

Morse 理论

基于 M. Spivak 和 R. Wells 的课程笔记

John Willard Milnor

普林斯顿大学出版社

前言

本书对 Marston Morse 的大变分理论进行了当代阐释。然而近几年的重要进展并未提及。以下将介绍其中三项：R. Palais 与 S. Smale 研究了无限维流形上实值函数的 Morse 理论，并给出了主要定理的直接证明，全程未使用有限维逼近。相关流形需在局部意义上与 Hilbert 空间微分同胚，且函数须满足弱紧性条件。以有限维流形 M 上的路径研究为例：可考虑由所有绝对连续路径 $\omega : [0, 1] \rightarrow M$ 组成的 Hilbert 流形，这些路径需满足平方可积的一阶导数条件。相关论述详见 [1] 与 [2]。

Bott 周期性定理最初受到 Morse 理论的启发（参见第四章）。然而，近期已给出更基础的证明，这些证明完全不涉及 Morse 理论。详见 [3] 及 [4]。

Morse 理论为 S. Smale、A. Wallace 等人推动微分拓扑学取得激动人心的进展提供了灵感，其中包括对高维广义 Poincaré 猜想的证明。我在 [5] 中尝试描述了部分相关研究成果。

请允许我借此机会澄清一个可能引起混淆的术语。在第 12 节中，我使用“能量”一词表示沿路径 $\omega(t)$ 的积分

$$E = \int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt.$$

V. Arnol'd 向我指出，过去 200 年来数学家们将该积分称为“作用量”积分。这种术语差异源于该积分在物理模型中可作多重解释的事实。

考虑一个粒子 P 在时间间隔 $0 \leq t \leq 1$ 内沿着一个曲面 M 运动。粒子在此时间间隔内的**作用量 (action)** 定义为一个常数乘以积分 E 。若无外力作用于 P （除将其限制在 M 内的约束力外），则“最小作用量原理”断言：在连接 $\omega(0)$ 与 $\omega(1)$ 的所有路径类中， E 将被最小化，或至少 E 的第一变分将为零。因此 P 必须沿测地线运动。但截然不同的物理模型是可能的。考虑一根橡皮筋横跨光滑曲面两点。若用参数方程 $x = \omega(t)$ ， $0 \leq t \leq 1$ 描述该橡皮筋，则张力产生的势能将与我们的积分 E 成正比（至少在一阶近似下成立）。在平衡位置处，该能量必须最小化，因此橡皮筋将描绘一条测地线。

下文除若干处修正外，与初版内容完全一致。谨向 V. Arnol'd、D. Epstein 和 Jr. W. B. Houston 指出修正之处表示感谢。

J. W. Milnor
洛杉矶，1968 年 7 月

目录

第一章 流形上的非退化光滑函数	1
§ 1. 引论	1
§ 2. 一些定义和引理	3
§ 3. 用临界值刻画流形的同伦型	8
§ 4. 例子	16
§ 5. Morse 不等式	17
§ 6. Euclid 空间中的流形	19
§ 7. 超平面截面上的 Lefschetz 定理	23
第二章 Riemann 几何概要	26
§ 8. 协变微分	26
§ 9. 曲率张量	26
§ 10. 测地线与完备性	26
第三章 对变分学的应用：测地线	27
§ 11. 光滑流形的道路空间	27
§ 12. 道路的能量	27
§ 13. 能量函数在临界道路处的 Hesse 泛函	27
§ 14. Jacobi 场, E_{**} 的零化子空间	27
§ 15. 指标定理	27
§ 16. Ω^c 的有限维逼近	27
§ 17. 全道路空间的拓扑结构	27
§ 18. 非共轭点的存在性	27
§ 19. 拓扑结构与曲率的某些关系	27
第四章 对 Lie 群和对称空间的应用	28
§ 20. 对称空间	28
§ 21. Lie 群是对称空间	28
§ 22. 极小测地线组成的全流形	28
§ 23. Bott 关于么正群的周期性定理	28
§ 24. 正交群的周期性定理	28
附录 A 单调的并同伦型	29

第一章 流形上的非退化光滑函数

§ 1. 引论

在本节中，我们将通过一个具体实例说明后续将针对任意流形进行研究的情况。让我们考虑一个环面 M ，其切于平面 V ，如图 1.1 所示。

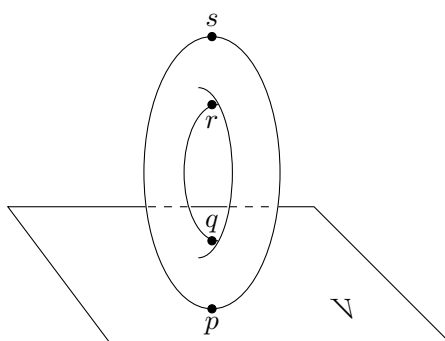
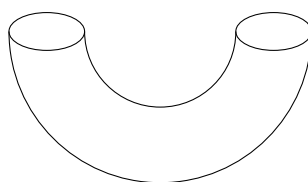


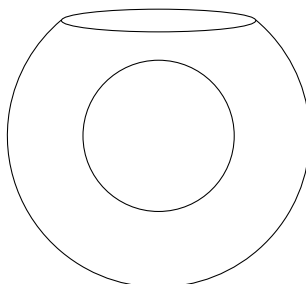
图 1.1

令 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ 总表示实数) 是平面 V 上的高度，并令 M^a 为使得 $f(x) < a$ 的所有点 $x \in M$ 的集合。则下列事情为真：

- (1) 如果 $a < 0 = f(p)$ ，则 M^a 是空集。
- (2) 如果 $f(p) < a < f(q)$ ，则 M^a 同胚于一个 2 维胞腔。
- (3) 如果 $f(q) < a < f(r)$ ，则 M^a 同胚于圆柱面：



- (4) 如果 $f(r) < a < f(s)$ ，则 M^a 同胚于一个具有圆形边界亏格为 1 的紧致流形：



(5) 如果 $f(s) < a$, 则 M^a 是整个环面。

为了描述当 a 通过 $f(p), f(q), f(r), f(s)$ 其中一点时 M^a 中发生的变化, 考虑同伦型要比考虑同胚型更方便。就同伦型而言:

(1)→(2) 的变化是粘合一个 0 维胞腔的运算。因为, 就同伦型而言, 当 $f(p) < a < f(q)$ 时, 空间 M^a 同一个 0 维胞腔毫无区别:

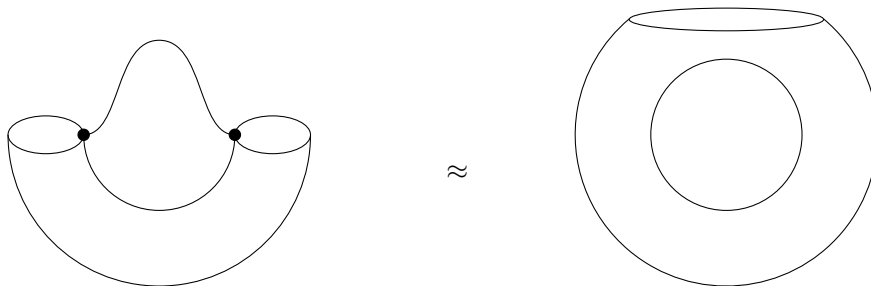


这里 “ $\approx$ ” 表示 “具有相同的同伦型”。

(2)→(3) 的变化是粘合一个 1 维胞腔的运算:



(3)→(4) 的变化仍然是粘合一个 1 维胞腔的运算:



