$ 并且设

$$\Phi_t \equiv t\Phi + \frac{1}{2}(t^2 - t)[\varphi, \varphi]_G, \quad (42.41)$$

其中, $[\cdot, \cdot]_G$ is in the sense of (37.90) and $\varphi = (\pi')^*(\omega)$. Define the $(2j-1)$ -form

$$TP_j(\varphi) \equiv j \int_0^1 P_j(\varphi, \underbrace{\Phi_t, \dots, \Phi_t}_{(j-1)\uparrow}) dt. \quad (42.42)$$

Then

$$d(TP_j(\varphi)) = (\pi')^*(P_j(\Omega)) = P_j(\Phi). \quad (42.43)$$

证明: 令 $f(t) \equiv P_j(\Phi_t)$ 。则 $f(0) = 0$ 和 $f(1) = P_j(\Phi)$, 使得

$$P_j(\Phi) = \int_0^1 \frac{dP_j(\Phi_t)}{dt} dt = \int_0^1 f'(t) dt,$$

我们需要说明

$$f'(t) = j dP_j(\varphi, \underbrace{\Phi_t, \dots, \Phi_t}_{(j-1)\uparrow}). \quad (42.44)$$

通过 $f(t)$ 的定义

$$f'(t) = \frac{dP_j(\Phi_t)}{dt} = j P_j\left(\frac{d\Phi_t}{dt}, \underbrace{\Phi_t, \dots, \Phi_t}_{(j-1)\uparrow}\right). \quad (42.45)$$

从 (42.41), 有

$$\frac{d\Phi_t}{dt} = \Phi + \left(t - \frac{1}{2}\right) [\varphi, \varphi]_G. \quad (42.46)$$

因此

$$f'(t) = j P_j(\Phi, \Phi_t, \dots, \Phi_t) + j\left(t - \frac{1}{2}\right) P_j([\varphi, \varphi]_G, \Phi_t, \dots, \Phi_t). \quad (42.47)$$

另一方面, 回忆 (41.31) 的证明, 有

$$j dP_j(\varphi, \Phi_t, \dots, \Phi_t) = j P_j(d\varphi, \Phi_t, \dots, \Phi_t) - j(j-1) P_j(\varphi, d\Phi_t, \underbrace{\Phi_t, \dots, \Phi_t}_{(j-2)\uparrow}). \quad (42.48)$$

因为通过联络 φ 的结构方程 (37.116), 有

$$\Phi = d\varphi + \frac{1}{2} [\varphi, \varphi]_G, \quad (42.49)$$

(42.48) 意味着

$$j dP_j(\varphi, \Phi_t, \dots, \Phi_t) = j P_j(\Phi, \Phi_t, \dots, \Phi_t) - \frac{1}{2} j P_j([\varphi, \varphi]_G, \Phi_t, \dots, \Phi_t) - j(j-1) P_j(\varphi, d\Phi_t, \underbrace{\Phi_t, \dots, \Phi_t}_{(j-2)\text{个}}) \quad (42.50)$$

除了 (37.116), 我们有 Bianchi 恒等式 [c.f. (37.125)]:

$$d\Phi = [\Phi, \varphi]_G . \quad (42.51)$$

从这两个方程

$$\begin{aligned} d\Phi_t &= d\left(t\Phi + \frac{1}{2}(t^2 - t)[\varphi, \varphi]_G\right) = td\Phi + \frac{1}{2}(t^2 - t)d[\varphi, \varphi]_G \\ &= t[\Phi, \varphi]_G + \frac{1}{2}(t^2 - t)\{[d\varphi, \varphi]_G - [\varphi, d\varphi]_G\} \\ &= t[\Phi, \varphi]_G + \frac{1}{2}(t^2 - t)\left\{[\Phi - \frac{1}{2}[\varphi, \varphi]_G, \varphi]_G - [\varphi, \Phi - \frac{1}{2}[\varphi, \varphi]_G]_G\right\} \\ &= t[\Phi, \varphi]_G + \frac{1}{2}(t^2 - t)\{[\Phi, \varphi]_G - [\varphi, \Phi]_G\} \\ &= t[\Phi, \varphi]_G + (t^2 - t)[\Phi, \varphi]_G = t^2[\Phi, \varphi]_G = t[\Phi_t, \varphi]_G , \end{aligned} \quad (42.52)$$

其中在第三个等号处我们已经对 $d[\varphi, \varphi]_G$ 的计算使用了 (37.97), 而在第四个等号处和最后一个等号处, 我们已经使用了结论 $[[\varphi, \varphi], \varphi]_G = 0$, 其又是来自于 (37.96) 中运用 (42.52), 我们有

$$j dP_j(\varphi, \Phi_t, \dots, \Phi_t) = j P_j(\Phi, \Phi_t, \dots, \Phi_t) - \frac{1}{2} j P_j([\varphi, \varphi]_G, \Phi_t, \dots, \Phi_t) - j(j-1)t P_j(\varphi, [\Phi_t, \varphi]_G, \underbrace{\Phi_t, \dots, \Phi_t}_{(j-2)\text{个}}) \quad (42.53)$$

我们下一步将运用结论 (41.29), 简写成不同形式为

$$\sum_{i=1}^j (-1)^{d_1 + \dots + d_i} P_j(A_1, \dots, [A_i, \theta]_G, \dots, A_j) = 0 . \quad (42.54)$$

有 $A_1 = \theta = \varphi$, $A_2 = \dots = A_j = \Phi_t$, 它产生

$$-P_j([\varphi, \varphi]_G, \Phi_t, \dots, \Phi_t) - (j-1)P_j(\varphi, [\Phi_t, \varphi]_G, \Phi_t, \dots, \Phi_t) = 0 . \quad (42.55)$$

将这个结果应用到 (42.53) 等号右边的最后一项, 我们最终有

$$\begin{aligned} j dP_j(\varphi, \Phi_t, \dots, \Phi_t) &= j P_j(\Phi, \Phi_t, \dots, \Phi_t) - \frac{1}{2} j P_j([\varphi, \varphi]_G, \Phi_t, \dots, \Phi_t) \\ &\quad + j t P_j([\varphi, \varphi]_G, \Phi_t, \dots, \Phi_t) = f'(t) , \end{aligned} \quad (42.56)$$

其中最后一个等号来自于 (42.47)。

□

举个例子, 让我们考虑 $P_2(\Phi) = \text{Tr}(\Phi \wedge \Phi)$ 。公式 (42.42) 对于 $P_2(\Phi)$ 的超渡给出

$$TP_2(\varphi) = 2 \int_0^1 P_2(\varphi, \Phi_t) dt = 2 \int_0^1 dt \text{Tr}(\varphi \wedge \Phi_t). \quad (42.57)$$

方程 (42.41) 给出

$$\begin{aligned} \Phi_t &= t\Phi - \frac{1}{2}(t^2 - t) 2\varphi \wedge \varphi \\ &= t(d\varphi - \varphi \wedge \varphi) - (t^2 - t) \varphi \wedge \varphi = td\varphi - t^2 \varphi \wedge \varphi \end{aligned} \quad (42.58)$$

其中, 我们已经使用了 (37.135)。因此

$$\begin{aligned} TP_2(\varphi) &= \text{Tr} \int_0^1 dt (2t \varphi \wedge d\varphi - 2t^2 \varphi \wedge \varphi \wedge \varphi) \\ &= \text{Tr}(\varphi \wedge d\varphi - \frac{2}{3} \varphi \wedge \varphi \wedge \varphi) = CS(\varphi), \end{aligned} \quad (42.59)$$

其与 (42.38) 的结论相同。

我们注意下面超渡形式的性质而不证明。

定理 42.2 令 P_l 是一个 l 次 $ad(G)$ -不变对称多项式而 Q_s 是 s 次 $ad(G)$ -不变对称多项式。则

$$i) \quad P_l Q_s(\overbrace{\Phi, \dots, \Phi}^{(l+s)\uparrow}) = P_l(\overbrace{\Phi, \dots, \Phi}^{l\uparrow}) \wedge Q_s(\overbrace{\Phi, \dots, \Phi}^{s\uparrow}). \quad (42.60)$$

$$\begin{aligned} ii) \quad T(P_l Q_s(\varphi)) &= TP_l(\varphi) \wedge Q_s(\Phi, \dots, \Phi) + \text{正合形式} \\ &= TQ_s(\varphi) \wedge P_l(\Phi, \dots, \Phi) + \text{正合形式}. \end{aligned} \quad (42.61)$$

定理 42.3 令 $\omega(t)$ 是一个主 G -丛 $\pi: P \rightarrow M$ 上的一系列光滑单参数联络, 有 $t \in [0, 1]$ 。令 $\varphi(t) = \pi^*(\omega(t))$ 。设 $\varphi(0) = \varphi$ 和

$$\phi' \equiv \left. \frac{d}{dt} \varphi(t) \right|_{t=0}. \quad (42.62)$$

如果 P_j 是一个 j 次 $ad(G)$ -不变对称多项式, 则

$$\left. \frac{d}{dt} (TP_j(\varphi(t))) \right|_{t=0} = j P_j(\phi', \overbrace{\Phi, \dots, \Phi}^{(j-1)\uparrow}) + \text{正合形式}, \quad (42.63)$$

其中, $\Phi = d\varphi - \varphi \wedge \varphi$ 是对应 φ 的曲率形式。

假设 $\dim(M) = m$ (其中, M 是 $\pi': P \rightarrow M$ 的基流形)。如果 $2j > m$, 则 $P_j(\Omega) = 0$ 并且所以

$$P_j(\Phi) = P_j((\pi')^* \Omega) = (\pi')^*(P_j(\Omega)) = 0.$$

因此, 通过 (42.43), $TP_j(\varphi)$ 是闭的, 且定义一个元素 $(TP_j(\varphi)) \in H^{2j-1}(P)$, 即: P 中一个上同调类。我们有下面关于超渡形式 $TP_j(\varphi)$ 的基本定理, 其将只表述而不证明。

定理 42.4 令 $\pi' : P \rightarrow M$ 是一个主 G -丛具有联络 ω 和对应曲率 Ω ; $\varphi = (\pi')^*(\omega)$ 和 $\Phi = (\pi')^*(\Omega)$ 分别是 P 上拉回的联络和曲率。假设 $P_j(\Omega)$ 是一个 j 次 ad -不变多项式并且 $\dim(M) = m$ 。则

- i) 如果 $2j - 1 > m$, 则 $TP_j(\varphi)$ 是闭的, 且 $[TP_j(\varphi)] \in H^{2j-1}(P, \mathbb{R})$ 与联络 φ 的选择无关。
- ii) 如果 $2j - 1 = m$, 则 $TP_j(\varphi)$ 是闭的, 且 $[TP_j(\varphi)] \in H^m(P, \mathbb{R})$ 取决于联络 φ 。

对于 $2j - 1 > m$ 的情况, 则超渡形式 $TP_j(\varphi)$ 定义一个示性类称为一个**第二示性类 (secondary characteristic class)**。举例而言, 对于 $\dim(M) = m = 3$, 陈-Simons 形式 $CS(\varphi) = TP_2(\varphi)$ ($j = 2$) 是闭的, 但取决于联络 φ 的选择。

现在假设 $G = GL(m, \mathbb{R})$ 和 $\pi : P \rightarrow M$ 是 M 的 (主) 标架丛, 具有一个 $\mathcal{GL}(m, \mathbb{R})$ -值联络 φ 。这个联络可以被限制在标准正交标架的一个子丛 $\pi' : P' \rightarrow M$ 上, 具有结构群 $O(m)$ 。我们有下面的定理 (表述但不证明)。

定理 42.5 令 $\pi : P \rightarrow M$ 是 M ($\dim(M) = m$) 上具有联络 φ 的标架丛。假设 φ 限制于 P 的一个 $O(m)$ 子丛上一个联络, 并且令这个子丛上的曲率形式为 Φ 。令

$$Q_j(A_1, \dots, A_j) = \frac{1}{j!} \sum_{\sigma \in S_j} \text{Tr}(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \dots A_{\sigma(j)}) \quad (42.64)$$

是 $m \times m$ 矩阵 $A_1, \dots, A_j$ 的对称的迹。则

$$i) \quad Q_{2j+1}(\overbrace{\Phi, \dots, \Phi}^{(2j+1)\uparrow}) = 0, \quad (42.65)$$

$$ii) \quad TQ_{2j+1}(\varphi) \text{ 是正合的} . \quad (42.66)$$

i) 和 ii) 意味着 $(TQ_{2j+1}(\varphi))$ 是 M 上标准正交标架的子丛上的平凡上同调类。

现在我们将专门讨论这种情况, 即: M 是一个具有 Riemann 度规 g 的 Riemann 流形, 而 ω 对应 TM 上的 Levi-Civita 联络。考虑标架丛 $\pi : P \rightarrow M$ 并且令 $\varphi = \pi^*(\omega)$ 是 P 上 ω 的拉回。 φ 限制在标准正交标架 $\pi' : P' \rightarrow M$ 的 $O(m)$ -子丛上的一个联络 (依旧记为 φ)。我们称两个 Riemann 度规 g 和 $\hat{g}$ 是**共形相关的 (conformally related)**, 如果

$$\hat{g} = e^h g, \quad (42.67)$$

其中, $h \in C^\infty(M)$ (M 上一个光滑函数)。一个 ad -不变对称多项式 P_j 的超度形式则表现处下面基本结论, 只表述而不证明。

定理 42.6 令 g 和 $\hat{g}$ 在一个 Riemann 流形 M 上是共形相关的, 并且令 $\varphi, \Phi, \hat{\varphi}, \hat{\Phi}$ 表示 M 上标准正交标架的主 $O(m)$ 丛 $\pi' : P' \rightarrow M$ 上对应的联络和曲率形式, 其中 $\dim(M) = m$ 。

则对于 $m \times m$ 矩阵的任意 ad -不变对称多项式 P_j , 有

$$i) \quad TP_j(\hat{\varphi}) - TP_j(\varphi) \text{ 是正合的.} \quad (42.68)$$

$$ii) \quad P_j(\overbrace{\hat{\Phi}, \dots, \hat{\Phi}}^{j \text{ 个}}) = P_j(\overbrace{\Phi, \dots, \Phi}^{j \text{ 个}}), \quad (42.69)$$

$$iii) \quad \text{如果 } P_j(\Phi, \dots, \Phi) = 0, \text{ 则上同调类 } (TP_j(\varphi)) \in H^{2j-1}(P', \mathbb{R}) \\ \text{是一个共形不变的 (conformal invariant).}$$

注意到 iii) 直接来自于 i), ii) 和定理 42.1, 而 ii) 直接来自于 i) 和定理 42.1。

让我们来考虑陈-Simons 形式 $CS(\varphi)$ 在物理中的一些应用。我们在物理学中常把用于规范势的联络符号写成 A 而不是 φ 。例如, 事实证明, Chern-Simons 形式 $CS(A)$ 在 3 维度的量子场论中具有相当大的意义。例如, 事实证明, 陈-Simons 形式 $CS(A)$ 在 3 维量子场论中具有相当大的意义 (Witten, 1989)。考虑一个主 G -丛 $\pi' : P \rightarrow M$ 伴随的一个向量丛 $\pi : E \rightarrow M$ 上规范势 A 的**陈-Simons 作用量 (Chern-Simons action)**:

$$S_{CS}(A) = \int_M \left[\text{Tr}(A \wedge dA - \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \right], \quad (42.70)$$