(4)→(5) 的变化是粘合一个 2 维胞腔的运算。

“粘合一个 k 维胞腔” 的明确定义可以如下给出。令 Y 为任意拓扑空间, 并且令

$$e^k = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq 1\},$$

是 k 维胞腔, 由 k 维 Euclid 空间中长度 ≤ 1 的所有向量组成。

边界

$$\dot{e}^k = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| = 1\},$$

记为 S^{k-1} 。如果 $g: S^{k-1} \rightarrow Y$ 是一个连续映射, 则首先通过取 Y 和 e^k 的拓扑和 (= 不交并), 然后把每个 $x \in S^{k-1}$ 和 $g(x) \in Y$ 一样来获得

$$Y \cup_g e^k,$$

(用 g 粘合 Y 和 k 维胞腔 e^k)。就 $k=0$ 的情形而言, 令 e^0 是一个点, 并且令 $\dot{e}^0 = S^{-1}$ 是空集, 所以 Y 和一个 0 维胞腔粘合起来, 不过就是 Y 和一个不交点的并。

正如我们可能想到, M^a 的同伦型发生变化的各点 p, q, r 和 s 的特性可以借助于函数 f 加以简单地刻画。这些点是函数的**临界点 (critical point)**: 如果我们在这些点的附近选择任意坐标系 (x, y) , 则导数 $\partial f / \partial x$ 和 $\partial f / \partial y$ 都为零。在 p 处, 我们可以选择 (x, y) 使得 $f = x^2 + y^2$, 在 s 处使得 $f = \text{常数} - x^2 - y^2$, 并且在 q 和 r 使得 $f = \text{常数} + x^2 - y^2$ 。注意到在每一点处, f 的表达式

中负号的个数，正好就是从 M^a 到 M^b 时必须粘合的胞腔的维数，这里 $a < f(\text{所考虑的点}) < b$ 。我们的首先几个定理将把这些事实推广到流形上任意可微函数。

对于有关 Morse 理论的进一步信息，下面的材料极为有用：[6], [7], [8], [9]。

§ 2. 一些定义和引理

词汇“光滑”和“可微”交替地用来表示 C^∞ 可微。光滑流形 M 在点 p 处的切空间记为 TM_p 。如果 $g: M \rightarrow N$ 是一个光滑映射， $g(p) = q$ ，则 g 在切空间的诱导线性映射记为 $g_*: TM_p \rightarrow TN_q$ 。

现在令 f 是流形 M 上一个光滑实值函数。点 $p \in M$ 被称为 f 的**临界点 (critical point)**，如果诱导映射 $f_*: TM_p \rightarrow T\mathbb{R}_{f(p)}$ 是零映射。如果在点 p 的领域 U 中选取局域坐标系 $(x^1, \dots, x^n)$ ，则

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(p) = \dots = \frac{\partial}{\partial x^n}(p) = 0.$$

实数 $f(p)$ 称为 f 的**临界值 (critical value)**。

我们用 M^a 表示使得 $f(x) \leq a$ 的所有点 $x \in M$ 的集合。如果 a 不是 f 的一个临界值，则从隐函数定理可得 M^a 是一个有边界的光滑流形。边界 $f^{-1}(a)$ 是 M 的光滑子流形。

一个临界点 p 被称为**非退化的 (non-degenerate)**，当且仅当矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right)$$

是非奇异的。可以直接验证：非退化性不依赖于坐标系的选择。这一点也可以从下面内禀性定义得出。

如果 p 是 f 的临界点，我们定义 TM_p 上的一个对称双线性泛函 f_{**} ，称为 f 在点 p 处的**Hesse 泛函 (Hessian)**。若 $v, w \in TM_p$ ，则 v 和 w 可以扩张为向量场 $\tilde{v}$ 和 $\tilde{w}$ 。我们令¹ $f_{**}(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f))$ ，其中 $\tilde{v}_p$ 当然就是 v 。我们必须说明这是对称且良定义的。它是对称的因为

$$\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) - \tilde{w}_p(\tilde{v}(f)) = [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0,$$

其中， $[\tilde{v}, \tilde{w}]$ 是 $\tilde{v}$ 和 $\tilde{w}$ 的 Poisson 括号，而 $[\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0$ 是由于 p 是 f 的临界点。

因此， f_{**} 是对称的。现在它显然是良定义的因为 $\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) = v_p(\tilde{w}(f))$ 独立于 v 的扩张 $\tilde{v}$ ，而 $\tilde{w}_p(\tilde{v}(f))$ 独立于 $\tilde{w}$ 。

如果 $(x_1, \dots, x_n)$ 是一个局部坐标系且 $v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ ， $w = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ ，我们可以取 $\tilde{w} = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ ，其中 b_j 现在记为一个常值函数。于是

$$f_{**}(v, w) = v(\tilde{w}(f))(p) = v \left(\sum b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) (p) = \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p);$$

所以矩阵 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right)$ 是双线性泛函 f_{**} 在 $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$ 这组基下的表示。

我们现在可以讨论 TM_p 上双线性泛函 f_{**} 的**指标 (index)** 和**零化数 (nullity)**。在一个向量空间 V 上，双线性泛函 H 的指标 (index) 被定义为 V 的一个子空间（在其上 H 是负定的）的最大维数；**零化数 (nullity)** 是**零化子空间 (null-space)** 的维度，而零化子空间，即：包括所有 $v \in V$ 使得对于每个 $w \in V$ 都有 $H(v, w) = 0$ 的子空间。显然，点 p 是 f 的一个非退化临界点当且仅当 f_{**} 在 TM_p 上有零化数且为零。 f_{**} 在 TM_p 上的指标将被简称为 f 在 p 处的指标。Morse 的引理表明： f 在点 p 处的行为可以完全由这个指标刻画。在表述这个引理之前，我们首先证明下面：

¹这里 $\tilde{w}(f)$ 表示 f 在方向 $\tilde{w}$ 上的方向导数。

引理 2.1. 令 f 是 $\mathbb{R}^n$ 中 0 的一个凸邻域 V 中的一个 C^∞ 函数, 使得 $f(0) = 0$ 。则

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

对于某些定义在 V 中的适当的 C^∞ 函数 g_i , 使得 $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ 。

证明:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_i dt.$$

因此我们可以令

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

□

引理 2.2 (Morse 引理). 令 p 是 f 的一个非退化临界点。则 p 的一个邻域 U 中存在一个局部坐标系 $(y^1, \dots, y^n)$, 使得对于所有 i 有 $y^i(p) = 0$, 并且使得恒等式

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

在 U 中都成立, 其中 λ 是 f 在 p 处的指标。证明: 我们首先证明: 如果对于 f 存在任何一个这样的表达式, λ 都一定是 f 在点 p 处的指标。对于任意坐标系 $(z^1, \dots, z^n)$, 如果

$$f(q) = f(p) - (z^1(q))^2 - \dots - (z^\lambda(q))^2 + (z^{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (z^n(q))^2$$

则我们有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j}(p) = \begin{cases} -2 & \text{if } i = j \leq \lambda, \\ 2 & \text{if } i = j > \lambda, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

这说明 f_{**} 在 $\left. \frac{\partial}{\partial z^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial z^n} \right|_p$ 这组基下的矩阵表示是

$$\begin{pmatrix} -2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

因此存在 TM_p 的一个 λ 维子空间, 使得 f_{**} 为负定, 并且存在一个 $n - \lambda$ 维子空间 V , 使得 f_{**} 为正定。如果存在 TM_p 的一个子空间, 其维数大于 λ , 使得在这个子空间上的 f_{**} 为负定, 那么这个空间就会与 V 相交, 这显然是不可能的, 因此 λ 是 f_{**} 的指标。

我们现在来说明这样一个合适坐标系 $(y^1, \dots, y^n)$ 存在。显然, 我们可以假设 p 是 $\mathbb{R}^n$ 的原点并且 $f(p) = f(0) = 0$ 。通过引理 2.1, 我们可以写

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j g_j(x_1, \dots, x_n)$$

其中, $(x_1, \dots, x_2)$ 在原点 0 的某个领域中。由于点 0 被假设为一个临界点:

$$g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = 0.$$

因此, 应用引理 2.1 于 g_j , 我们有

$$g_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

其中, h_{ij} 是某些确定的光滑函数, 从而

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n).$$

我们可以假设 $h_{ij} = h_{ji}$, 因为我们可以记 $\bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, 则有 $\bar{h}_{ij} = \bar{h}_{ji}$, 并且 $f = \sum x_i x_j \bar{h}_{ij}$ 。此外, 矩阵 $(\bar{h}_{ij}(0))$ 等于 $\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$, 并且因此是非奇异的。

于是, 存在一个非奇异坐标变换, 使得 f 在原点 0 的某个可能更小的邻域中有所要的表达式。要看出这点我们可以完全仿照对二次型一般对角化的证明 (例如见 [10])。关键的一步描述如下:

用归纳法, 假设在 0 的某个邻域 U_1 中, 存在坐标系 $(u_1, \dots, u_n)$, 使得在整个 U_1 中

$$f = \pm(u_1)^2 \pm \dots \pm (u_{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j H_{ij}(u_1, \dots, u_n);$$

其中, 矩阵 $(H_{ij}(u_1, \dots, u_n))$ 是对称的。对最后 $n - r + 1$ 个坐标进行线性变换后, 我们可以假设 $H_{rr}(0) \neq 0$ 。记 $g(u_1, \dots, u_n)$ 为 $|H_{rr}(u_1, \dots, u_n)|$ 的平方根。它在 0 的某些更小的邻域 $U_2 \subset U_1$ 中是 $u_1, \dots, u_n$ 的非零光滑函数。现在引入新坐标 $v_1, \dots, v_n$ 如下:

$$v_i = u_i, \text{ 如果 } i \neq r, \\ v_r(u_1, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u_n) \left[u_r + \sum_{i>r} u_i \frac{H_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{H_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right].$$

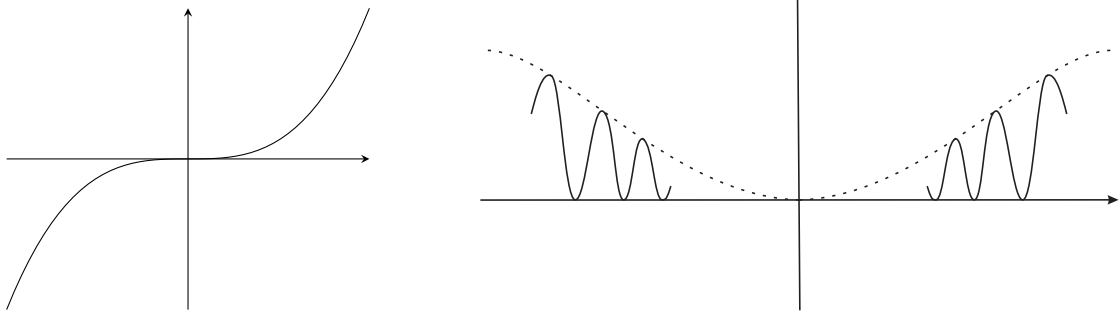
从反函数定理可以得到, 在 0 的某个充分小的邻域 U_3 中, $v_1, \dots, v_n$ 可以取作坐标函数。容易验证, 在整个 U_3 中, f 可以表述为

$$f = \sum_{i \leq r} \pm (v_i)^2 + \sum_{i,j > r} v_i v_j H'_{ij}(v_1, \dots, v_n).$$

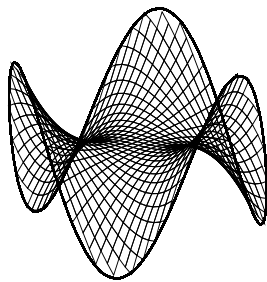
这完成了归纳证明; 并证明了引理 2.2。 □

推论 2.3. 非退化临界点是孤立的。

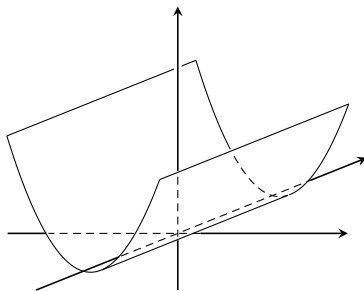
下面给出退化临界点 (对于 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^2$ 的函数) 的一些例子, 以及它们的图示。



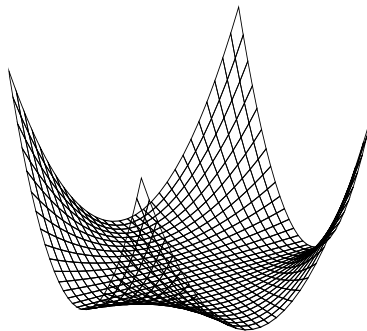
(a) $f(x) = x^3$ 。原点是退化的临界点。 (b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ 。原点是退化的非孤立临界点。



(c) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 = (x + iy)^3$ 的实部。原点 $(0, 0)$ 是退化的临界点 (“猴鞍点”)。



(d) $f(x, y) = x^2$ 。临界点集是 y 轴，它是 $\mathbb{R}^2$ 的子流形。临界点全是退化的。



(e) $f(x, y) = x^2y^2$ 。临界点全是退化的。临界点集是 x 轴和 y 轴的并，不是 $\mathbb{R}^2$ 的子流形。在结束本节之前，让我们来讨论单参数微分同胚群。想要深究的读者可以参考 K. Nomizu 的 Lie Groups and Differential Geometry。

流形 M 的单参数微分同胚群是一个 C^∞ 映射

$$\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M,$$

使得

- (1) 对于每个 $t \in \mathbb{R}$ ，由 $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$ 定义的映射 $\varphi_t : M \rightarrow M$ ，是一个把 M 映成自己的微分同胚。
- (2) 对于所有 $t, s \in \mathbb{R}$ ，有 $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ 。

给定 M 的一个单参数微分同胚群 φ ，我们可以定义 M 上的一个向量场 X 如下：对于每个光滑实值函数 f ，令

$$X_q(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(q)) - f(q)}{h}$$

这个向量场 X 被称为产生 (generate) 群 φ 。

引理 2.4. 如果 M 上的光滑向量场 X 在一个紧致集 $K \subset M$ 之外为零, 则 X 产生 M 的唯一一个单参数微分同胚群 φ 。

证明: 给定任意光滑曲线

$$t \mapsto c(t) \in M$$

我们定义它的**速度向量 (velocity vector)**

$$\frac{dc}{dt} \in TM_{c(t)}$$

为

$$\frac{dc}{dt}(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c(t+h)) - f(c(t))}{h}$$

(与第8节比较)。现在假设 φ 是一个单参数微分同胚群, 由向量场 X 所产生。则对于每个确定的 q , 曲线

$$t \mapsto \varphi_t(q)$$

满足微分方程

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt} = X_{\varphi_t(q)}$$

以及初始条件 $\varphi_0(q) = q$ 。这是真的因为

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt}(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_{t+h}(q)) - f(\varphi_t(q))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(p)) - f(p)}{h} = X_p(f),$$

其中 $p = \varphi_t(q)$ 。但是, 大家知道这样一个微分方程, 局部有唯一解, 光滑依赖于初始条件。(见 [11], 第 166 页。注意到, 这个微分方程可以使用局部坐标 $u^1, \dots, u^n$ 改写为比较熟悉的形式: $\frac{du^i}{dt} = x^i(u^1, \dots, u^n)$, $i = 1, \dots, n$ 。)