其中, M 是一个没有边界的紧致、可定向的三维流形。而因此陈-Simons 形式由 (42.70) 给出的对应场论的定义不需要参考 M 中的一个度规。

陈-Simons 作用量有下面有趣的性质。

定理 42.7 陈-Simons 作用量 [由 (42.70) 给出] 是“几乎”规范不变的: 它在 A 的一个一般规范变换下不是不变的, 但在一个规范变换 $g \in G$ 下与 G 中恒元相联系。

证明: 令 $g_t \in G$, $t \in [0, 1]$ 是一系列规范变换使得 $g_0 = 1$ (G 中恒元) 而 $g_1 = g$ 。换句话说, g 与恒元相联系。开始于一个联络 A , 具有对应曲率 2-形式 F , 规范变换的联络

$$A_t \equiv g_t d(g_t)^{-1} + g_t A (g_t)^{-1} \quad (42.71)$$

在总空间 P 上是良定义的。我们需要证明

$$\left. \frac{d}{dt} S_{CS}(A_t) \right|_{t=0} = 0. \quad (42.72)$$

令

$$T \equiv \left. \frac{d}{dt} g_t \right|_{t=0}. \quad (42.73)$$

则从

$$0 = \frac{d}{dt} g_t (g_t)^{-1} = \left(\frac{dg_t}{dt} \right) (g_t)^{-1} + g_t \left(\frac{d(g_t)^{-1}}{dt} \right), \quad (42.74)$$

我们有

$$\frac{d}{dt} (g_t)^{-1} = -T. \quad (42.75)$$

因此

$$\begin{aligned} A' &\equiv \frac{d}{dt} A_t \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (g_t d(g_t)^{-1} + g_t A(g_t)^{-1}) \Big|_{t=0} \\ &= (TA(g_t)^{-1} - g_t AT + Td(g_t)^{-1} - g_t dT) \Big|_{t=0} = [T, A]_{\text{gr}} - dT, \end{aligned} \quad (42.76)$$

其中, $[T, A]_{\text{gr}} (= TA - AT)$ 是由 (35.65) 给出的。从定理 42.3, 我们有

$$\frac{d}{dt} S_{CS}(A_t) \Big|_{t=0} = \int_M \frac{d}{dt} CS(A_t) \Big|_{t=0} = 2 \int_M \text{Tr}(A' \wedge F) + \int_M d\theta. \quad (42.77)$$

其中, $F = dA - A \wedge A$ 。通过 Stokes 定理

$$\int_M d\theta = \int_{\partial M} \theta = 0,$$

因此通过假设有 $\partial M = 0$ 。从 (42.76) 得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_{CS}(A_t) \Big|_{t=0} &= 2 \int_M \text{Tr} \{ ([T, A]_{\text{gr}} - dT) \wedge (dA - A \wedge A) \} \\ &= 2 \int_M \text{Tr} \{ [T, A]_{\text{gr}} \wedge dA - [T, A]_{\text{gr}} \wedge A \wedge A + dT \wedge A \wedge A \}, \end{aligned} \quad (42.78)$$

其中, $dT \wedge dA$ 项并没有贡献, 因为再一次通过 Stokes 定理, 有

$$\int_M \text{Tr}(dT \wedge dA) = \int_M \text{Tr} d(T \wedge dA) = \int_M d(\text{Tr}(T \wedge dA)) = \int_{\partial M} \text{Tr}(T \wedge dA) = 0. \quad (42.79)$$

接下来我们注意到

$$\int_M \text{Tr}([T, A]_{\text{gr}} \wedge A \wedge A) = 0, \quad (42.80)$$

因为通过迹的**轮换循环性质 (graded cyclic property)** [见 (42.82) 之后], 有

$$\text{Tr}(TA \wedge A \wedge A) = \text{Tr}(AT \wedge A \wedge A). \quad (42.81)$$

注意到通过定义, T 是一个 0-形式矩阵。

练习 42.2 证明迹的轮换循环性质

$$\text{Tr}(\theta \wedge \phi) = (-1)^{pq} \text{Tr}(\phi \wedge \theta). \quad (42.82)$$

其中, θ 和 ϕ 分别是 p -形式和 q -形式的矩阵 (相同大小)。

方程 (42.78) 则意味着

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dt} S_{CS}(A_t) \right|_{t=0} &= 2 \int_M \text{Tr} \{ [T, A]_{\text{gr}} \wedge dA + dT \wedge A \wedge A \} \\
 &= 2 \int_M \text{Tr} (T \wedge A \wedge dA - A \wedge T \wedge dA + dT \wedge A \wedge A) \\
 &= 2 \int_M \text{Tr} d(T \wedge A \wedge A) = 2 \int_M d\{\text{Tr}(T \wedge A \wedge A)\} \\
 &= 2 \int_{\partial M} \text{Tr}(T \wedge A \wedge A) = 0,
 \end{aligned} \tag{42.83}$$

其中最后两个等号来自于 Stokes 定理。 $\square$

下面基于陈-Simons 作用量的事实与一个广义**协变量子场论 (covariant quantum field theory)**(其没有 M 上一个度规的一个先验选择) 的形式化特别相关。

定理 42.8 令 A 和 A' 是一个主 G -丛 $\pi: P \rightarrow M$ 上的联络 1-形式通过一个规范变换 $g \in G$ 相关联:

$$A' = (dg)g^{-1} + gAg^{-1}. \tag{42.84}$$

则

$$S_{CS}(A') - S_{CS}(A) = 8\pi^2 n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{42.85}$$

其中陈-Simons 作用量 S_{CS} 在 (42.70) 中定义。

证明: 令 $A(t), t \in [0, 1]$, 是 $\pi: P \rightarrow M$ 上的一个单参数系列联络使得 $A(0) = A$ 和 $A(1) = A'$ 。让我们考虑四维流形 $S^1 \times M$, 其中 M 是一个没有边界的紧致三维流形。通过 $(t, x) \mapsto x$, $t \in S^1, x \in M$ 定义投影映射 $p: S^1 \times M \rightarrow M$, 我们有导出丛 $\tilde{P} = p^*(P)$, 并且对应导出联络 $\tilde{A} = p^*(A)$, 它的局域表达由 $A(t)$ 给出, 如果 S^1 是通过 $t \in [0, 1]$ 坐标化的, 并且确定区间的两端。令 $\tilde{F}$ 是对应曲率形式。现在根据事实: 如 (41.74) 定义的陈类 $C_j(\tilde{F})$ 是可积上同调类 [c.f. (41.73)], 从对于 C_2 的表达式 [(41.77)] 得到

$$\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^1 \times M} \text{Tr}(\tilde{F} \wedge \tilde{F}) = n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{42.86}$$

另一方面, 通过 (42.35) 和 Stokes 定理

$$\begin{aligned}
 \int_{S^1 \times M} \text{Tr}(\tilde{F} \wedge \tilde{F}) &= \int_{[0,1] \times M} d(CS(\tilde{A})) \\
 &= \int_{\partial([0,1] \times M)} CS(\tilde{A}) = S_{CS}(A') - S_{CS}(A).
 \end{aligned} \tag{42.87}$$

方程 (42.86) 和 (42.87) 则意味着定理。 $\square$

因此, 经典陈-Simons 作用量不是规范不变的。单在一个基于写成**路径积分 (path integrals)** 的陈-Simons 作用量的量子场论中, 我们可以定义一个可观测量 f (考虑成联络 A 的

一个规范不变函数) 的真空期望值 (vacuum expectation value) $\langle f \rangle$ 为:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{Z} \int_{A/G} f(A) \exp \left\{ \frac{ik}{4\pi} S_{CS}(A) \right\} DA, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (42.88)$$

$$Z \equiv \int_{A/G} \exp \left\{ \frac{ik}{4\pi} S_{CS}(A) \right\} DA, \quad (42.89)$$

在其中 $\exp \left\{ \frac{ik}{4\pi} S_{CS}(A) \right\}$ 很明显是规范不变的, 通过定理 42.8。类似于统计物理中相似的量, Z 被称为**配分函数 (partition function)**。路径测量 DA 在规范势 (取决于规范变换) 的空间中还没有被严格定义。但这并不妨碍数学物理学家在形式上使用像 (42.88) 和 (42.89) 这样的表达式来获得极其有趣和有用的结果。

回忆我们已经研究过陈类完整性的一个物理例子, 即磁荷的量子化 [c.f. (38.32)]。该结果只是由于第一陈数

$$c_1 = \int_M C_1(\Omega)$$

是一个整数。**完整性条件 (integrality condition)**

$$C_j(\Omega) \in H^{2j}(M, \mathbb{Z}) \quad (42.90)$$

特别意味着

$$c_{\frac{m}{2}} = \int_M C_{\frac{m}{2}}(\Omega), \quad m = \dim(M), \quad (42.91)$$

具有偶数维基流形的一个丛的拓扑不变量。当 $m = 4$ 时, 它们被称为**瞬子数 (instanton numbers)**, 并且是所谓**陈数 (Chern numbers)** 的特殊例子, 或者物理学中的**拓扑量子数 (topological quantum numbers)**。因此, 磁单极子通过 S^2 上的一个 $U(1)$ -丛描述, 而量子化的磁荷 M 由下式给出

$$M = \left(\frac{\hbar c}{2e} \right) c_1, \quad c_1 \in \mathbb{Z}. \quad (42.92)$$

作为进一步的例子, 我们考虑由 S^4 上 $SU(2)$ -丛描述的**瞬子 (instantons)**。对于有伴随曲率 F 的一个特定联络 A , 瞬子数 k 被定义成第二陈特征为 [c.f. (41.83)]

$$-k \equiv \int_{S^4} Ch_2(F) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{Tr}(F \wedge F). \quad (42.93)$$

事实上, 对于瞬子, $\star F = \pm F$ (其中 $\star$ 表示 Hodge star) [回忆 (36.42) 之后的讨论]。因此, Yang-Mills 作用泛函 [(36.36)] 可以被写成

$$S_{YM} = \mp \int_{S^4} \text{Tr}(F \wedge F), \quad (42.94)$$

其中, 符号 $(-)$ 和 $(+)$ 分别给出了自对偶和反自对偶瞬子。 S^4 可以被考虑成 R^4 的一点紧化, 并且类似于 S^2 , 可以通过定义如下的两个坐标域 U_N (“北极半球”) 和 U_S (“南极半球”) 被覆盖:

$$U_N = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| \leq R + \epsilon\}, \quad U_S = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x| \geq R - \epsilon\}, \quad (42.95)$$

其中, $R > 0$ (见 Figure 42.1)。区域的交叠 (取极限 $\epsilon \rightarrow 0$) 可以被收缩到 $S^3 \sim SU(2)$ [回忆

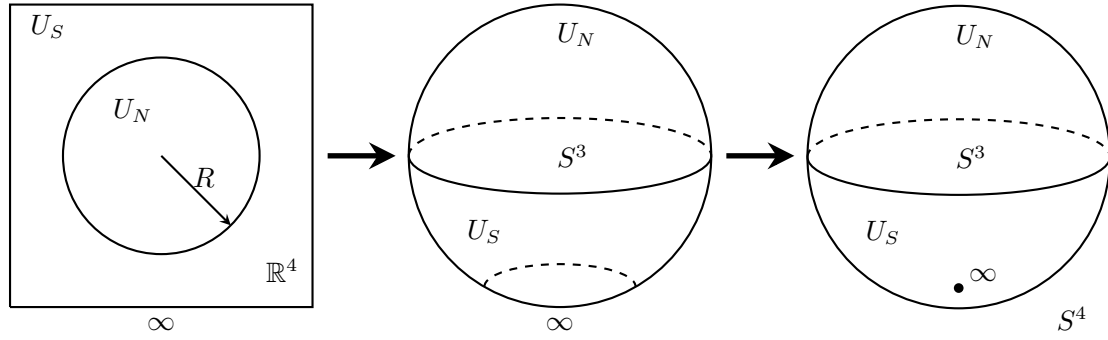


Figure 42.1

(11.71)]。因此联络 A 可以通过转移函数

$$g_{SN} : S^3 \rightarrow SU(2) \sim S^3$$

的同调类，或者同调群

$$\pi_3(S^3) = \mathbb{Z} \quad (42.96)$$

被分类。表征同调类的整数被称为映射 g_{SN} 的**度 (degree)**。不失一般性，我们可以设

$$A^{(S)} = 0, \quad x \in U_S. \quad (42.97)$$

因此

$$A^{(N)} = (dg_{SN})(g_{SN})^{-1}, \quad x \in U_N. \quad (42.98)$$

我们将 n 度的转移函数记为 $g_{SN}^{(n)}$ 。类似于 (38.14) 对于磁单极子，我们有

$$g_{SN}^{(1)} : S^3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SU(2) \quad (\text{常值映射}) \quad (42.99)$$

$$g_{SN}^{(1)}(x) = (x^4 + ix^j \sigma_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (\text{恒等映射}) \quad (42.100)$$

其中

$$|x|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1,$$

而 σ_i , $i = 1, 2, 3$ 是由 (11.16) 给出的 Pauli 矩阵，并且

$$g_{SN}^{(n)} = (x^4 + ix^j \sigma_j)^n. \quad (42.101)$$

在估计瞬子数 [(42.93)] 中，我们可以使用 Stokes 定理如下。

$$\begin{aligned} \int_{S^4} \text{Tr}(F \wedge F) &= \int_{U_N} \text{Tr}(F \wedge F) + \int_{U_S} \text{Tr}(F \wedge F) \\ &= \int_{U_N} \text{Tr}(F \wedge F) = \int_{U_N} d\{CS(A)\} = \int_{\partial U_N} CS(A) = \int_{S^3} CS(A), \end{aligned} \quad (42.102)$$

其中局域陈-Simons 形式 $CS(A)$ 由下式 [c.f. (42.37)] 给出

$$CS(A) = \text{Tr}(A \wedge F) + \frac{1}{3} \text{Tr}(A \wedge A \wedge A) . \quad (42.103)$$

注意到在上面的方程中, 不同于 (42.37), 联络 A 和曲率 F 是 S^4 (基流形) 上的局域形式, 而 $\text{Tr}(F \wedge F)$ 视为 S^4 上一个 4-形式, 只是局域正合的。因为在 U_S 中, $A^{(S)} = F^{(S)} = 0$, 它意味着 $F^{(N)} = g_{SN} F^{(S)} g_{SN}^{-1} = 0$, 方程 (42.102) 和 (42.103) 意味着

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^4} \text{Tr}(F \wedge F) = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{Tr}(A^{(N)} \wedge A^{(N)} \wedge A^{(N)}) \\ &= \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{Tr}(dg g^{-1} \wedge dg g^{-1} \wedge dg g^{-1}) , \end{aligned} \quad (42.104)$$