因此对于 M 的每个点, 存在一个邻域 U 和一个数 $\varepsilon > 0$, 使得当 $q \in U$, $|t| < \varepsilon$ 时, 微分方程

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt} = X_{\varphi_t(q)}, \quad \varphi_0(q) = q$$

具有唯一光滑解。

紧致集 K 可以用有限多个这样的邻域 U 覆盖。令 $\varepsilon_0 > 0$ 表示对应数 ε 中最小的数。对于 $q \notin K$, 令 $\varphi_t(q) = q$, 则对于 $|t| < \varepsilon_0$ 和对于所有 $q \in M$, 这个微分方程具有唯一解 $\varphi_t(q)$ 。这个解作为双变量函数是光滑的。此外, 如果 $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon_0$, 显然有 $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ 。因此, 每个这样的 φ_t 都是一个微分同胚。

现在只剩下对 $|t| \geq \varepsilon_0$, 定义 ε_t 。任意数 t 可以表示成 $\frac{\varepsilon_0}{2}$ 的倍数再加上一个余数 r , 其中 $|r| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ 。如果 $t = k\frac{\varepsilon_0}{2} + r$, $k \geq 0$, 则令

$$\varphi_t = \varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \cdots \circ \varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \varphi_r,$$

其中 $\varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ 重复变换 k 次。如果 $k < 0$, 只需用 $\varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ 代替 $\varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$ 并重复 $-k$ 次即可, 因此 φ_t 对 t 的所有值是有定义的。不难验证, φ_t 是良定义的、光滑的, 并且满足条件 $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ 。这样就完成了对引理 2.4 的证明。□

注. 假设 X 的一个紧致集之外为零不能忽略。举例而言, 令 M 是单位开区间 $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, 并且令 X 是 M 上的标准向量场 $\frac{d}{dt}$, 则 X 不产生 M 的任何单参数微分同胚群。

§ 3. 用临界值刻画流形的同伦型

在这一整节里, 如果 f 是流形 M 上的实值函数, 则令

$$M^a = f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M : f(p) \leq a\}.$$

定理 3.1. 令 f 是流形 M 上的光滑实值函数。令 $a < b$ 并且假设集合 $f^{-1}[a, b] = \{p \in M : a \leq f(p) \leq b\}$ 是紧致集, 不含 f 的临界点, 则 M^a 微分同胚于 M^b 。此外, M^a 是 M^b 的形变收缩核, 所以包含映射 $M^a \rightarrow M^b$ 是一个同伦等价。

证明: 证明的思想在于沿着超曲面 $f = \text{常数}$ 的正交轨道把 M^b 向下推到 M^a (见图 3.1)。

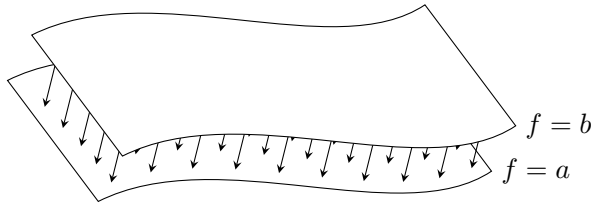


图 3.1

在 M 上选择一个 Riemann 度规; 并令 $\langle x, y \rangle$ 表示两个切向量的内积, 由这个度规所确定。 f 的**梯度 (gradient)** 是 M 上的向量场 $\text{grad}f$, 由下面这个恒等式²完全描述: 对于任意向量场 X ,

$$\langle X, \text{grad}f \rangle = X(f)$$

($= f$ 沿着 X 的方向导数)。向量场 $\text{grad}f$ 在 f 的临界点正好为零。如果 $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ 是一条曲线, 其速度向量为 $\frac{dc}{dt}$, 则有恒等式

$$\left\langle \frac{dc}{dt}, \text{grad}f \right\rangle = \frac{d(f \circ c)}{dt}.$$

现在令 $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑函数, 在整个紧致集 $f^{-1}[a, b]$ 上 $\frac{1}{\langle \text{grad}f, \text{grad}f \rangle}$; 而在这个集合的某个紧致领域之外为零。于是, 由

$$X_q = \rho(q)(\text{grad}f)_q$$

定义的向量场 X 满足引理 2.4 的条件。因此, X 产生的一个单参数微分同胚群

$$\varphi_t: M \rightarrow M.$$

对于确定的 $q \in M$, 考虑函数 $t \rightarrow f(\varphi_t(q))$ 。如果 $\varphi_t(q)$ 位于集合 $f^{-1}[a, b]$, 则

$$\frac{f(\varphi_t(q))}{dt} = \left\langle \frac{d\varphi_t(q)}{dt}, \text{grad}f \right\rangle = \langle X, \text{grad}f \rangle = +1.$$

因此, 只要 $f(\varphi_t(q))$ 在 a 和 b 之间, 则对应关系

$$t \mapsto f(\varphi_t(q))$$

是线性的, 并且导数为 $+1$ 。

²用经典记号, 使用局部坐标 $u^1, \dots, u^n$, 梯度向量的分量为 $\sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u^j}$ 。

现在考虑微分同胚 $\varphi_{b-a} : M \rightarrow M$ 。显然，这个映射把 M^a 微分同胚地映射成 M^b 。这就证明了定理 3.1 的前一半。

定义一个单参数映射族

$$r_t : M^b \rightarrow M^b$$

为

$$r_t(q) = \begin{cases} q, & \text{如果 } f(q) \leq a, \\ \varphi_{t(a-f(q))}(q), & \text{如果 } a \leq f(q) \leq b. \end{cases}$$

则 r_0 是恒等映射，而 r_1 是从 M^b 到 M^a 的收缩映射。因此， M^a 是 M^b 的一个收缩核。这完成了证明。 $\square$

注. $f^{-1}[a, b]$ 是紧致的这个条件不能忽略。举例来说，图 3.2 表示这个集合不是紧致的情况，其中流形 M 不含点 p 。显然， M^a 不是 M^b 的形变收缩核。

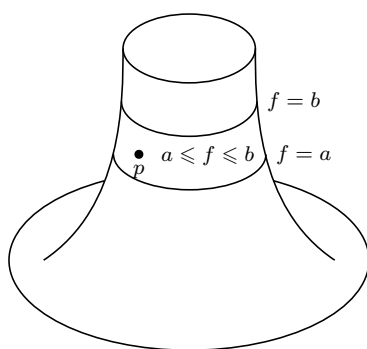


图 3.2

定理 3.2. 令 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑函数，并令 p 是一个其指标为 λ 的非退化临界点。设 $f(p) = c$ ，对于一些 $\varepsilon > 0$ ，假设集合 $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ 是紧致的，并且除了点 p 以外不再含有 f 的其它临界点。则对于足够小的 ε ，集合 $M^{c+\varepsilon}$ 的同伦型与 $M^{c-\varepsilon}$ 粘上一个 λ 维胞腔后的同伦型相同。

这一定理的证明思路针对环面上的高度函数这一特殊情形，在图 3.3 中予以展示。区域

$$M^{c-\varepsilon} = f^{-1}(-\infty, c - \varepsilon)$$

用重阴影来表示。我们将引入一个新函数 $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ ，使得在点 p 的某个小邻域中 $F < f$ ，而在这个邻域之外 F 和高度函数 f 完全相同。因此，区域 $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ 就由 $M^{c-\varepsilon}$ 以及点 p 附近的一个区域 H 组成。在图 3.3 中， H 使用水平阴影区域来表示的。

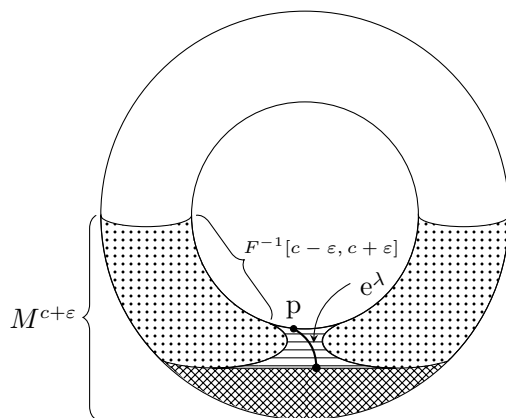


图 3.3

选择一个合适的胞腔 $e^\lambda \subset H$, (利用沿水平线的推移) 可以直接说明 $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ 是 $M^{c-\varepsilon} \cup H$ 的形变收缩核。最后, 通过对函数 F 和区域 $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 应用定理 3.1, 我们将会看到 $M^{c-\varepsilon} \cup H$ 是 $M^{c+\varepsilon}$ 的一个形变收缩核。这就是证明定理 3.2 的思想。

现在把这个证明详细写出来:

证明: 选取点 p 的邻域 U 中局部坐标系 $u^1, \dots, u^n$, 使得恒等式

$$f = c - (u^1)^2 - \dots - (u^\lambda)^2 + (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2$$

在整个 U 中都成立。因此, 临界点 p 具有坐标

$$u^1(p) = \dots = u^n(p) = 0.$$

取 $\varepsilon > 0$ 足够小, 使得

- (1) 区域 $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 是紧致的, 并且除了点 p 外不再含有其它临界点。
- (2) 在微分同胚嵌入映射

$$(u^1, \dots, u^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

下, U 的像包含闭球

$$\{(u^1, \dots, u^n): \sum (u^i)^2 \leq 2\varepsilon\}.$$

现在定义 e^λ 为 U 中的点的集合, 满足

$$(u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 \leq \varepsilon \text{ 和 } u^{\lambda+1} = \dots = u^n = 0.$$

最终情形的示意图如图 3.4 所示。

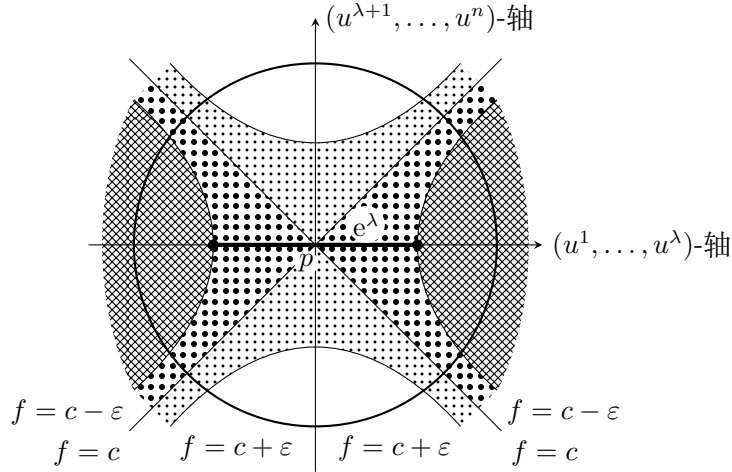


图 3.4

两根坐标线分别表示 $u^{\lambda+1} = \dots = u^n = 0$ 和 $u^1 = \dots = u^\lambda = 0$; 圆表示半径为 $\sqrt{2\varepsilon}$ 的球的边界; 两条双曲线分别表示超曲面 $f^{-1}(c-\varepsilon)$ 和 $f^{-1}(c+\varepsilon)$; 区域 $M^{c-\varepsilon}$ 用重阴影表示, 区域 $f^{-1}[c-\varepsilon, c]$ 用大点表示, $f^{-1}[c, c+\varepsilon]$ 则用小点表示; 通过点 p 的水平黑线代表胞腔 e^λ 。

注意, $e^\lambda \cap M^{c-\varepsilon}$ 正好是边界 ∂e^λ , 所以 e^λ 和 $M^{c-\varepsilon}$ 自然粘合为 $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ 。我们必须证明 $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ 是 $M^{c+\varepsilon}$ 的收缩核。

构造一个新的光滑函数 $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ 如下。令 $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个 C^∞ 函数满足条件:

- $\mu(0) > \varepsilon$,

- 对于 $r \geq 2\varepsilon$ 有 $\mu(r) = 0$,
- 对于一切 r 有 $-1 < \mu'(r) \leq 0$, 其中 $\mu' = \frac{d\mu}{dr}$ 。

现在令 F 在坐标领域 U 之外与 f 一致, 而在这个坐标邻域内, 则令

$$F = f - \mu[(u^1)^2 + \cdots + (u^\lambda)^2 + 2(u^{\lambda+1})^2 + \cdots + 2(u^n)^2].$$

容易验证在整个 M 上, F 是一个良定义的光滑函数。

为了方便定义两个函数

$$\xi, \eta : U \rightarrow [0, \infty)$$

为

$$\begin{aligned}\xi &= (u^1)^2 + \cdots + (u^\lambda)^2, \\ \eta &= (u^{\lambda+1})^2 + \cdots + (u^n)^2.\end{aligned}$$

则 $f = c - \xi + \eta$; 使得对于所有 $q \in U$,

$$F(q) = c - \xi(q) + \eta(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q)).$$

结论 1. 区域 $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$ 和区域 $M^{c+\varepsilon} = f^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$ 重合。

证明: 在椭球 $\xi + 2\eta \leq 2\varepsilon$ 之外, 函数 F 和 f 显然是相同的。在一个椭球之内, 我们有

$$F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + \varepsilon.$$

证毕。 □

结论 2. F 和 f 具有同样的临界点。

证明: 注意

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial \xi} &= -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1.\end{aligned}$$

由于

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta,$$

其中, 余切向量 $d\xi$ 和 $d\eta$ 只在原点处才同时为零, 可见除了原点 p 外, F 在 U 中没有其它临界点。

现在考虑区域 $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ 。根据结论 1 以及不等式 $F \leq f$, 我们看出

$$F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon] \subset f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon].$$

因此, 这个区域是紧致的。显然, 它除了可能含有点 p 以外不能含有 F 的其它临界点。但是

$$F(p) = c - \mu(0) < c - \varepsilon,$$

因此, $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ 不含 F 的任意临界点。结合定理 3.1, 这证明了以下结论。 □

结论 3. 区域 $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ 是 $M^{c+\varepsilon}$ 的形变收缩核。

为了方便记区域 $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ 为 $M^{c-\varepsilon} \cup H$; 其中, H 记为 $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon] - M^{c-\varepsilon}$ 的闭包。

注. 按照 Smale 的说法, 区域 $M^{c-\varepsilon} \cup H$ 被描述成 $M^{c-\varepsilon}$ 和一条“柄”粘起来。从定理 3.1 可见, 有边流形 $M^{c-\varepsilon} \cup H$ 微分同胚于 $M^{c+\varepsilon}$ 。这个事实在 Smale 的微分流形理论中是很重要的。(见 [12])。

现在考虑胞腔 e^λ ，由满足条件

$$\xi(q) \leq \varepsilon, \quad \eta(q) = 0$$

的所有点 $q \in U$ 组成。注意， e^λ 含于“柄” H 中。事实上，由于 $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$ ，我们有

$$F(q) \leq F(p) < c - \varepsilon;$$

但在 $q \in e^\lambda$ 时 $f(q) \geq c - \varepsilon$ 。

现在的情况如图 3.5 所示：区域 $M^{c-\varepsilon}$ 用重阴影表示；柄 H 用铅直箭头表示；区域 $F^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 则用点表示。