其中, 我们对于 g_{SN} 写成 g 。我们将说明这个积分可以精确得出映射 $g : S^3 \rightarrow SU(2)$ 的度 (其中 g 被理解为 $g_{SN}^{(n)}$)。在 S^3 上考虑 3-形式

$$\alpha = \frac{1}{24\pi^2} \text{Tr}(dg g^{-1} \wedge dg g^{-1} \wedge dg g^{-1}) \quad (42.105)$$

其中, g 和 dg 都表达成 S^3 的局域坐标的项。它等于 $SU(2)$ 上一些 3-形式 β 的拉回:

$$\alpha = g^* \beta . \quad (42.106)$$

观察到 α 在 S^3 上是闭的, 因为 $d\alpha$ 是一个 4-形式而 S^3 是三维的。通过陈类的完整性, α 因此确定一个上同调类 $[\alpha] \in H^3(S^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ 。考虑一个映射 $h : S^3 \rightarrow SU(2)$ 同伦于 g ($h \sim g$)。则我们有, 通过定理 38.1

$$[g^* \beta] = [h^* \beta] . \quad (42.107)$$

这意味着

$$g^* \beta = h^* \beta + d\phi , \quad (42.108)$$

其中, ϕ 是 S^3 上的一些 2-形式。通过 Stokes 定理, 有

$$\int_{S^3} \alpha = \int_{S^3} g^* \beta = \int_{S^3} h^* \beta . \quad (42.109)$$

因此瞬子数只取决于映射 $g : S^3 \rightarrow SU(2)$ (其由 $\pi_3(S^3)$ 的一个元素给出) 的同伦类, 或者映射 g 的度。现在假设 $g = g_{SN}^{(1)}$ (度 1) 和 $h = g_{SN}^{(n)}$ (度 n)。令 $\alpha^{(1)} = g^* \beta = (g_{SN}^{(1)})^* \beta$ 和 $\alpha^{(n)} = h^* \beta = (g_{SN}^{(n)})^* \beta$ 。因为 $H^3(S^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, 我们看到 $[\alpha^{(1)}] = 1$ 和 $[\alpha^{(n)}] = n$ (作为上同调类)。因此

$$[\alpha^{(n)} - n\alpha^{(1)}] = [\alpha^{(n)}] - n[\alpha^{(1)}] = 0 \in H^3(S^3, \mathbb{Z}) . \quad (42.110)$$

换句话说, $\alpha^{(n)} - n\alpha^{(1)}$ 是平凡类, 所以必须是正合的。我们则有: 对于 S^3 上一些 2-形式 η , 有

$$\alpha^{(n)} - n\alpha^{(1)} = d\eta . \quad (42.111)$$

S^3 上的积分给出

$$\int_{S^3} \alpha^{(n)} = n \int_{S^3} \alpha^{(1)} . \quad (42.112)$$

我们将显式计算等号右边的积分, 有

$$\int_{S^3} \alpha^{(1)} = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \text{Tr}(dg_{SN}^{(1)}(g_{SN}^{(1)})^{-1} \wedge dg_{SN}^{(1)}(g_{SN}^{(1)})^{-1} \wedge dg_{SN}^{(1)}(g_{SN}^{(1)})^{-1}) . \quad (42.113)$$

运用 (42.101), 我们有

$$(g_{SN}^{(1)})^{-1} = x^4 - ix^j \sigma_j . \quad (42.114)$$

练习 42.3 将 $g_{SN}^{(1)}$ 写成一个 2×2 矩阵 [$\in SU(2)$]. 则对于 Pauli 矩阵 σ_j 运用显式形式 [由 (11.16) 给出] 来验证 (42.114)。

所以

$$(dg_{SN}^{(1)})(g_{SN}^{(1)})^{-1} = (dx^4 + i(dx^j)\sigma_j)(x^4 - ix^j\sigma_j) . \quad (42.115)$$

积分 (42.113) 的值不改变如果我们把 Figure 42.1 中的 “赤道” ($\sim S^3$) 向上往北极推 “北半球” (见 Figure 42.2)。在这些每个收缩的边界中, $dx^4 = 0$ 。

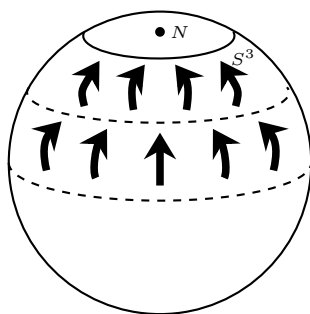


Figure 42.2

在北边坐标域的 S^3 边界的半径减少的极限下, 这个边界接近北极, 此时 $x^4 = 1$, $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ 。在北极, 我们则有

$$(dg_{SN}^{(1)})(g_{SN}^{(1)})^{-1} = i\sigma_j dx^j , \quad (42.116)$$

而 (42.113) 的被积函数则变成

$$\text{Tr}(A^{(N)} \wedge A^{(N)} \wedge A^{(N)}) = i^3 \text{Tr}(\sigma_j \sigma_k \sigma_l) dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l . \quad (42.117)$$

运用 σ -矩阵的性质 (c.f. 练习 11.5), 我们有

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\sigma_j \sigma_k \sigma_l) &= \text{Tr}(\sigma_j (\delta_{kl} + i\varepsilon_{kl}^m \sigma_m)) \\ &= i\varepsilon_{kl}^m \text{Tr}(\sigma_j \sigma_m) = i\varepsilon_{kl}^m \text{Tr}(\delta_{jm} + i\varepsilon_{jm}^n \sigma_n) \\ &= i\varepsilon_{kl}^m \delta_{jm} \text{Tr}(e) = 2i\varepsilon_{klj} . \end{aligned} \quad (42.118)$$

因此

$$\mathrm{Tr}(A^{(N)} \wedge A^{(N)} \wedge A^{(N)}) = 2\varepsilon_{klj} dx^k \wedge dx^l \wedge dx^j = 12 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad (42.119)$$

其中, $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ 是 S^3 的体积元。因为 (42.113) 的积分不可能取决于边界 S^3 的半径 [比较现在的情况和由 (38.8) 给出的磁单极子的情况], 我们可以使用单位 S^3 的体积, 即:

$$\int_{S^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = 2\pi^2, \quad (42.120)$$

并且最终得到

$$\int_{S^3} \alpha^{(1)} = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} \mathrm{Tr}(A^{(N)} \wedge A^{(N)} \wedge A^{(N)}) = \frac{12(2\pi^2)}{24\pi^2} = 1. \quad (42.121)$$

这个结果和 (42.112) 一同说明瞬子数 $k^{(n)}$ 对应由 $n \in \pi_3(S^3)$ [映射 $g^{(n)} : S^3 \rightarrow SU(2)$ 的度] 表征的一个规范势能 $A^{(n)}$, 只由下式给出

$$k^{(n)} = n. \quad (42.122)$$

总结而言, 我们提到了具有一个陈-Simons 作用量项的一个量子场论, 除了 Fermion 场与描述磁通管的规范势之间的耦合外, 还对描述**分数量子 Hall 效应 (fractional quantum Hall effect)** 的物理非常有用, 其与**分数统计 (fractional statistics)** 的相关现象有关 (比如: 见 E. Fradkin, 1991)。类似于整数量子 Hall 效应的情况, 其几何设置是 $U(1)$ -丛, 它的基空间是无边界的紧致 $(2+1)$ -维空间 M (2 空间和 1 时间)。因为规范群 $U(1)$ 是 Abel 的, 陈-Simons 作用量为

$$S_{CS} = \theta \int_M \mathrm{Tr}(A \wedge dA), \quad (42.123)$$

其中, θ 是一个“强度 (strength)”常数。在另一方面, 基于陈-Simons 作用量的一个拓扑量子场论的研究通过纽结理论的某些不变量 (E. Witten, 1989; S. Hu, 2001) 已经揭示了量子场论和三维空间拓扑学之间的深层联系。简而言之, 通过陈类和从陈-Simons 理论来的它们的超渡形式, 对于纤维丛的拓扑不变量的研究已经以一种惊人的方式将物理和数学的广阔的领域结合在一起。

43. Atiyah-Singer 指标定理

Atiyah-Singer 指标定理是与纤维丛的局域 (微分) 和全局 (拓扑) 性质相关的一个深刻的结论。它推广了这个性质的许多重要经典结论, 比如 Gauss-Bonnet 定理和 Riemann-Roch-Hirzebruch 定理。在物理学中, 它在量子场论中得到了重要的应用 (特别是在反常的研究中), 并且实际上已经被量子场理论 (路径积分) 的方法证明了 (比如, 见 E. Witten, 2000)。在本章, 我们将展示这个定理的简介背景, 只表述而不证明, 然后讨论它在一些特殊 (有用) 情况下的应用。

我们将从 de Rham 上同调理论的一些方面开始。考虑 M 上外 p -形式的向量丛的序列, $\Lambda^p(M)$, $p = 0, 1, \dots, m = \dim(M)$ 。考虑到后面的发展, 我们记 d (外导数) 作用在 $\Lambda^p(M)$ 上为 $d^{(p)}$ 。因为 $d^2 = 0$, 算符的序列 $d^{(p)}$ 满足

$$\text{Im } d^{(p-1)} \subset \ker d^{(p)}, \quad p = 1, \dots, m. \quad (43.1)$$

序列 $\{\Lambda^p, d^{(p)}\}$ 则被称为一个 **de Rham 复形 (de Rham complex)** (见 Figure 43.1)。定义 $\Lambda^p(M)$ 中一个 (全局) 标量积为

$$(\alpha, \beta) \equiv \int_M \alpha \wedge \star \beta, \quad (43.2)$$

其中, $\star \beta$ 是 p -形式 β 的 Hodge-star。 d 的伴随算符记为 δ , 定义为

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta). \quad (43.3)$$

我们将说明

$$\boxed{\delta = (-1)^p (\star)^{-1} d \star}, \quad (43.4)$$

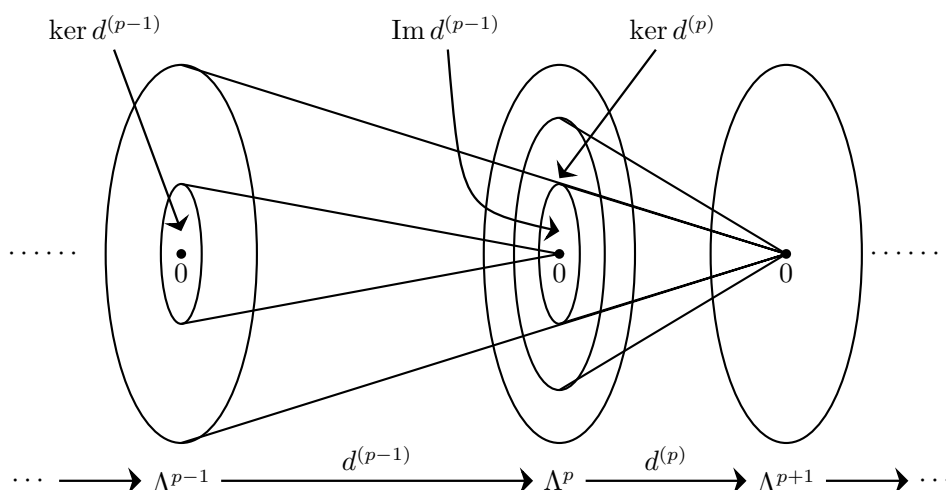


Figure 43.1

如果 M 是无边界的, 其中 $\star$ 的逆算符 $(\star)^{-1}$ 由下式给出

$$(\star)^{-1} = (-1)^{p(m-p)} \operatorname{sgn}(g) \star, \quad (43.5)$$

其中, $\operatorname{sgn}(g)$ 是 $\det(g_{ij})$ 的符号, 有 g_{ij} 是与 $\star$ 相关的度规。所以 δ 也可以被写成

$$\delta = (-1)^p (-1)^{p(m-p)} \operatorname{sgn}(g) \star d \star. \quad (43.6)$$

实际上, 对于 $\alpha \in \Lambda^{p-1}(M)$, $\beta \in \Lambda^p(M)$, 有

$$\begin{aligned} (d\alpha, \beta) &= \int_M d\alpha \wedge \star \beta = \int_M d(\alpha \wedge \star \beta) + (-1)^p \int_M \alpha \wedge d(\star \beta) \\ &= \int_{\partial M} \alpha \wedge \star \beta + (-1)^p \int_M \alpha \wedge (\star)(\star)^{-1} d(\star \beta) = \int_M \alpha \wedge \star \delta \beta, \end{aligned} \quad (43.7)$$

其中在第三个等号处我们已经使用了 Stokes 定理 (和假设 $\partial M = 0$ 一起), 在最后一个等号处使用了 (43.4)。类似于性质 $d^2 = 0$, 我们有对于 δ 有相似的性质:

$$\delta^2 = 0. \quad (43.8)$$

实际上, 对于 $\alpha \in \Lambda^p(M)$, 有

$$\begin{aligned} \delta^2 \alpha &= \delta(\delta \alpha) = \delta((-1)^p (\star)^{-1} d \star \alpha) \\ &= (-1)^{p-1} (-1)^p (\star)^{-1} d \star (\star)^{-1} d \star \alpha = -(\star)^{-1} d^2 \star \alpha = 0. \end{aligned} \quad (43.9)$$

注意到 δ 将一个 p -形式映射到一个 $(p-1)$ -形式。类似于记号

$$d^{(p)} : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p+1}(M),$$

我们写

$$\delta^{(p)} : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^{p-1}(M).$$

我们有 de Rham 复形

$$\Delta_p \equiv \delta^{(p+1)} d^{(p)} + d^{(p-1)} \delta^{(p)} = (d^{(p)} + \delta^{(p)})^2 \quad (43.10)$$

的所谓的 **Laplace 算符 (Laplacian operators)**

$$\Delta_p : \Lambda^p(M) \rightarrow \Lambda^p(M) .$$

一个 p -形式 ω 使得 $\Delta_p \omega = 0$ 被称为一个**调和形式 (harmonic form)**。所有调和 p -形式 $\in \Lambda^p(M)$ 的空间记为 $\text{Harm}^p(M)$ 。

一个 p -形式 α 使得 $\delta\alpha = 0$ 被称为是**上闭的 (coclosed)**；如果对于一些 $\beta \in \Lambda^{p+1}(M)$ 有 $\alpha = \delta\beta$ ，则 α 被称为是**上正合的 (coexact)**。我们有下面结论。

定理 43.1 一个紧致 Riemann 流形上的一个 p -形式是调和的，当且仅当它是闭的并且上闭的。

证明：令 $\omega \in \Lambda^p(M)$ 。则

$$(\omega, \Delta_p \omega) = (\omega, (\delta d + d\delta)\omega) = (\omega, \delta d\omega) + (\omega, d\delta\omega) = (d\omega, d\omega) + (\delta\omega, \delta\omega) \geq 0 . \quad (43.11)$$