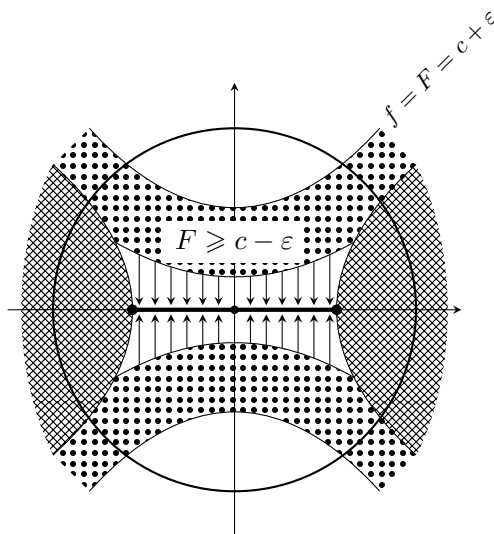


图 3.5

结论 4. 区域 $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ 是 $M^{c-\varepsilon} \cup H$ 的形变收缩核。

证明：图 3.5 中的铅直箭头形象地表示出一个形变收缩映射 $r_t : M^{c-\varepsilon} \cup H \rightarrow M^{c-\varepsilon} \cup H$ 。更确切的说，在邻域 U 之外，令 r_t 是恒等映射；在邻域 U 之内 r_t 的定义如下。我们需要分别考虑如图 3.6 所示的三种情形。

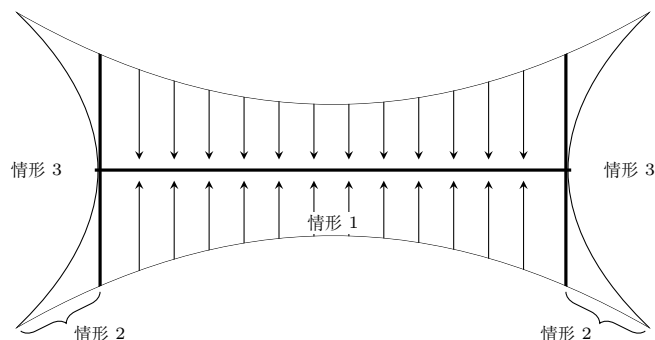


图 3.6

情形 1：在区域 $\xi \leq \varepsilon$ 之内，令 r_t 对应于变换

$$(u^1, \dots, u^n) \mapsto (u^1, \dots, u^\lambda, tu^{\lambda+1}, \dots, tu^n).$$

因此， r_1 是恒等映射， r_0 将整个区域 $\xi \leq \varepsilon$ 映到 e^λ 。从不等式 $\frac{\partial F}{\partial \eta} > 0$ 可见，每个 r_t 都把区域 $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ 映射到它本身。

情形 2: 在区域 $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$ 之内, 令 r_t 对应于变换

$$(u^1, \dots, u^n) \mapsto (u^1, \dots, u^\lambda, s_t u^{\lambda+1}, \dots, s_t u^n)$$

其中数 $s_t \in [0, 1]$ 定义为

$$s_t = t + (1 - t) \left(\frac{\xi - \varepsilon}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此, r_1 再一次是恒等映射, 并且 r_0 将整个区域映射到超曲面 $f^{-1}(c - \varepsilon)$ 。读者应该验证函数 $s_t u^i$ 在 $\xi \rightarrow \varepsilon$, $\eta \rightarrow 0$ 时保持连续。注意到这个定义在 $\xi = \varepsilon$ 时与情形 1 的定义一致。

情形 3: 在区域 $\eta + \varepsilon \leq \xi$ 内 (即: 在 $M^{c-\varepsilon}$ 内)。令 r_t 是恒等映射。当 $\xi = \eta + \varepsilon$ 时, 这个定义与前面的定义是一致的。

□

这就证明了 $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ 是 $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$ 的形变收缩核。从而, 再结合结论 3, 就完成了定理 3.2 的证明。 □

注 3.3. 更一般地, 如果假设: 在 $f^{-1}(c)$ 中存在 k 个非退化临界点 $p_1, \dots, p_k$, 指数分别为 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, 那么可以类似地证明: $M^{c+\varepsilon}$ 和 $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}$ 具有相同的同伦型。

注 3.4. 把定理 3.2 的证明稍加修改, 可以证明: M^c 也是 $M^{c+\varepsilon}$ 的形变收缩核。事实上, M^c 是 $F^{-1}(-\infty, c)$ 的形变收缩核, 而 $F^{-1}(-\infty, c)$ 则是 $M^{c+\varepsilon}$ 的形变收缩核 (见图 3.7)。将这一事实与定理 3.2 结合, 我们很容易看到 $M^{c-\varepsilon} \cup e^\lambda$ 是 M^c 的形变收缩核。

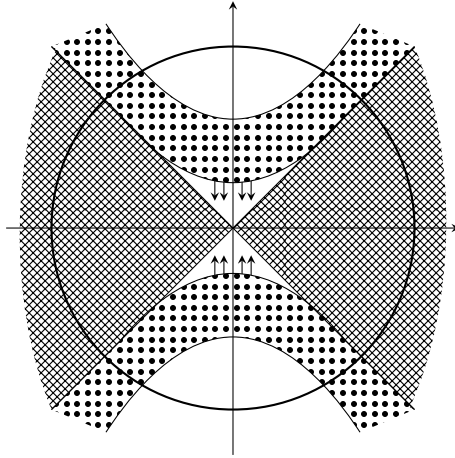


图 3.7: M^c 用重阴影表示, $F^{-1}[c, c + \varepsilon]$ 用点表示。

定理 3.5. 如果 f 是流形 M 上的可微函数, 没有退化临界点, 并且每个 M^a 都是紧致集, 那么 M 具有一个 CW 复形的同伦型: 对于指数为 λ 的每个临界点, 这个复形有一个 λ 维胞腔。

(CW 复形的定义见 [13])。

证明基于下面两个引理, 讨论一个拓扑空间和一个胞腔的粘合问题。

引理 3.6 (Whitehead). 令 φ_0 和 φ_1 是将球面 e^λ 映射到 X 的两个同伦映射, 则 X 的恒等映射可以扩张为一个同伦等价

$$k: X \cup_{\varphi_0} e^\lambda \rightarrow X \cup_{\varphi_1} e^\lambda.$$

证明：用下面的公式来定义同伦等价 k ：

$$\begin{aligned} k(x) &= x, & \text{如果 } x \in X, \\ k(tu) &= 2tu, & \text{如果 } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, u \in \dot{e}^\lambda, \\ k(tu) &= \varphi_{2-2t}(u), & \text{如果 } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

其中， φ_t 记为 φ_0 和 φ_1 之间的同伦；而 tu 记为标量 t 和单位向量 u 的乘积。对应的映射

$$\ell : X \underset{\varphi_1}{\cup} e^\lambda \rightarrow X \underset{\varphi_0}{\cup} e^\lambda$$

被定义为类似的公式。现在不难验证 $k\ell$ 和 ℓk 同伦于对应的恒等映射。因此 k 是一个同伦等价。□

更多细节读者可以参考 [14] 的引理 5。

引理 3.7. 令 $\varphi : \dot{e}^\lambda \rightarrow X$ 是一个粘合映射，那么任何同伦等价 $f : X \rightarrow Y$ 都可扩张为同伦等价

$$F : X \underset{\varphi}{\cup} e^\lambda \rightarrow Y \underset{f \circ \varphi}{\cup} e^\lambda.$$