如果 M 是 Riemann 的，因为内积是正定的，定理得证。 $\square$

下面的基本结论现在可以被表述 (没有证明)。

定理 43.2 — Hodge 分解定理 (Hodge Decomposition Theorem). 任意 p -形式 $\omega \in \Lambda^p(M)$, M 是一个无边界的紧致可定向的 Riemann 流形，总可以被写成一个唯一求和

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \omega_h , \quad (43.12)$$

其中, $\alpha \in \Lambda^{p-1}(M)$, $\beta \in \Lambda^{p+1}(M)$, $\omega_h \in \text{Harm}^p(M)$ 是一个调和形式, 并且 (43.12) 的等号右边的三个 p -形式在 (43.2) 的标量积 $(\cdot, \cdot)$ 下是相互正交的。

注意到事实 $d\alpha$, $\delta\beta$ 和 ω_h 可以很明显看出是相互正交的。因此

$$(d\alpha, \delta\beta) = (\alpha, \delta^2\beta) = (d^2\alpha, \beta) = 0 , \quad (43.13)$$

因为 $d^2 = \delta^2 = 0$ 。同样通过定理 43.1, 有

$$(d\alpha, \omega_h) = (\alpha, \delta\omega_h) = 0 , \quad (43.14)$$

$$(\delta\beta, \omega_h) = (\beta, d\omega_h) = 0 . \quad (43.15)$$

现在假设 $d\omega = 0$, 所以 $\omega \in \Lambda^p(M)$ 确定一个上同调类 $[\omega] \in H^p(M)$ 。我们则有

$$d\omega = 0 = d^2\alpha + d\delta\beta + d\omega_h = d\delta\beta , \quad (43.16)$$

其中, β 与 (43.12) 的等号右边是相同的量。这意味着

$$0 = (d\omega, \beta) = (d\delta\beta, \beta) = (\delta\beta, \delta\beta) . \quad (43.17)$$

因此 $\delta\beta = 0$, 并且

$$\omega = d\alpha + \omega_h . \quad (43.18)$$

因为 $[d\alpha] = 0 \in H^p(M)$, 上面的方程立刻意味着

$$[\omega] = [\omega_h] . \quad (43.19)$$

换句话说, 如果 ω 是闭的 ($d\omega = 0$), 它的调和分量确定它的上同调类。令 $\tilde{\omega}$ 是另一个闭的 p -形式, 所以对于一些 $\eta \in \Lambda^{p-1}(M)$, 有 $[\tilde{\omega}] = [\omega]$, 或 $\tilde{\omega} = \omega + d\eta$ 。通过定理 43.2 和上面的讨论, 我们可以写

$$\tilde{\omega} = d\tilde{\alpha} + \tilde{\omega}_h . \quad (43.20)$$

则 $\omega + d\eta = d\tilde{\alpha} + \tilde{\omega}_h$, 或

$$\omega = d(\tilde{\alpha} - \eta) + \tilde{\omega}_h . \quad (43.21)$$

由于 ω 的分解是唯一的, 得到 $\tilde{\omega}_h = \omega_h$ 。换句话说, 对于每个 $[\omega] \in H^p(M)$, 存在唯一一个调和表示 ω_h 。这引出了下面的定理。

定理 43.3 — Hodge. 在一个紧致流形 M 上的 p -形式的调和空间 $\text{Harm}^p(M)$ 与上同调空间 $H^p(M)$ 同构:

$$H^p(M) \sim \text{Harm}^p(M) . \quad (43.22)$$

回忆 Betti 数的概念 [引理 33.1 中的方程 (33.26)] 和 Euler-Poincare 定理 (定理 33.1), 我们有

$$b_p = \dim(H^p(M)) = \dim(\text{Harm}^p(M)) , \quad (43.23)$$

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^m (-1)^p b_p(M) = \sum_{p=0}^m (-1)^p \dim(\text{Harm}^p(M)) , \quad (43.24)$$

其中, b_p 是 M 的第 p Betti 数而 $\chi(M)$ 是 M 的 Euler 示性数。通过定义有

$$\text{Harm}^p(M) = \ker \Delta_p ,$$

并且我们可以定义 de Rham 复形 $\{d^{(p)}, \Lambda^p(M)\}$ 的所谓的**解析指标 (analytic index)** 为

$$\text{index} \{d^{(p)}, \Lambda^p(M)\} = \sum_p (-1)^p \dim \ker \Delta_p . \quad (43.25)$$

方程 (43.24) 则看出

$$\chi(M) = \text{index} \{d^{(p)}, \Lambda^p(M)\} . \quad (43.26)$$

这个方程的非凡之处在于等号左边只涉及 M 上的拓扑信息, 而等号右边值是由纯解析信息得

到的。Atiyah-Singer 指标定理试图将这种类型的关系从 de Rham 复形推广到一个任意的所谓椭圆型复形 (elliptic complex)。

定义 43.1 令 $\pi: E \rightarrow M$ 和 $\pi': F \rightarrow M$ 分别是 l 和 h 的 (纤维) 维度的向量丛, 并且令 $\dim(M) = m$ 。假设 U 是具有局域坐标 $(x^1, \dots, x^m)$ 的 M 的一个局域坐标邻域。 U 中选择 E 的一个局域标架 $\{e_1, \dots, e_l\}$ 。一个任意截面 $s \in \Gamma(E)$ 则可以表达成 $s = s^i(x)e_i$ 。类似地, 依赖于 U 中 F 的一个局域标架场 $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_h\}$ 的一个选择, 一个任意截面 $s' \in \Gamma(F)$ 可以被局域写成 $s' = (s')^j(x)\epsilon_j$ 。 n 阶线性微分算符 (linear differential operator) $D: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ 则是一个线性映射, 其可以被局域表达为

$$(Ds)^i(x) = \sum_{|k|=0}^n a_{j(k)}^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^m} \right)^{k_m} s^j(x), \quad i = 1, \dots, h. \quad (43.27)$$

在这个方程中对 j 从 1 到 l 求和。符号 $(k) = (k_1, \dots, k_m)$ 代表非负整数的一个 m -元组, 并且 $|k| = k_1 + \dots + k_m$ 。对于每个 (k) , 矩阵 $(a_{j(k)}^i(x))$ 是 $l \times h$ 矩阵, 并且它的元素是 $(x^1, \dots, x^m)$ 的光滑函数。

定义 43.2 令 $\xi \in T_x^*(M)$ 具有分量 $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ 依赖于 $T_x^*(M)$ 的自然基 $\{dx^1, \dots, dx^m\}$ 。一个微分算符 D 在 $x \in M$ 处的主符 (principal symbol) (对应于 $\xi \in T_x^*(M)$) 是一个线性映射

$$\sigma_x(\xi, D): E_x \rightarrow F_x$$

在 $x \in M$ 处纤维之间由下式给出

$$(\sigma_x(\xi, D)s)^i(x) = \sum_{|k|=n} a_{j(k)}^i(x) (\xi_1)^{k_1} \cdots (\xi_m)^{k_m} s^j(x). \quad (43.28)$$

$l \times h$ 矩阵 $\sum_{|k|=n} a_{j(k)}^i(x) (\xi_1)^{k_1} \cdots (\xi_m)^{k_m}$ 也可以参考为 D 的主符。

■ **例 43.1** 令 $\pi: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ 和 $\pi': F \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的实线丛。二阶微分算符 $\Delta: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ 定义为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial (x^m)^2} \quad (43.29)$$

被称为 Laplace 算符 (Laplacian)。在这种情况下, $l = h = 1$, 并且 (43.27) 的矩阵 $a_{j(k)}^i$ 对于每个 (k) 有一个单个元素 $a_1^1(k)$ 。唯一不消失的 $a_1^1(k)$ 是对于

$$(k) = (2, 0, \dots, 0), (0, 2, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 2),$$

每个值为 1。因此, Δ 的主符为

$$\sigma_x(\xi, \Delta) = (\xi_1)^2 + \cdots + (\xi_m)^2.$$

d'Alembert 算符 (d'Alembertian) $\square: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ 定义为

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial (x^{m-1})^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^m)^2}. \quad (43.30)$$

因此

$$\sigma_x(\xi, \square) = (\xi_1)^2 + \cdots + (\xi_{m-1})^2 - (\xi_m)^2 . \quad (43.31)$$

■

■ **例 43.2** 考虑四维旋量丛 $\pi: E \rightarrow M$, 其中 M 是四维 Minkowski 时空。回忆一阶 Dirac 算符 [c.f. (27.6)] $D: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ 由下式给出

$$D = \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \partial_{\mu} - im , \quad (43.32)$$

其中, γ_{μ} 是由 (27.1) 给出的 4×4 Dirac 矩阵。写成旋量分量 $\psi^{\alpha}(x)$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), D 由下式给出

$$(D\psi)^{\alpha}(x) = \sum_{\mu} \left[(\gamma_{\mu})^{\alpha}_{\beta} \partial_{\mu} - im \delta^{\alpha}_{\beta} \right] \psi^{\beta}(x) . \quad (43.33)$$

唯一不消失的 $a^{\alpha}_{\beta(k)}$ 为

$$\begin{aligned} a^{\alpha}_{\beta(0,0,0,0)} &= -im \delta^{\alpha}_{\beta} , & a^{\alpha}_{\beta(1,0,0,0)} &= (\gamma_0)^{\alpha}_{\beta} , & a^{\alpha}_{\beta(0,1,0,0)} &= (\gamma_1)^{\alpha}_{\beta} , \\ a^{\alpha}_{\beta(0,0,1,0)} &= (\gamma_2)^{\alpha}_{\beta} , & a^{\alpha}_{\beta(0,0,0,1)} &= (\gamma_3)^{\alpha}_{\beta} . \end{aligned}$$

主符是 4×4 矩阵

$$\sigma_x(\xi, D) = \xi_1 \gamma_0 + \xi_2 \gamma_1 + \xi_3 \gamma_2 + \xi_4 \gamma_3 . \quad (43.34)$$

■

定义 43.3 微分算符 $D: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ 被称为是**椭圆型的 (elliptic)** 如果对于每个 $x \in M$ (E 和 F 共同的基流形) 和 $\xi \neq 0 (\in T_x^* M)$, 主符 $\sigma_x(\xi, D): E_x \rightarrow F_x$ 是一个同构。对于 D 的椭圆型的一个等价条件是主符矩阵 $\sum_{|k|=n} a^i_{j(k)} (\xi_1)^{k_1} \cdots (\xi_m)^{k_m}$ 对于 $\xi \neq 0$ 必须是可逆的。注意到对于 D 要想是椭圆型的, E 和 F 的纤维维度必须相等。

练习 43.1 令 $M = \mathbb{R}^2$ 并考虑一个二阶微分算符 D , 其主符是

$$\sigma_x(\xi, D) = a^1_{1(2,0)} (\xi_1)^2 + 2a^1_{1(1,1)} \xi_1 \xi_2 + a^1_{1(0,2)} (\xi_2)^2 . \quad (43.35)$$

说明 D 是椭圆型的, 当且仅当 $\sigma_x(\xi, D) = 1$ 在 $\xi_1 - \xi_2$ 平面中是一个椭圆型的。

练习 43.2 说明例 43.1 中的 Laplace 算符 Δ 是椭圆型的, 但 d'Alembert 算符 $\square$ 不是。说明 (43.33) 的 Dirac 算符是椭圆型的。

我们现在可以将 de Rham 复形推广到椭圆型复形这一更一般的概念。

定义 43.4 考虑 M 上向量丛的一个有限序列 $\pi_p: E_p \rightarrow M$ 和微分算符 $D_p: \Gamma(E_p) \rightarrow \Gamma(E_{p+1})$ 的一个对应序列。序列 $\{E_p, D_p\}$ 被称为是一个**复形 (complex)**, 如果

$$\text{Im } D_{p-1} \subset \ker D_p , \quad (43.36)$$

[c.f. 方程 (43.1) 和 Figure 43.1, 对于 de Rham 复形]。

定义 43.5 序列 $\{E_p, D_p\}$ 被称为一个椭圆型复形 (*elliptic complex*) 如果 $\{E_p, D_p\}$ 是一个复形, 附加地, 对于任意 $x \in M$ 和 $\xi (\neq 0) \in T_x^* M$, 有

$$\ker \sigma_x(\xi, D_{p+1}) = \operatorname{im} \sigma_x(\xi, D_p) . \quad (43.37)$$

如果满足后面的条件, 线性映射的序列

$$\sigma_x(\xi, D_p) : E_{p,x} \rightarrow E_{p+1,x}$$

被称为是一个正合序列 (*exact sequence*)。

假设丛 $\pi_p : E_p \rightarrow M$ 都装备了纤维标积, 在每个情况中记为 $(\cdot, \cdot)_x$ ($x \in M$) (比如, 纤维度规在 M 上通过一个 Riemann 度规引入)。我们在每个 $\Gamma(E_p)$ 中定义一个标积 $(\cdot, \cdot)$ 为

$$(u, v) = \int_M (u_x, v_x) \sigma , \quad (43.38)$$

其中, σ 是 M 中的体积元素而 $u, v \in \Gamma(E_p)$ 。对于每个 $D_p : \Gamma(E_p) \rightarrow \Gamma(E_{p+1})$, 伴随算符 $D_p^\dagger : \Gamma(E_{p+1}) \rightarrow \Gamma(E_p)$ 定义为

$$\int_M ((D_p u)_x, v_x) \sigma = \int_M (u_x, (D_p^\dagger v)_x) \sigma , \quad (43.39)$$

或

$$(D_p u, v) = (u, D_p^\dagger v) , \quad (43.40)$$

其中, $u \in \Gamma(E_p)$ 和 $v \in \Gamma(E_{p+1})$ [c.f. (43.3)]。

练习 43.3 说明如果 $\{E_p, D_p\}$ 一个椭圆型复形, 序列 $\{E_{p+1}, D_p^\dagger\}$ 的逆序也是一个椭圆型复形。

定义 43.6 微分算符 $\Delta_p : E_p \rightarrow E_p$ 定义为

$$\Delta_p \equiv D_p^\dagger D_p + D_{p-1} D_{p-1}^\dagger \quad (43.41)$$

被称为复形 $\{E_p, D_p\}$ 的 **Laplace 算符 (Laplacian)**。

我们将只表述而不证明下面事实 (对于证明, 见 Y. Choquet-Bruhat 和 C. DeWitte-Morette 的 398 页, 还有 M. Dillard-Bleick, 1982)。

定理 43.4 复形 $\{E_p, D_p\}$ 是一个椭圆型复形, 当且仅当 Laplace 算符 Δ_p 都是椭圆型算符。

我们有下面 Hodge 分解定理 (定理 43.2) 的推广 (只表述而不证明)。

定理 43.5 如果 $\{E_p, D_p\}$ 是一个无边界的紧致流形 M 上的一个椭圆型复形, 则每个 $u_p \in \Gamma(E_p)$ 可以被唯一分解为

$$u_p = D_{p-1} v_{p-1} + D_p^\dagger s_{p+1} + h_p , \quad (43.42)$$

其中 $v_{p-1} \in \Gamma(E_{p-1})$, $s_{p+1} \in \Gamma(E_{p+1})$, 而 $\Delta_p h_p = 0$ 。(43.42) 的等号右边的三个截面 $[\in \Gamma(E_p)]$ 在 (43.38) 的标积 $(\cdot, \cdot)$ 下是相互正交的。

因为 (43.36), 我们可以对于复形 $\{E_p, D_p\}$ 定义上同调空间 $H^p(E_p, D_p)$ 为

$$H^p(E_p, D_p) \equiv \frac{\ker D_p}{\text{Im } D_{p-1}}. \quad (43.43)$$

我们也可以记调和截面的空间 $\ker \Delta_p$ 为 $\text{Harm}^p(E_p, D_p)$ 。运用类似的讨论得出 Hodge 定理 (定理 43.3), 我们下面的推广。

定理 43.6 对于一个复形 $\{E_p, D_p\}$, 我们下面的同构:

$$H^p(E_p, D_p) \sim \text{Harm}^p(E_p, D_p). \quad (43.44)$$

(43.25) 的推广引导出了下面定义。

定义 43.7 一个椭圆型复形 $\{E_p, D_p\}$ 的解析指标 (*analytical index of an elliptic complex*) 由下式给出

$$\text{ind}_{an} \{E_p, D_p\} \equiv \sum_p (-1)^p \dim \ker \Delta_p. \quad (43.45)$$

一个椭圆型复形的解析指标可以用另一种方式来定义。考虑一个单椭圆型算符 $D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$ 。除了空间 $\ker D$, 我们有 D 的上核 (*cokernel*) 定义为

$$\text{coker } D \equiv \frac{\Gamma(F)}{\text{Im } D}. \quad (43.46)$$

定理 43.7 $D^\dagger$ 的核同构于 D 的上核:

$$\text{coker } D \sim \ker D^\dagger. \quad (43.47)$$

证明: 考虑由 $u \mapsto [u]$ 给出的映射 $f : \ker D^\dagger \rightarrow \text{coker } D$, 即: f 映射 $u \in \ker D^\dagger$ 到 $\text{coker } D$ 中表示的元素。我们将说明这个映射是一个双射。给定 $[s] \in \text{coker } D$, 令

$$s_0 \equiv s - D(D^\dagger D)^{-1} D^\dagger s. \quad (43.48)$$

凭借 D 是椭圆型的事实 (c.f. 定义 43.3), 算符 $(D^\dagger D)^{-1} = D^{-1} (D^\dagger)^{-1}$ 存在。很明显, $D^\dagger s_0 = 0$ 和 $[s_0] = [s]$ 。它建立了满射。为了说明 f 是单射, 我们将说明如果 $s_0, (s_0)' \in \ker D^\dagger$ 和 $s_0 \neq (s_0)'$, 则 $[s_0] \neq [(s_0)']$ 。反过来假设, 即: $[s_0] = [(s_0)']$ 。则存在一个 $u \in \Gamma(E)$ 使得 $(s_0)' - s_0 = Du$ 。我们则有

$$0 = (u, D^\dagger ((s_0)' - s_0)) = (Du, (s_0)' - s_0) = (Du, Du), \quad (43.49)$$

这意味着 $Du = 0$ 。结果便是 $s_0 = (s_0)'$ 。它建立了 f 的单射。 $\square$

定义 43.8 一个 *Fredholm* 算符 (*Fredholm operator*) 是一个椭圆型算符 D 对于其 $\ker D$ 和 $\operatorname{coker} D$ 都是有限维的。

定义 43.9 一个椭圆型算符 D 的解析指标定义为

$$\boxed{\operatorname{index} D \equiv \dim \ker D - \dim \operatorname{coker} D = \dim \ker D - \dim \ker D^\dagger} . \quad (43.50)$$

一个单微分算符 D 的解析指标实际上和下面复形的解析指标相同

$$0 \xrightarrow{i} \Gamma(E) \xrightarrow{D} \Gamma(F) \xrightarrow{\varphi} 0 , \quad (43.51)$$

[如 (43.45) 给出], 其中 i 是包含映射而 φ 是一个常映射到 0。实际上, 根据 (43.45) 与 $D_0 = i$, $D_1 = D$ 和 $D_2 = \varphi$, 我们有

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_{an} \{E_p, D_p\} &= \sum_{p=0}^2 (-1)^p \dim H^p(E_p, D_p) = \dim \frac{\ker D}{\operatorname{Im} i} - \dim \frac{\ker \varphi}{\operatorname{Im} D} \\ &= \dim \ker D - \dim \operatorname{Im} i - (\dim \ker \varphi - \dim \operatorname{Im} D) \\ &= \dim \ker D - (\dim \Gamma(F) - \dim \operatorname{Im} D) \\ &= \dim \ker D - \dim \operatorname{coker} D = \operatorname{index} D \end{aligned} \quad (43.52)$$

其中, 我们已经使用了 $\operatorname{Im} i = 0 \in \Gamma(E)$ 和 $\ker \varphi = \Gamma(F)$ 。

给定一个椭圆型复形 $\{E_p, D_p\}$, 我们可以构造所谓的偶丛 (even bundle) E_+ 和奇丛 (odd bundle) E_- :

$$E_+ \equiv \oplus_q E_{2q} , \quad E_- \equiv \oplus_q E_{2q+1} . \quad (43.53)$$

定义算符 $A: \Gamma(E_+) \rightarrow \Gamma(E_-)$ 为

$$A \equiv \oplus_q (D_{2q} + D_{2q-1}^\dagger) . \quad (43.54)$$

因此, $A^\dagger: \Gamma(E_-) \rightarrow \Gamma(E_+)$ 由下式给出

$$A^\dagger = \oplus_q (D_{2q-1} + D_{2q}^\dagger) . \quad (43.55)$$

练习 43.4 验证 A (和 $A^\dagger$) 的区域和范围正如断言一样。

考虑复形

$$0 \xrightarrow{i} E_+ \xrightarrow{A} E_- \xrightarrow{\varphi} 0 , \quad (43.56)$$

和集合 $E_0 = 0$, $E_I = E_+$, $E_{II} = E_-$, 还有 $D_0 = i$, $D_I = A$ 和 $D_{II} = \varphi$ 。Laplace 算符 [如 (43.41) 定义] 由下式给出

$$\Delta_0 = 0 , \quad (43.57)$$

$$\Delta_I = A^\dagger A + i i^\dagger = A^\dagger A \equiv \Delta_+ , \quad (43.58)$$

$$\Delta_{II} = \varphi^\dagger \varphi + A A^\dagger = A A^\dagger \equiv \Delta_- , \quad (43.59)$$

其中, $\Delta_+ : E_+ \rightarrow E_+$ 和 $\Delta_- : E_- \rightarrow E_-$ 。从 (43.54) 和 (43.55), 我们有

$$\begin{aligned}\Delta_+ &= A^\dagger A = \oplus_{p,q} \left(D_{2q-1} + D_{2q}^\dagger \right) \left(D_{2p} + D_{2p-1}^\dagger \right) \\ &= \oplus_q \left(D_{2q-1} D_{2q-1}^\dagger + D_{2q}^\dagger D_{2q} \right) = \oplus_q \Delta_{2q},\end{aligned}\quad (43.60)$$

其中, Δ_{2q} 是原复形的 Laplace 算符, 其之外 E_+ 和 E_- 已经被构造了。关于 (43.60) 的推导需要一些讨论。当 $p \neq q$, 很明显

$$D_{2q-1} D_{2p-1}^\dagger = D_{2q}^\dagger D_{2p} = 0,$$

因为在这两种情况下, 右边的算符的范围与左边的算符的区域都不相交。交叉项 $D_{2q-1} D_{2p}$ 和 $D_{2q}^\dagger D_{2p-1}^\dagger$ 对于 p 和 q 的任意值也消失。对于 $p = q$, 它们也因上面相同的原因消失。对于 $p \neq q$, 范围和区域将只对于 $q = p + 1$ 于 $D_{2q-1} D_{2p}$ 和对于 $q = p - 1$ 于 $D_{2q}^\dagger D_{2p-1}^\dagger$ 时匹配。在第一种情况中, $D_{2q-1} D_{2p} = D_{2p+1} D_{2p}$ 。但是 $\text{Im } D_{2p} \subset \ker D_{2p+1}$, 因此 $D_{2p+1} D_{2p} = 0$ 。类似地, 对于 $q = p - 1$, $D_{2q}^\dagger D_{2p-1}^\dagger = D_{2p-2}^\dagger D_{2p}^\dagger = 0$ 。按照完全相同的论证导出 (43.60), 我们有

$$\Delta_- = A A^\dagger = \oplus_q \Delta_{2q+1}. \quad (43.61)$$

指标的定义 (43.45) 作用在复形 (43.56) 上则最终给出

$$\begin{aligned}\text{index} \{E_+, E_-, A\} &= \dim \ker \Delta_+ - \dim \ker \Delta_- \\ &= \sum_{q=0} \dim \ker \Delta_{2q} - \sum_{q=0} \dim \ker \Delta_{2q+1} \\ &= \sum_p (-1)^p \dim \ker \Delta_p = \text{index} \{E_p, D_p\}.\end{aligned}\quad (43.62)$$

已经定义了椭圆型复形 $\{E_p, D_p\}$ 的解析指标, 我们继续给出 $\{E_p, D_p\}$ 的所谓**拓扑指标 (topological index)** 的一个表达式。最初的定义是用 K -理论 (向量丛的一个上同调理论) 给出的, 其超出了本书的范围。事实证明, 拓扑指标最实用的表达为一个写成 E_p 的陈特征 [(41.79)], TM 的复化的所谓 **Todd 类 (Todd class)** $Td(TM \otimes \mathbb{C})$ 和 TM 的 Euler 类 $e(TM)$ [c.f. (41.119) 和 (41.132)] 的上同调公式。

让我们先来定义一个复形的 Todd 类 (运用定理 41.5 的分裂原理)。令 q 是纤维维度, x_j , $j = 1, \dots, q$ 如 (41.105) 中定义的那样。则 Todd 类 $Td(\Omega)$ 由下式给出

$$Td(\Omega) \equiv \prod_{j=1}^q \frac{x_j}{1 - e^{-x_j}}. \quad (43.63)$$

这可以用 x_j 的幂形式化展开为

$$\begin{aligned}Td(\Omega) &= 1 + \frac{1}{2} \sum_j x_j + \frac{1}{12} \sum_j (x_j)^2 + \frac{1}{4} \sum_{j < k} x_j x_k + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} C_1(\Omega) + \frac{1}{12} [C_1(\Omega)^2 - C_2(\Omega)] + \frac{1}{24} C_1(\Omega) C_2(\Omega) + \dots,\end{aligned}\quad (43.64)$$

其中, $C_j(\Omega)$ 是陈类。

练习 43.5 验证 (43.64) 的所有等号。

Todd 类满足下面对于任意示性类的基本要求：

$$Td(E \oplus F) = Td(E) \wedge Td(F), \quad (43.65)$$

其中, E 和 F 是相同基流形上的任意两个向量丛。

$\{E_p, D_p\}$ 的拓扑指标 (topological index) 由下式给出

$$\boxed{ind_{top} \{E_p, D_p\} = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \int_M Ch(\oplus_p (-1)^p E_p) \wedge \frac{Td(TM \otimes \mathbb{C})}{e(TM)}}, \quad (43.66)$$

其中, $m = \dim(M)$, $Ch(E)$ 是 E 的陈特征 [(41.79)], 并且等号右边的除法可以运用分裂定理进行处理 (定理 41.5)。被积函数总是一个 m -形式和等号右边总是产生一个整数的事实可能不是很明显, 但将通过下面的例子来验证。我们现在表述 (而不证明) 我们本章的核心定理。

定理 43.8 — Atiyah-Singer 指标定理 (Atiyah-Singer index Theorem). 令 $\{E_p, D_p\}$ 是无边界的 m -维紧致流形 M 上的一个椭圆型复形。则

$$\boxed{ind_{an} \{E_p, D_p\} = ind_{top} \{E_p, D_p\}}, \quad (43.67)$$

其中, $\{E_p, D_p\}$ 的解析指标 ind_{an} 和拓扑指标 ind_{top} 分别由 (43.45) 和 (43.66) 给出。如果 m 是奇数, 则指标完全消失。

我们接下来将 Atiyah-Singer 指标定理应用在一些特殊情况。我们的第一个例子是本章开头引入的 de Rham 复形。

由于拓扑指标用陈特征给出, 其是复向量丛的示性类, 我们将需要在 $\Lambda^p(M)$ 中运用复值形式。因此

$$\Lambda^p(M) = \Gamma(M, \Lambda^p T^*M \otimes \mathbb{C}), \quad (43.68)$$

其中, $T^*M \otimes \mathbb{C}$ 是实切丛 T^*M 的复化。(注意到基流形 M 并不要求是一个复流形)。

练习 43.6 运用定理 43.4 来说明 de Rham 复形是一个椭圆型复形, 即: 说明 Laplace 算符 $\Delta = \delta d + d\delta$ 是一个椭圆型算符 (c.f. 定义 43.3)。

de Rham 复形的解析指标由下式给出

$$\begin{aligned} ind_{an} \{\Lambda^p(M), d\} &= \sum_p (-1)^p \dim \ker \Delta_p = \sum_p (-1)^p \dim_{\mathbb{C}} H^p(M, \mathbb{C}) \quad (\text{复维度}) \\ &= \sum_p (-1)^p \dim H^p(M, \mathbb{R}) = \sum_p (-1)^p b_p(M) = \chi(M), \end{aligned} \quad (43.69)$$

其是 M 的 Euler 的示性数。

让我们现在运用 (43.66) 拉计算拓扑指标。为了计算陈特征 $Ch(\oplus_p (-1)^p \Lambda^p T^*M \otimes \mathbb{C})$,

我们将使用性质 (41.87), (41.88) 和分裂原理 (定理 41.5)。通过 (41.87), 有

$$Ch(\bigoplus_{p=0}^m (-1)^p \Lambda^p T^* M \otimes \mathbb{C}) = \sum_{p=0}^m (-1)^p Ch(\Lambda^p T^* M \otimes \mathbb{C}) . \quad (43.70)$$

为了使用分裂原理, 让我们假装 $TM \otimes \mathbb{C}$ 可以分裂成 M 上 m 个线丛的一个直和:

$$TM \otimes \mathbb{C} = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_m . \quad (43.71)$$

则

$$T^* M \otimes \mathbb{C} = L_1^* \oplus L_2^* \oplus \cdots \oplus L_m^* , \quad (43.72)$$

其中, L_i^* 是 L_i 的对偶丛, 并且

$$\Lambda^p T^* M \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m} (L_{i_1}^* \otimes L_{i_2}^* \otimes \cdots \otimes L_{i_p}^*) \quad (43.73)$$

[c.f. (28.20) 和前面的讨论]。通过 (41.88), 则有

$$Ch(\Lambda^p T^* M \otimes \mathbb{C}) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m} Ch(L_{i_1}^*) \wedge \cdots \wedge Ch(L_{i_p}^*) . \quad (43.74)$$

令

$$C_1(L_j) = \frac{i}{2\pi} \text{Tr}(\Omega_{L_j}) = \frac{i}{2\pi} \Omega_{L_j} = x_j . \quad (43.75)$$

则

$$Ch(L_j) = e^{x_j} , \quad (43.76)$$

和

$$Ch(L_j^*) = e^{-x_j} . \quad (43.77)$$

这可以通过 $L_j \otimes L_j^*$ 是一个平凡丛的事实看出。通过引理 41.1, 它的所有示性类必须是平凡的。特别地

$$Ch(L_j \otimes L_j^*) = Ch(L_j) \wedge Ch(L_j^*) = 1 , \quad (43.78)$$

由此 (43.77)。

练习 43.7 通过说明 $L_j \otimes L_j^*$ 有一个全局截面来说明它是一个平凡丛。

因此, (43.74) 和 (43.77) 产生

$$Ch(\Lambda^p T^* M \otimes \mathbb{C}) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m} e^{-x_{i_1}} e^{-x_{i_2}} \cdots e^{-x_{i_p}} . \quad (43.79)$$

从 (43.70) 得到

$$\begin{aligned}
 & Ch\left(\bigoplus_{p=0}^m (-1)^p \Lambda^p T^* M \otimes \mathbb{C}\right) \\
 &= \sum_{p=0}^m (-1)^p \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m} e^{-x_{i_1}} e^{-x_{i_2}} \dots e^{-x_{i_p}} \\
 &= 1 - \sum_{i=1}^m e^{-x_i} + \sum_{i < j} e^{-x_i} e^{-x_j} + \dots + (-1)^m e^{-x_1} e^{-x_2} \dots e^{-x_m} \\
 &= \prod_{i=1}^m (1 - e^{-x_i}) .
 \end{aligned} \tag{43.80}$$

运用由 (43.63) 给出的对 Todd 类的定义, 我们有

$$Ch(\bigoplus_p (-1)^p \Lambda^p T^* M \otimes \mathbb{C}) \wedge Td(TM \otimes \mathbb{C}) = \prod_{i=1}^m (1 - e^{-x_i}) \prod_{j=1}^m \frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} = \prod_{j=1}^m x_j . \tag{43.81}$$

假设 $m = 2l$ 。我们将再次使用分裂原理来计算 Euler 类 $e(TM)$ 。我们将运用由 (41.119) 给出的 $e(TM)$ 的定义 (写成 Pontrjagin 类 p_l) 和通过 (41.116) 和 (41.131) 给出的 p_l 与陈类之间的关系。从 (41.131), 我们可以写

$$p_l(TM) = (-1)^l \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{2l} \det \Omega = (-1)^l C_{2l}(TM \otimes \mathbb{C}) = (-1)^l \prod_{j=1}^{2l} x_j , \tag{43.82}$$

其中, $C_{2l}(TM \otimes \mathbb{C})$ 是复化的切丛 $TM \otimes \mathbb{C}$ 的顶陈类。通过由 (40.18) 给出的 $TM \otimes \mathbb{C}$ 的直和分解, 并且假设 (43.71), 我们可以写

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{2\pi} \Omega_{TM \otimes \mathbb{C}} &= \frac{i}{2\pi} \Omega_{TM_{\mathbb{C}} \oplus \overline{TM}_{\mathbb{C}}} \\
 &= \begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & x_l & & \\ & & & x_{l+1} & \\ 0 & & & & \dots \\ & & & & & x_{2l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & x_l & & \\ & & & -x_1 & \\ 0 & & & & \dots \\ & & & & & -x_l \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{43.83}$$

因此

$$p_l(TM) = (-1)^l \left(\prod_{j=1}^l x_j\right) (-1)^l \left(\prod_{j=1}^l x_j\right) = \left(\prod_{j=1}^l x_j\right)^2 . \tag{43.84}$$

通过 (41.119), 有

$$e(TM) = \prod_{j=1}^l x_j . \tag{43.85}$$

这个结果和 (43.81) 一同可以被替换为 (43.66) 的等号右边来最终给出 de Rham 复形的拓扑

指标:

$$\begin{aligned} \text{ind}_{\text{top}} \{ \Lambda^p(M), d \} &= (-1)^{2l(2l+1)/2} \int_M \frac{\prod_{j=1}^{2l} x_j}{\prod_{j=1}^l x_j} \\ &= (-1)^{2l^2+l} (-1)^l \int_M \prod_{j=1}^l x_j = \int_M e(TM). \end{aligned} \quad (43.86)$$

与 (43.69) 一同, 可以看出 Atiyah-Singer 指标定理应用在 de Rham 复形上产生著名的 *Gauss-Bonnet* 定理 (定理 41.6)。当 m 是一个奇数, 这个定理依然成立, 因为 $e(TM)$ 和 $\chi(M)$ 都会消失 [c.f. (41.119) 和 (33.31) 之后的讨论]。

R 在所有运用分类原理的计算中, 上述涉及 x_j 的中间结果并不是严格意义上的真实结果, 除非所讨论的向量丛实际上可以被分裂成线丛的直和 [c.f. (41.103)] (这并不总是如此)。然而, 只涉及示性类的最终结果总是有效的。事实上, 这就是为什么分裂原理如此有用的原因。

我们接下来将应用 Atiyah-Singer 指标定理于所谓的 **Dolbeault 复形 (Dolbeault complex)**。这是 de Rham 复形到当 M 是一个复流形情况的推广。其由下式给出

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} A_{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} A_{p,q+1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots, \quad (43.87)$$

其中, $A_{p,q}$ 是 M 上所有 (p, q) -型形式的空间 [c.f. (40.62)] 和由 (40.63) 定义微分算符 $\bar{\partial}$ 。对应的 **Dolbeault 上同调群 (Dolbeault cohomology groups)** [c.f. (43.43)] 由下式给出

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) = \frac{\ker(\bar{\partial} : A_{p,q} \rightarrow A_{p,q+1})}{\text{Im}(\bar{\partial} : A_{p,q-1} \rightarrow A_{p,q})}. \quad (43.88)$$

我们注意到 $d = \partial + \bar{\partial}$ 在一个复流形上

$$d^2 = 0 = \partial^2 + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial) + \bar{\partial}^2. \quad (43.89)$$

令上面的方程两边作用在 $\omega \in A_{p,q}$ 上。则

$$\partial^2 \omega \in A_{p+2,q}, \quad (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\omega \in A_{p+1,q+1}, \quad \bar{\partial}^2 \omega \in A_{p,q+2}.$$

因此

$$\partial^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \bar{\partial}^2 = 0 \quad (43.90)$$

最后一个方程使得 (43.87) 是一个复形。

练习 43.8 对于 p 的每个值验证 Dolbeault 复形是一个椭圆型复形。

数

$$h_{p,q} \equiv \dim_{\mathbb{C}} H_{\bar{\partial}}^{p,q}(M) \quad (43.91)$$

被称为 **Hodge 数 (Hodge numbers)**。它们是 Betti 数的完善。我们将令 $p = 0$ 并且考虑

椭圆型复形

$$\cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} A_{0,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} A_{0,q+1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \quad (43.92)$$

这种复形的解析指标则由下式给出

$$\text{ind}_{an} \{A_{0,q}, \bar{\partial}\} = \sum_q (-1)^q h_{0,q} . \quad (43.93)$$

它被称为复流形 M 的**算数亏格 (arithmetic genus)**。

对于 Dolbeault 复形拓扑指标的计算有点类似于对于 de Rham 复形。首先，我们需要计算 $Ch(\oplus_q (-1)^q \Lambda^{0,q} T^*M)$ ，其中 $\Lambda^{0,q} T^*M$ 是截面为 $(0,q)$ -型形式的丛：

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_q} d\bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{i_q} .$$

在 (40.19) 的记号下，这正是 $\Lambda^q \overline{T^*M_{\mathbb{C}}}$ (其中， M 被视为一个偶数维实流形)。如果在 M 上给出一个 Hermite 结构，则 $TM_{\mathbb{C}}$ 的结构群约化为 $U(n)$ ，其中 n 是 M 的复维度： $n = \dim_{\mathbb{C}} M$ 。在这种情况下， M 上的一个向量丛的对偶丛可以用共轭丛来标识，所以 $\overline{T^*M_{\mathbb{C}}} = TM_{\mathbb{C}}$ 。

练习 43.9 令 $\pi: E \rightarrow M$ 是一个 n 复维度的复流形 M 上的一个复向量丛。如果结构群是 $U(n)$ ，说明 $E^* = \bar{E}$ ，其中 E^* 是对偶丛而 $\bar{E}$ 是共轭丛。

我们将因此需要估计

$$Ch(\oplus_q (-1)^q \Lambda^q TM_{\mathbb{C}}) = \sum_{q=0}^n (-1)^q Ch(\Lambda^q TM_{\mathbb{C}}) .$$

通过分裂原理和由 (43.75) 给出的 x_j ，有

$$\begin{aligned} Ch(\Lambda^q TM_{\mathbb{C}}) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leq n} e^{(x_{i_1} + \cdots + x_{i_q})} \\ &= \prod_{i=1}^n (1 - e^{x_i}) = (-1)^n x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n (-1)^n \prod_{i=1}^n \frac{(1 - e^{x_i})}{x_i} . \end{aligned} \quad (43.94)$$

通过 Todd 类的定义 [(43.63)]，练习 43.9 的结论并且意识到对于 $T^*M_{\mathbb{C}}$ ，我们已经把 x_i 替换为 $-x_i$ ，我们有

$$(-1)^n \prod_{i=1}^n \frac{1 - e^{x_i}}{x_i} = \frac{1}{Td(T^*M_{\mathbb{C}})} . \quad (43.95)$$

与此同时，通过 (41.78)， $T^*M_{\mathbb{C}}$ 的顶陈类为

$$(-1)^n x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = C_n(T^*M_{\mathbb{C}}) . \quad (43.96)$$

因此

$$Ch(\Lambda^q TM_{\mathbb{C}}) = \frac{C_n(T^*M_{\mathbb{C}})}{Td(T^*M_{\mathbb{C}})} \quad (43.97)$$

从 (43.66) 得到 Dolbeault 复形的拓扑指标由下式给出

$$ind_{top} \{A_{0,q}, \bar{\partial}\} = (-1)^{n(2n+1)} \int_M \frac{C_n(T^*M_{\mathbb{C}})}{Td(T^*M_{\mathbb{C}})} \wedge \frac{Td(TM \otimes \mathbb{C})}{e(TM)}, \quad (43.98)$$

在 (43.66) 中, M 被视为一个偶数维实流形, m 是 M 的实维度并且因此在我们这种情况中等于 $2n$, 其中 $\dim_{\mathbb{C}} M = n$ 。但从 (40.18) 和 (43.65)

$$Td(TM \otimes \mathbb{C}) = Td(TM_{\mathbb{C}} \oplus \overline{TM_{\mathbb{C}}}) = Td(TM_{\mathbb{C}}) \wedge Td(T^*M_{\mathbb{C}}). \quad (43.99)$$

同样, 通过 (43.85) 和 (43.96), 有

$$C_n(T^*M_{\mathbb{C}}) = (-1)^n e(TM). \quad (43.100)$$

我们最终有

$$ind_{top} \{A_{0,q}, \bar{\partial}\} = \int_M Td(TM_{\mathbb{C}}) = \int_M Td(M), \quad (43.101)$$

其中, M 被视为一个偶数维实流形。Atiyah-Singer 指标定理应用于 Dolbeault 复形 $\{A_{0,q}, \bar{\partial}\}$ 则产生

$$\boxed{\int_M Td(M) = \sum_{q=0}^n (-1)^q h_{0,q}}, \quad (43.102)$$

其中, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$ 和 $h_{0,q}$ 是 (43.91) 中定义的 Hodge 数。上面的表述 [(43.102)] 是著名的 **Riemann-Roch-Hirzebruch 定理 (Riemann-Roch-Hirzebruch Theorem)**, 代数几何的基础定理之一。

作为应用 Atiyah-Singer 指标定理的最后一个例子, 我们将考虑 **Dirac 复形 (Dirac complex)**, 它与 Fermi 子场的物理有很大的相关性。我们在 Chapter 41 的结尾简要提到 Stiefel-Whitney 类的时候已经暗示了自选结构。我们需要在这里更仔细地解释它。

一个流形 M 上的一个旋量结构的存在要求 M 满足两个要求: (1) M 是可定向的, 并且 (2) TM 的结构群提升到 $SO(n)$ 的泛覆盖, 即: $Spin(n)$, 其中 $n = \dim(M)$ (见定义 43.10 如下)。比如, 从 Chapter 11 回忆 $SO(3)$ 的泛覆盖是 $SU(2)$, 即: $Spin(3) \sim SU(2)$ 。它们分别通过事实 $w_1(M) = 0$ 和 $w_2(M) = 0$ 被正好满足, 其中 $w_1(M)$ 和 $w_2(M)$ 分别是第一和第二 Stiefel-Whitney 类。下面我们需要假设 M 赋予了一个 Euclid (非 Lorentz 的) 度规 [见 (43.109) 之后的讨论], 所以我们有 M 上标准正交架的主丛, $\pi: P \rightarrow M$ 。

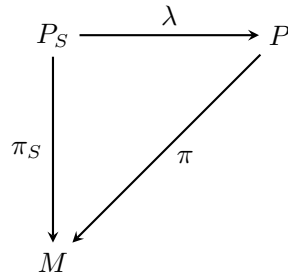


Figure 43.2

定义 43.10 对于 $\pi : P \rightarrow M$ (M 的标准正交标架丛) 的一个旋量结构包括具有结构 $\lambda : P_S(M) \rightarrow M$ 的一个主丛 $\pi_S : P_S(M) \rightarrow M$, 使得对于任意 $p \in P_S(M)$, 有 (见 Figure 43.2)

$$\begin{aligned} i) \quad & (\pi \circ \lambda)(p) = \pi_S(p), \quad \text{和} \\ ii) \quad & \lambda(gp) = \phi(g)\lambda(p), \quad \text{对于任意 } g \in Spin(n), \end{aligned}$$

其中, $\phi : Spin(n) \rightarrow SO(n)$ 是 (11.30) 的覆盖同态。注意到 gp 记为 P_S 上 $Spin(n)$ 的左作用而 $\phi(g)\lambda(p)$ 记为 P 上 $SO(n)$ 的左作用。

每个旋量结构的选择都确定了 $H^1(M; \mathbb{Z}_2)$ 的一个元素, 反之亦然。如果 M 是但连通的, $H^1(M; \mathbb{Z}_2)$ 是平凡的并且 M 上的旋量结构是唯一的。

我们需要 $Spin(n)$ 的一些基本事实 (其将在此只表述而不证明)。存在 $Spin(n)$ 的一个基本表示, 称为**旋量表示 (spin representation)**, 其表示空间 S 有一个由 $\dim(S) = 2^{n/2}$ (对于 n 为偶数) 和 $\dim(S) = 2^{(n-1)/2}$ (对于 n 为奇数) 给出的维度。如果 n 是奇数, 旋量表示是不可约的; 但是如果 n 是偶数, 它可以约化成两个相同维度的不可约分量 S^+ 和 S^- :

$$S = S^+ \oplus S^-, \quad \dim(S^+) = \dim(S^-) = 2^{(n/2-1)} = \frac{1}{2} \dim(S). \quad (43.103)$$

我们定义如下的**旋量丛 (spinor bundles)**, 其将复向量丛与 P_S (c.f. 定义 37.12) 关联:

$$E^+ \equiv S^+ \times_{Spin(n)} P_S, \quad (43.104)$$

$$E^- \equiv S^- \times_{Spin(n)} P_S, \quad (43.105)$$

$$E \equiv E^+ \oplus E^-. \quad (43.106)$$

$\Gamma(E)$, $\Gamma(E^\pm)$ 的元素 (即: E , $E^\pm$ 的截面) 被称为 M 上的**旋量 (spinor)**。

回忆由 (27.1) 给出的 Dirac γ -矩阵 γ_μ 。我们将 (27.11a) 的 γ_0 变成 $i\gamma_0$, 其将在此记为 γ_0 , 所以在本章, γ -矩阵定义为

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (43.107)$$

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (43.108)$$

其中, 每个条目是一个 2×2 分块矩阵而 σ_i 是由 (11.16) 给出的 2×2 Pauli 旋量矩阵。这些 γ -矩阵满足下面的关系而不是 (27.5):

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} \equiv \gamma_a \gamma_b + \gamma_b \gamma_a = -2\delta_{ab}. \quad (43.109)$$

对 γ_0 的改变是为了适应这样一个事实: M 上度规是 Euclid 的而不是 Lorentz 的。(如果 M 是 Lorentz 的而不是 Euclid 的, 得到的结果便是下面引入的 Dirac 算符将不是椭圆型的)。

上面写出的显式 Dirac γ -矩阵 [(43.107) 和 (43.108)] 是对于 $n = \dim(M) = 4$ 。更一般地, Dirac γ -矩阵是 n 个反对易 $2^{n/2} \times 2^{n/2}$ 矩阵的集合 [满足 (43.109) 并有 $a, b = 1, \dots, n$], 其生成 $Spin(n)$ 的 Clifford 代数。我们也需要**手征算符 (chirality operator)** γ_{n+1} (只当 n 是偶

数才有定义) 定义为

$$\gamma_{n+1} \equiv i^{n(n+1)/2} \gamma_1 \dots \gamma_n . \quad (43.110)$$

手征算符满足

$$\gamma_{n+1}^2 = 1 , \quad (43.111)$$

$$\{\gamma_{n+1}, \gamma_a\} = 0 , \quad a = 1, \dots, n . \quad (43.112)$$

γ_a 和 γ_{n+1} 作用在 $\Gamma(E)$ 上。方程 (43.111) 意味着: 依赖于分解 $E = E^+ \oplus E^-$, γ_{n+1} 是分块对角化的:

$$\gamma_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (43.113)$$

其中每个条目是一个 $2^{n/2-1} \times 2^{n/2-1}$ 分块矩阵。因此, 对 $E^\pm$ 部分的投影由下式获得

$$P^\pm \equiv (1 \pm \gamma_{n+1}) / 2 . \quad (43.114)$$

令 $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ (其中, ω_μ 是矩阵-值 $2^{n/2} \times 2^{n/2}$) 是旋量丛 $\pi : E \rightarrow M$ [其中, E 是由 (43.106) 给出的] 上的 Riemann **旋量联络 (spin connection)**。这个结构将允许我们在 $\Gamma(E)$ 上取协变导数给定 M 上一个 Riemann 联络。 M 上一个 Riemann 联络可与 M 的主 $SO(n)$ -标架丛 P 上一个联络 $\tilde{\omega}$ 相关联。通过拉回 λ^* (c.f. Figure 43.2), 我们有主丛 P_S 上的一个联络 ω_S , 则其可以与我们的旋量联络 ω 相关联。令 M 上一个标准正交标架场由下式给出

$$s_a = e_a^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} , \quad (43.115)$$

其中, 系数 $e_a^\mu(x)$ 被称为 **vielbein**。标准正交条件 (在 Riemann 度规 $g_{\mu\nu}$ 下) 意味着

$$e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu} = \delta_{ab} , \quad (43.116)$$

或者, 有 $e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu$, 等价条件

$$e_\mu^a e_\nu^b \delta_{ab} = g_{\mu\nu} . \quad (43.117)$$

Dirac 算符 (Dirac operator) 则由映射 $\not{D} : \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E)$ 给出, 其中

$$\not{D} = \gamma^a e_a^\mu(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \omega_\mu \right) . \quad (43.118)$$

手征 Dirac 算符 (chiral Dirac operator) $\not{\partial} : \Gamma(M, E^+) \rightarrow \Gamma(M, E^-)$ 由下式给出

$$\not{\partial} = \not{D} P^+ , \quad (43.119)$$

则联络 $\Gamma(M, E^+)$ 到 $\Gamma(M, E^-)$ 。反之, 我们有伴随 $\not{\partial}^\dagger : \Gamma(M, E^-) \rightarrow \Gamma(M, E^+)$ 由下式给出

$$\not{\partial}^\dagger = \not{D} P^- . \quad (43.120)$$

练习 43.10 运用由 (43.107) 和 (43.108) 给出的 γ_a 的显式形式验证上面关于 $n = 4$ 情况的手征 Dirac 算符 $\not{D}$ 和 $\not{D}^\dagger$ 的域和范围的论断。

我们考虑 **Dirac 复形 (Dirac complex)**, 或 **旋量复形 (spin complex)** 定义如下 [c.f. (43.51)]:

$$0 \xrightarrow{i} \Gamma(M, E^+) \xrightarrow{\not{D}} \Gamma(M, E^-) \xrightarrow{\varphi} 0 \quad (43.121)$$

练习 43.11 验证 $\not{D}$ 是一个椭圆型算符。

从 (43.50), (43.51) 和 (43.52), 旋量复形的解析指标由下式给出

$$\text{ind } \not{D} = \dim \ker \not{D} - \dim \ker \not{D}^\dagger. \quad (43.122)$$

通过 (43.43) 和定理 43.6, 我们看到通过设定 $D_{p-1} = i$ (包含映射), **调和旋量 (harmonic spinor)** 的空间 Ψ 由下式给出

$$\Psi \equiv \text{Harm}(\Gamma(M, E^+), \not{D}) = \ker \not{D}. \quad (43.123)$$

因此, 一个旋量 ψ 是一个调和旋量, 如果 $\not{D}\psi = 0$ 。类似于 (43.106), Ψ 分解为正负手征部分:

$$\Psi = \Psi^+ \oplus \Psi^-, \quad (43.124)$$

并且我们有

$$\ker \not{D} = \Psi^+, \quad \ker \not{D}^\dagger = \Psi^-. \quad (43.125)$$

令 $\dim \Psi^\pm = n^\pm$ 。则 (43.122) 意味着

$$\text{ind } \not{D} = n^+ - n^-. \quad (43.126)$$

所以通过 (43.52), 旋量复形的解析指标 (43.121) 是 $n^+ - n^-$ 。

我们对旋量算符继续计算拓扑指标。根据 (43.66), 它由下式给出

$$\text{ind}_{\text{top}}(\text{旋量复形}) = \int_M (Ch(E^+) - Ch(E^-)) \frac{Td(TM \otimes \mathbb{C})}{e(TM)}. \quad (43.127)$$

下面的结果将只表述而不证明:

$$Ch(E^+) - Ch(E^-) = \prod_{i=1}^{n/2} (e^{x_i/2} - e^{-x_i/2}), \quad (43.128)$$

其中, $n = \dim(M)$ 和 x_i 由 (43.75) 给出。[记住 n 必须是偶数才可能进行分解 (43.103)]. 对

Todd 类运用 (43.63), 并回忆 (43.83) 和 (43.85) (对于 Euler 类), 我们有

$$\begin{aligned} & (Ch(E^+) - Ch(E^-)) \frac{Td(TM \otimes \mathbb{C})}{e(TM)} \\ &= (-1)^{n/2} \prod_{i=1}^{n/2} \left(\frac{e^{x_i/2} - e^{-x_i/2}}{x_i} \frac{x_i}{(1 - e^{-x_i})} \frac{(-x_i)}{(1 - e^{x_i})} \right) = (-1)^{n/2} \prod_{i=1}^{n/2} \frac{(x_i/2)}{\sinh(x_i/2)}. \end{aligned} \quad (43.129)$$

定义所谓的 **Dirac 亏格 (Dirac genus)** $\hat{A}$ 为

$$\hat{A}(TM) = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{(x_i/2)}{\sinh(x_i/2)} = \det \left(\frac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)} \right). \quad (43.130)$$

它有写成 p_j 的 Pontrjagin 类的表达 [c.f. (41.116)] 由下式给出 (表述而不证明):

$$\hat{A}(TM) = 1 - \frac{1}{24} p_1(TM) + \frac{1}{5760} (7(p_1)^2 - p_2)(TM) + \dots. \quad (43.131)$$

因为 p_j 是 M 上一个 $4j$ -形式。Dirac 亏格在 M 积分消失除非 $\dim(M) = n$ 被 4 整除。在这种情况下, $(-1)^{n/2} = 1$, 而 Atiyah-Singer 指标定理应用到 Dirac 复形表述成

$$index \not{D} = n^+ - n^- = \begin{cases} \int_M \hat{A}(TM), & \text{如果 } \dim(M) = 0 \bmod 4, \\ 0, & \text{其它情况.} \end{cases} \quad (43.132)$$

上面的情况描述了一个自由 Dirac(fermi 子) 场 (由旋量描述的) 生活在一个 Riemann 流形上。在物理中, 我们经常考虑自由 Dirac 场和 Yang-Mills 规范势之间的相互作用 (比如电子和光子之间的相互作用)。在这些情况中, $\Gamma(M, E^\pm)$ [在 (43.121) 中] 需要替换为 $\Gamma(M, E^\pm \otimes F)$, 其中 F 是 M 上向量丛, 在其上定义了 Yang-Mills 联络 A_μ 。手征 Dirac 算符 $\not{D}$ 则替换为

$$\not{D}_F = \gamma^a e_a^\mu(x) (\partial_\mu + \omega_\mu + A_\mu) P^+. \quad (43.133)$$

复形

$$0 \xrightarrow{i} \Gamma(M, E^+ \otimes F) \xrightarrow{\not{D}_F} \Gamma(M, E^- \otimes F) \longrightarrow 0 \quad (43.134)$$

被称为**扭曲 Dirac(旋量) 复形 (twisted Dirac (spin) complex)**。Atiyah-Singer 指标定理应用在扭曲 Dirac 复形产生下面 (43.132) 的推广 (表述而不证明):

$$index \not{D}_F = (-1)^{n/2} \int_M Ch(F) \wedge \hat{A} \quad (43.135)$$

对应 de Rham 和 Dolbeault 复形的扭曲版本, 有下面的结论 (再一次只表述而不证明):

$$index d_F = m \int_M e(TM), \quad m = \dim(F_x) \quad (\text{扭曲 de Rham}), \quad (43.136)$$

$$index \bar{\partial}_F = \int_M Ch(F) \wedge Td(M) \quad (\text{扭曲 Dolbeault}). \quad (43.137)$$

(关于扭曲复形的细节, 见比如 C. Nash, 1991)。最后, 我们提到 Atiyah-Singer 指标定理可

以被推广到 M 有一个边界的情况。这一结果被称为 Atiyah-Patodi-Singer 指标定理。我们将不会在这里展示 (见, 比如 M. Nakahara, 1990)。

44. 辛结构和 Hamilton 力学

微分几何学的概念，特别是微分形式和切和余切束的概念，为经典力学的理论结构提供了深刻的见解，从而促进了许多问题的解决。在本章中，我们将通过对 Hamilton 力学的几何基础进行介绍性讨论来说明这一事实（完整的细节见 V. I. Arnold、A. Weinstein 和 K. Vogtmann, 1989 和 V. I. Arnold、V. V. Kozlov 和 A. I. Neishtadt, 1997）。

考虑一个力学系统由广义坐标 q^i , $i = 1, \dots, n$, 描述，其是系统的**位形空间 (configuration space)**(流形) M 的局域坐标。系统的行为完全由一个函数 $L : TM \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ 给出，其中 TM 是 M 的切丛而 Δ 是时间轴的一个闭区间。 $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ 被称为 **Lagrange 量 (Lagrangian)**，其中 q^i , $\dot{q}^i \equiv dq^i/dt$ 是 TM 的局域坐标。实际上，变分问题的极值（回忆 Chapter 3 的开始的发展）

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (44.1)$$

产生运动的 **Euler-Lagrange 方程 (Euler-Lagrange equations)**：

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (44.2)$$

其解 $q^i(t)$ 给出经典轨迹。在经典力学中，数 $n = \dim(M)$ (位形空间的维度) 被称为力学系统的**自由度 (degrees of freedom)** 的数。

由于 $\dot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \in \Gamma(TM)$ 是 TM 的一个局域截面 (或者 M 上一个局域切向量场)，1-形式 $p_i dq^i$ ，其中

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (44.3)$$

是 T^*M 的一个局域截面。所谓 Lagrange 量的 **Legendre 变换 (Legendre transform)** 由下式给出

$$L(q^i, \dot{q}^i) \longrightarrow H(p_i, q^i) \equiv p_i \dot{q}^i - L, \quad (44.4)$$

其中, 在最后一个表达式中, 所有出现的 $\dot{q}^i$ 通过 (44.3) 替代为 (p_i, q^i) 的函数, 即: $\dot{q}^i = \dot{q}^i(p_i, q^i)$ 。(为了简单期间, 我们考虑 L 不是时间 t 的显式函数)。Legendre 变换因此将 TM ($L: TM \rightarrow \mathbb{R}$) 上的一个函数映射到 T^*M ($H: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$) 上的一个函数。函数 $H(p_i, q^i)$ 被称为力学系统的 **Hamilton 量 (Hamiltonian)**。Hamilton 力学的关键点是在一个力学系统的位形空间 M 的余切丛 T^*M 上存在于一个自然辛结构。让我们先来解释术语“辛结构”的意义, 然后探讨它的一些后果。

定义 44.1 令 N ($\dim(N) = 2n$) 是一个偶数维流形。 N 上一个辛结构 (symplectic structure) 是 N 上一个闭的非简并的 2-形式 ω^2 。 ω^2 被称为 N 上的辛形式 (symplectic form)。因此, 它只被要求满足下面两个性质:

i)

$$d\omega^2 = 0 \quad (\omega^2 \text{ 是闭的}) . \quad (44.5)$$

ii) 令 $\xi \in \Gamma(TN)$ 。如果对于任意 $\eta \in \Gamma(TN)$, 有 $\omega^2(\xi, \eta) = 0$, 则 $\xi = 0$ 。(非简并性) 赋予了一个辛结构的一个流形被称为一个辛流形 (symplectic manifold)。

练习 44.1 说明对于 ω^2 的非简并性的一个等价条件如下: 对于任意 $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(TN)$, 使得对于任意非零 $\eta \in \Gamma(TN)$, 有 $\xi_1 \neq \xi_2$, $\omega^2(\xi_1, \eta) \neq \omega^2(\xi_2, \eta)$ 。

我们将只表述而不证明下面的定理。

定理 44.1 — Darboux 定理 (Darboux's Theorem). 在 $2n$ 维的一个辛流形的每个点的一个邻域中, 存在局域坐标 (p_i, q^i) , $i = 1, \dots, n$, 使得辛结构 ω^2 可以被表述成正则形式

$$\boxed{\omega^2 = dp_i \wedge dq^i} . \quad (44.6)$$

坐标 (p_i, q^i) 被称为辛 (symplectic) 或正则坐标 (canonical coordinates)。

N 上一个辛结构引入一个同构 $\mathcal{I}_x: T_x N \rightarrow T_x^* N$, $x \in N$, 通过下面的法则:

$$\mathcal{I}_x(\xi) = \omega_\xi \in T_x^* N, \quad \xi \in T_x N, \quad (44.7)$$

$$\omega_\xi(\eta) = \omega^2(\eta, \xi), \quad \eta \in T_x N. \quad (44.8)$$

练习 44.2 运用练习 44.1 的结果来说明 ω^2 的非简并性保证了上面定义的 $\mathcal{I}_x$ 是一个同构。

对于每个 $x \in N$, 同构 $\mathcal{I}_x$ 用很明显的方法引出了对应的同构 $\mathcal{I}: \Gamma(TN) \rightarrow \Gamma(T^*N)$ 。假设 H 是 N 上的一个光滑函数。则 $dH \in \Gamma(T^*N)$, 使得 $\mathcal{I}^{-1}(dH) \in \Gamma(TN)$, 即: $\mathcal{I}^{-1}(dH)$ 是 N 上的一个向量场。这样的向量场被称为 **Hamilton 向量场 (Hamiltonian vector fields)**。对应微分方程: 对于 $x \in N$, 有

$$\dot{x} = \mathcal{I}^{-1}(dH) \quad (44.9)$$

被称为 **Hamilton 方程 (Hamilton's equations)**。(在这个方程中, $\dot{x} = dx/dt$)。

定义 44.2 令 F 和 G 是具有辛形式 ω^2 的一个辛流形 N 上的光滑函数。则

$$\{F, G\} \equiv \omega^2(\mathcal{I}^{-1}(dG), \mathcal{I}^{-1}(dF)) \quad (44.10)$$

是 N 上一个光滑函数，称为函数 F 和 G 的 **Poisson 括号 (Poisson bracket)**。

定理 44.2 *Poisson* 括号 $\{, \}$ 是双线性且非简并的。非简并性意味着如果 $x \in N$ 不是 F 的一个临界点 (*critical point*)，即：如果 $F(x) \neq 0$ ，则存在一个光滑非零函数 G 使得 $\{F, G\}(x) \neq 0$ 。进一步， $\{, \}$ 满足下面形式：

$$1) \quad \{F, G\} = -\{G, F\} \quad (\text{反对称}), \quad (44.11)$$

$$2) \quad \{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + F_2 \{F_1, G\} \quad (\text{Leibnitz 法则}), \quad (44.12)$$

$$3) \quad \{\{H, F\}, G\} + \{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} = 0 \quad (\text{Jacobi 恒等式}). \quad (44.13)$$

因此，一个辛流形上的光滑函数的集合构成 *Poisson* 括号下 (作为内积) 的 *Lie* 代数。

练习 44.3 证明上面的定理。

通过 (44.7) 和 (44.8)，(44.10) 定义的 *Poisson* 括号也可以被写成 [通过在 (44.10) 中替换 G 为 H]

$$\{F, H\} = dF(\mathcal{I}^{-1}(dH)). \quad (44.14)$$

使用辛坐标 (p_i, q^i) ，我们可以写 Hamilton 向量场 $\mathcal{I}^{-1}(dH)$ 为

$$\mathcal{I}^{-1}(dH) = \sum_{i=1}^n \left(\dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} \right). \quad (44.15)$$

记

$$dF = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F}{\partial q^i} dq^i \right), \quad (44.16)$$

我们有

$$dF(\mathcal{I}^{-1}(dH)) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i \right) = \dot{F}. \quad (44.17)$$

从 (44.14) 得到对于 Hamilton 向量场 $\mathcal{I}^{-1}(dH)$ 的

$$\dot{F} = \{F, H\}. \quad (44.18)$$

特别地，我们有下面的方程组，称为 **Hamilton 正则方程 (Hamilton's canonical equations)**，它们的解给出了 Hamilton 向量场 $\mathcal{I}^{-1}(dH)$ 的积分曲线：

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad \dot{q}^i = \{q^i, H\}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (44.19)$$

让我们现在用辛坐标 (p_i, q^i) 来表述 *Poisson* 括号。假设 $\xi, \eta \in \Gamma(TN)$ 依赖于自然标架场 (用

辛坐标) 被表述为:

$$\xi = \sum_{i=1}^n \left(\xi_{p_i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \xi_{q^i} \frac{\partial}{\partial q^i} \right) = (\xi_{p_i}, \xi_{q^i}) , \quad (44.20)$$

$$\eta = \sum_{i=1}^n \left(\eta_{p_i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \eta_{q^i} \frac{\partial}{\partial q^i} \right) = (\eta_{p_i}, \eta_{q^i}) . \quad (44.21)$$

则, 从 (44.8), 有

$$\begin{aligned} \omega_\xi(\eta) &= \omega^2(\eta, \xi) = \left(\sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq^j \right) (\eta, \xi) \\ &= \sum_{j=1}^n [(dp_j \wedge dq^j) (\eta, \xi)] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} dp_j(\eta) & dp_j(\xi) \\ dq^j(\eta) & dq^j(\xi) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} \eta_{p_j} & \xi_{p_j} \\ \eta_{q^j} & \xi_{q^j} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\eta_{p_j} \xi_{q^j} - \xi_{p_j} \eta_{q^j}) , \end{aligned} \quad (44.22)$$

其中在第四个等号处, 我们对外积运用了估计公式 [(28.14)]. 1-形式 ω_ξ 则可以被写成

$$\omega_\xi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (\xi_{q^j} dp_j - \xi_{p_j} dq^j) , \quad (44.23)$$

使得同构 $\xi \mapsto \omega_\xi$ 可以用矩阵符号被写成

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_{q^j} \\ -\xi_{p_j} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{p_j} \\ \xi_{q^j} \end{pmatrix} , \quad (44.24)$$

注意到在上面的方程中列矩阵为 $2n \times 1$ 矩阵, 而方阵中的每一项是 $n \times n$ 矩阵. $\mathcal{I}$ 的矩阵表示 (依赖于辛坐标) 因此是

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (44.25)$$

从中, 我们有

$$\mathcal{I}^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (44.26)$$

现在记

$$dF = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial F}{\partial q^i} dq^i \right) , \quad (44.27)$$

$$dG = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial G}{\partial q^i} dq^i \right) . \quad (44.28)$$

对于 $\mathcal{I}^{-1}[(44.26)]$ 的显式表达式则给出

$$\mathcal{I}^{-1}(dF) = 2 \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} \right) , \quad (44.29)$$

$$\mathcal{I}^{-1}(dG) = 2 \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} \right). \quad (44.30)$$

再次运用 (44.10) 和 (28.14) 最后产生下面关于 Poisson 括号的标准公式:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right). \quad (44.31)$$

有了上面的公式, Hamilton 正则方程出现为它们的常规形式如下:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (44.32)$$

我们现在回到经典力学的设定, 其中我们有一个 n 维位形空间 M , 具有局域坐标 q^i , $i = 1, \dots, n$ (Lagrange 力学的广义坐标). (p_i, q^i) [(44.3) 定义的 p_i] 则对于 T^*M (位形空间的余切丛) 作为局域坐标. 记住如果 $\dim(M) = n$, 则 $\dim(T^*M) = \dim(TM) = 2n$. 在 T^*M 上我们有良好定义的 1-形式

$$\omega = p_i dq^i. \quad (44.33)$$

在 T^*M 上定义一个 2-形式为

$$\omega^2 \equiv d\omega = dp_i \wedge dq^i. \quad (44.34)$$

这个 2-形式显然是闭的并且也是非简并的. 因此, 它是 T^*M 上一个良好定义的辛形式, 而 T^*M 自然是一个辛流形. 在经典力学中, T^*M 被称为位形空间 M 的相空间 (phase space).

练习 44.4 说明由 (44.34) 定义在 T^*M 上的 2-形式 ω^2 是非简并的.

让我们现在用 M 上微分同胚的单变量群的概念 (c.f. 定义 34.6 之后的讨论) 更仔细地考虑形式为 (44.9) 的 Hamilton 方程. 对应于一个 Hamilton 函数 H 的向量场 $\mathcal{I}^{-1}(dH)$ 给出了微分同胚的单变量群 $g_t : T^*M \rightarrow T^*M$ 定义为

$$\left. \frac{d}{dt} g_t(x) \right|_{t=0} = (\mathcal{I}^{-1}(dH))(x), \quad x \in T^*M. \quad (44.35)$$

微分同胚的单变量群 g_t (由时间 t 作为参数) 被称为 Hamilton 函数 H 的 **Hamilton 相流 (Hamilton phase flow)**. 我们将只表述下面的重要定理而不证明.

定理 44.3 Hamilton 相流 g_t 保持辛结构:

$$(g_t)^* \omega^2 = \omega^2, \quad (44.36)$$

或等价地, 在 Hamilton 相流下辛结构是不变的.

下面概念在相流的研究中起着至关重要的作用.

定义 44.3 如果对于 T^*M 中任意闭 k -链 (圆) C 有

$$\int_{g_t C} \omega = \int_C \omega \quad (44.37)$$

则 T^*M 上一个微分 k -形式 ω 被称为相流 g_t 的一个**相对积分不变量** (*relative integral invariant*)。

定义 44.4 如果对于 T^*M 中的任意 k -链都满足 (44.37), 则 T^*M 上一个微分 k -形式 ω 被称为一个相流 g_t 的**绝对积分不变量** (*absolute integral invariant*)。

我们有下面有用的定理。

定理 44.4 如果 ω 是 g_t 的一个相对积分不变量, 则 $d\omega$ 是 g_t 的一个积分不变量。

证明: 令 C 是 T^*M 中一个 $(k+1)$ -链, 而 ω 是 g_t 的一个相对积分不变量。则通过 Stokes 定理, 有

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega = \int_{g_t(\partial C)} \omega = \int_{\partial(g_t C)} \omega = \int_{g_t C} d\omega . \quad (44.38)$$

从定义 44.4 得证此定理。 $\square$

定理 44.5 T^*M 上一个 k -形式 ω 是 g_t 的一个积分不变量, 当且仅当

$$g_t^* \omega = \omega . \quad (44.39)$$

证明: 假设 $g_t^* \omega = \omega$, 而 C 是 T^*M 中一个 k -链。则

$$\int_{g_t C} \omega = \int_C g_t^* \omega = \int_C \omega , \quad (44.40)$$

其中第一个等号来自于 (32.29)。因此, ω 是 g_t 的一个积分不变量。反之, 假设 ω 是 g_t 的一个积分不变量。则对于 T^*M 中任意 k -链 C , 有

$$\int_C g_t^* \omega = \int_{g_t C} \omega = \int_C \omega , \quad (44.41)$$

其中第一个等号来自于 (32.29) 而第二个等号来自于假设。由于 C 是一个任意 k -链, 因此 $g_t^* \omega = \omega$ 。 $\square$

推论 44.1 T^*M 上的辛形式 ω^2 是 Hamilton 相流 g_t 的一个积分不变量。

证明: 这是定理 44.3 和定理 44.5 的一个直接结果。 $\square$

下面的定理将只表述而不证明。

定理 44.6 如果 ω 和 ω' 都是相流 g_t 的积分不变量, 则 $\omega \wedge \omega'$ 也是 g_t 的一个积分不变量。

这个定理允许我们建立 g_t 一系列积分不变量, 从辛形式 ω^2 开始:

$$\omega^2, \omega^2 \wedge \omega^2, (\omega^2)^3, \dots, (\omega^2)^n .$$

形式

$$(\omega^2)^n = \underbrace{\omega^2 \wedge \dots \wedge \omega^2}_{n \uparrow} \quad (44.42)$$

是 T^*M 上的一个顶-形式并且可以被用来定义 T^*M 中一个体积元素。由于它是一个积分不

变量, 我们获得下面的定理。

定理 44.7 — Liouville 定理 (Liouville's Theorem). *Hamilton 相流保持相空间中的体积。*

在求解运动的 Hamilton 方程的过程中, 一个基本工具是所谓的相空间中正则坐标 (p_i, q^i) 的**正则变换 (canonical transformations)**。在本书中, 我们无法深入探讨这种技术的细节, 以及它在强大的 Hamilton-Jacobi 理论中的应用。最后, 我们将简单地给出与正则变换的一个集合相关的一个正则映射的定义。

定义 44.5 一个映射 $\phi: T^*M \rightarrow T^*M$ 被称为是**正则的 (canonical)**, 如果辛形式 ω^2 在 ϕ^* 下是不变的, 即:

$$\phi^* \omega^2 = \omega^2. \quad (44.43)$$

通过定理 44.5, $\phi: T^*M \rightarrow T^*M$ 是正则的, 如果 ω^2 是 ϕ 下的一个积分不变量:

$$\int_C \omega^2 = \int_{\phi(C)} \omega^2 \quad (44.44)$$

对于 T^*M 中任意 2-链。表述 (44.43) 的另一种方式是一个正则映射 ϕ 保持辛 2-形式:

$$\omega^2 = dp_i \wedge dq^i = dP_i \wedge dQ^i, \quad (44.45)$$

如果 ϕ 将 (p_i, q^i) 映射到 (P_i, Q^i) 。因此

$$d(p_i dq^i) = d(P_i dQ^i), \quad (44.46)$$

这意味着: 对于一些光滑函数 $S(p_i, q^i)$, 有

$$\boxed{p_i dq^i - P_i dQ^i = dS}. \quad (44.47)$$

很容易看到 (44.47) 给出了一个正则变换的等价定义。更进一步, 如果 γ 是 T^*M 中一个闭曲线可收缩到一个点, 则 $\partial\gamma = 0$, 并且通过 Stokes 定理, 有

$$\oint_{\gamma} p_i dq^i = \oint_{\gamma} P_i dQ^i = \oint_{\phi(\gamma)} p_i dq^i. \quad (44.48)$$

因此, $p_i dq^i$ 是一个正则映射下的一个相关积分不变量 (在 T^*M 的一个单连通区域中)。最后从 (44.10) 显然有 Poisson 括号在正则变换下保持:

$$\{F, G\}_{P, Q} = \{F, G\}_{p, q}. \quad (44.49)$$

作为一个结果, Hamilton 方程 $\dot{F} = \{F, H\}$ 在正则变换下也是不变的。Hamilton-Jacobi 方法的主要思想是寻找正则坐标 (p_i, q^i) 的原始集合上的正则变换, 使得在新的坐标 (P_i, Q^i) 上, Hamilton 也是容易可积的。