证明：（按照 P. Hilton 的一篇未发表的文章）。映射 F 用下列条件定义：

$$\begin{cases} F|_X = f, \\ F|_{e^\lambda} = \text{恒等映射}. \end{cases}$$

令 $g : Y \rightarrow X$ 是 f 的同伦逆，映射

$$G : Y \underset{f \circ \varphi}{\cup} e^\lambda \rightarrow Y \underset{g \circ f \circ \varphi}{\cup} e^\lambda$$

用对应的条件定义：

$$\begin{cases} G|_Y = g, \\ G|_{e^\lambda} = \text{恒等映射}. \end{cases}$$

由于 $g \circ f \circ \varphi$ 同伦于 φ ，从引理 3.6 可见，存在同伦等价

$$k : X \underset{g \circ f \circ \varphi}{\cup} e^\lambda \rightarrow X \underset{\varphi}{\cup} e^\lambda.$$

我们先证明：复合映射

$$k \circ G \circ F : X \underset{\varphi}{\cup} e^\lambda \rightarrow X \underset{\varphi}{\cup} e^\lambda$$

同伦于恒等映射。

令 h_t 是 $g \circ f$ 和恒等映射之间的同伦，从 k ， G 和 F 的各个定义可见

$$\begin{aligned} k \circ G \circ F(x) &= gf(x), & \text{对于 } x \in X \\ k \circ G \circ F(tu) &= 2tu, & \text{对于 } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, u \in \dot{e}^\lambda \\ k \circ G \circ F(tu) &= h_{2-2t}\varphi(u), & \text{对于 } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

于是，所要的同伦

$$q_\tau : X \underset{\varphi}{\cup} e^\lambda \rightarrow X \underset{\varphi}{\cup} e^\lambda$$

就用下面的公式来定义：

$$\begin{aligned} q_\tau &= h_\tau(x), & \text{对于 } x \in X \\ q_\tau &= \frac{2}{1+\tau}tu, & \text{对于 } 0 \leq t \leq \frac{1+\tau}{2}, u \in \dot{e}^\lambda \\ q_\tau(tu) &= h_{2-2t+\tau}\varphi(u), & \text{对于 } \frac{1+\tau}{2} \leq t \leq 1, u \in \dot{e}^\lambda. \end{aligned}$$

因此， F 有左同伦逆。

根据下面的定理，证明 F 是同伦等价的论证将完全是形式化的。

结论 5. 如果一个映射 F 有一个左同伦逆 L 和一个右同伦逆 R ，则 F 是一个同伦等价；并且 R (或 L) 是一个两边同伦逆。

证明：关系

$$L \circ F \simeq \text{恒等映射}, \quad F \circ R \simeq \text{恒等映射},$$

意味着

$$L \simeq L(F \circ R) = (L \circ F)R \simeq R.$$

因此

$$R \circ F \simeq L \circ F \simeq \text{恒等映射},$$

证明了 R 是一个两边同伦逆。 □

引理 3.7 的证明现在可以如下完成。关系

$$k \circ F \circ G \simeq \text{恒等映射},$$

说明 F 有一个左同伦逆；并且一个类似的证明说明 G 有一个左同伦逆。

步骤一：因为 $k(G \circ F) \simeq \text{恒等映射}$ ，而 k 已知具有左同伦逆，可得 $(G \circ F)k \simeq \text{恒等映射}$ 。

步骤二：因为 $G(F \circ k) \simeq \text{恒等映射}$ ，而 G 已知具有左同伦逆，可得 $(F \circ k)G \simeq \text{恒等映射}$ 。

步骤三：因为 $F(k \circ G) \simeq \text{恒等映射}$ ，而 F 以 $k \circ G$ 作为左同伦逆，可得 F 是一个同伦等价。

这完成了引理 3.7 的证明。 □

证明：(定理 3.5 的证明) 令 $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$ 为 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 的临界值。因为每个 M^a 都是紧致集，所以序列 $\{c_i\}$ 没有聚点。对于 $a < c_1$ ，集合 M^a 是空集。假设 $a \neq c_1, c_2, c_3, \dots$ ，并且 M^a 具有一个 CW 复形的同伦型。令 c 是所有 $c_i > a$ 的最小者。通过定理 3.1, 3.2 和 3.5，当 ε 充分小时，对于确定的映射 $\varphi_1, \dots, \varphi_{j(c)}$ ， $M^{c-\varepsilon}$ 具有 $M^{c-\varepsilon} \cup \underset{\varphi_1}{e^{\lambda_1}} \cup \dots \cup \underset{\varphi_{j(c)}}{e^{\lambda_{j(c)}}}$ 的同伦型，并且存在同伦等价 $h: M^{c-\varepsilon} \rightarrow M^a$ 。我们已经假设：存在同伦等价 $h': M^a \rightarrow K$ ，其中 K 是一个 CW 复形。

于是每个 $h' \circ h \circ \varphi_j$ 通过胞腔逼近之后都同伦于一个映射

$$\psi_j: \dot{e}^{\lambda_j} \rightarrow K \text{ 的 } (\lambda_j - 1) \text{ - 维骨架}.$$

则 $K \cup \underset{\psi_1}{e^{\lambda_1}} \cup \dots \cup \underset{\psi_{j(c)}}{e^{\lambda_{j(c)}}}$ 是一个 CW 复形，并且根据引理 3.6 和 3.7，它和 $M^{c+\varepsilon}$ 有相同的同伦型。

通过归纳法，任何 M^a 都具有 CW 复形的同伦型。如果 M 是紧致的，则证毕。如果 M 不是紧致的，但所有临界点均在某个紧致集 M^a 内，那么类似于定理 3.1 的证明，可证明 M^a 是 M 的一个形变收缩核，所以定理依然得证。

如果存在无穷多个临界点，则上面的构造给我们一个同伦等价的无穷序列

$$\begin{array}{ccccccc} M^{a_1} & \subset & M^{a_2} & \subset & M^{a_3} & \subset & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K_1 & \subset & K_2 & \subset & K_3 & \subset & \dots \end{array}$$

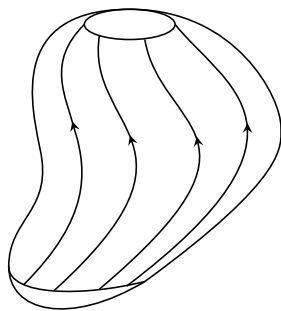
其中，每个映射都是前一个的扩张。令 K 表示直极限拓扑（即：可能的最细相容拓扑）中 K_i 的并，并且令 $g: M \rightarrow K$ 是极限映射。则 g 诱导所有维数的同伦群的同构。我们只需应用 [13] 的定理 1，就可以断定 g 是一个同伦等价。(Whitehead 的这个定理表述为：如果 M 和 K 都由 CW 复形所主导，则任意映射 $M \rightarrow K$ ，只要它诱导出各维数同伦群的同构，就必然是一个同伦等价。 K 当然由它本身主导。要证明 M 也是由 CW 复形所控制，只需把 M 看作某个 Euclid 空间中管状邻域的收缩核即可)。定理 3.5 证毕。 □

注. 我们也证明了: 每个 M^a 都具有有限 CW 复形的同伦型: 对于 M^a 中每个指数为 λ 的临界点, 这个复形有一个 λ 维胞腔。这个事实既是当 a 是一个临界值时也为真 (见注 3.4)。

§ 4. 例子

作为 § 3 的定理的一个应用, 我们证明:

定理 4.1 (Reeb). 若 M 是一个紧致流形, f 是 M 上一个可微函数, 只有两个临界点, 均非退化, 则 M 同胚于球面。



证明: 这个定理是从定理 3.1 以及 Morse 引理 (引理 2.2) 得到的。两个临界点必为极小点与极大点。比如说, $f(p) = 0$ 是极小值, $f(q) = 1$ 是极大值。若 ε 充分小, 则由引理 2.2 知, 集合 $M^\varepsilon = f^{-1}[0, \varepsilon]$ 和 $f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$ 都是闭的 n 维胞腔。但通过定理 3.1, M^ε 同胚于 $M^{1-\varepsilon}$ 。因此, M 是两个闭 n 维胞腔 $M^{1-\varepsilon}$ 和 $f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$ 沿着它们的公共边缘拼起来的并。现在很容易构造出 M 和 S^n 之间的同胚映射。□

注. 即使这两个临界点退化, 定理仍然为真。但是, 证明更困难一些。(见 [15] 中定理 1; 或者 [16] 的引理 1)。

注. 就 S^n 通常的微分结构而言, M 不必微分同胚于 S^n 。(见 [17]。在这篇文章中, 通过在其上找到一个具有两个非退化临界点的函数, 证明了一个带有非标准光滑结构的 7 维球面在拓扑上同胚于 S^7 。)

作为前面诸定理的另一个应用, 我们注意到: 如果一个 n 维流形上存在一个只有三个临界点的非退化函数, 那么 (通过 Poincaré 对偶) 这些临界点的指标分别为 0, n 和 $\frac{n}{2}$, 并且该流形同伦等价于在一个 $\frac{n}{2}$ 维球面再粘上一个 n 维胞腔。见 [18]。这种函数例如在实的或复的投影平面上就存在。

令 $\mathbb{CP}_n$ 是复投影 n 维空间。我们将 $\mathbb{CP}_n$ 视为复数 $(n+1)$ 元组 $(z_0, \dots, z_n)$ 组成的等价类的集合满足 $\sum |z_j|^2 = 1$ 。 $(z_0, \dots, z_n)$ 的等价类记为 $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$ 。

在 $\mathbb{CP}_n$ 上定义一个实值函数 f :

$$f(z_0 : z_1 : \dots : z_n) = \sum c_j |z_j|^2,$$

其中, $c_0, c_1, \dots, c_n$ 是各不相同的实常数。

为了确定 f 的临界点, 考虑下面的局部坐标系。令 U_0 是 $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$ 组成的集合满足 $z_0 \neq 0$, 并令

$$|z_0| \frac{z_j}{z_0} = x_j + iy_j.$$

则

$$x_1, y_1, \dots, x_n, y_n : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

是所要的坐标函数, 把 U_0 微分同胚地映射到 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的开单位球。显然,

$$|z_j|^2 = x_j^2 + y_j^2, \quad |z_0|^2 = 1 - \sum (x_j^2 + y_j^2),$$

所以在整个坐标邻域 U_0 中处处有

$$f = c_0 + \sum_{j=1}^n (c_j - c_0)(x_j^2 + y_j^2).$$

因此 f 在 U_0 中只有一个临界点, 位于这个坐标系的中心点

$$p_0 = (1 : 0 : 0 : \cdots : 0).$$

在这一点 f 是非退化的, 其指数等于满足 $c_j < c_0$ 的 j 的数的二倍。

类似地, 我们可以考虑另一个坐标系, 其中心点分别为

$$p_1 = (0 : 1 : 0 : \cdots : 0), \dots, p_n = (0 : 0 : \cdots : 0 : 1).$$

由此可得, $p_0, p_1, \dots, p_n$ 是 f 仅有的临界点; f 在 p_k 处的指标等于满足 $c_j < c_k$ 的 j 的数的二倍。因此, 在 0 到 $2n$ 之间的每个可能的偶数都恰好是一个临界点的指标。通过定理 3.5:

$\mathbb{CP}_n$ 等价于形如

$$e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \cdots \cup e^{2n}$$

的 CW 复形。

从而, $\mathbb{CP}_n$ 的整数同调群是

$$H_i(\mathbb{CP}_n; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 2, 4, \dots, 2n, \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

§ 5. Morse 不等式

Morse 原本处理这个主题的时候, 定理 3.5 不可用。 M 的拓扑与 M 上一个实值函数的临界点之间的关系则是用一组不等式来描述的。本节将描述这一原始观点。

定义. 令 S 是一个从某些空间的确定偶到整数的函数。 S 是**次可加的** (*subadditive*), 如果当 $X \supset Y \supset Z$ 我们有 $S(X, Z) \leq S(X, Y) + S(Y, Z)$ 。如果等号成立, S 被称为**可加的** (*additive*)。

作为一个例子, 把任何一个域 $\mathbb{F}$ 作为系数群, 令

$$\begin{aligned} R_\lambda(X, Y) &= (X, Y) \text{ 的第 } \lambda \text{ 个 Betti 数} \\ &= H_\lambda(X, Y; \mathbb{F}) \text{ 在 } \mathbb{F} \text{ 上的秩,} \end{aligned}$$

其中, (X, Y) 是使得这个秩是有限的任意空间偶。 R_λ 是次可加的, 这可通过考察 (X, Y, Z) 的正合序列的下面部分轻易验证:

$$\cdots \rightarrow H_\lambda(Y, Z) \rightarrow H_\lambda(X, Z) \rightarrow H_\lambda(X, Y) \rightarrow \cdots$$

Euler 示性数 $\chi(X, Y)$ 是可加的, 其中 $\chi(X, Y) = \sum (-1)^\lambda R_\lambda(X, Y)$ 。

引理 5.1. 令 S 是次可加的, $X_0 \subset \cdots \subset X_n$ 。则 $S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1})$ 。如果 S 是可加的, 则等号成立。

证明：对 n 用归纳法。 $n = 1$ 时等号显然成立， $n = 2$ 的情况为（次）可加性的定义。

如果结论对 $n - 1$ 为真，则 $S(X_{n-1}, X_0) \leq \sum_{i=1}^{n-1} S(X_i, X_{i-1})$ 。因此， $S(X_n, X_0) \leq S(X_{n-1}, X_0) + S(X_n, X_{n-1}) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1})$ 并且结论对 n 成立。□

令 $S(X, \emptyset) = S(X)$ 。在引理 5.1 中取 $X_0 = \emptyset$ ，我们有

$$S(X_n) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1}) \quad (1)$$

如果 S 是可加的，则等号成立。

令 M 是一个紧致流形而 f 是 M 上一个具有孤立、非退化、临界点的可微函数。令 $a_1 < \cdots < a_k$ ，使得 M^{a_i} 恰好含有 i 个临界点，而 $M^{a_k} = M$ 。于是

$$\begin{aligned} H_*(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) &= H_*(M^{a_{i-1}} \cup e^{\lambda_i}, M^{a_{i-1}}) \\ &= H_*(e^{\lambda_i}, \dot{e}^{\lambda_i}) \quad (\text{据截除定理}) \\ &= \begin{cases} \text{系数群,} & \text{维数为 } \lambda_i \text{ 时,} \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases} \end{aligned}$$

其中， λ_i 是临界点的指标。

对于 $\emptyset = M^{a_0} \subset \cdots \subset M^{a_k} = M$ 和 $S = R_\lambda$ 应用方程 (1)，我们有

$$R_\lambda(M) \leq \sum_{i=1}^n R_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_\lambda;$$

其中， C_λ 表示指标为 λ 的临界点的个数。把这个公式应用于 $S = \chi$ 的情况，我们有

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \chi(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = C_0 - C_1 + C_2 - \cdots \pm C_n.$$

这样，我们就证明了

定理 5.2 (弱 Morse 不等式). 如果 C_λ 表示紧致流形 M 上指标为 λ 的临界点的个数，则

$$R_\lambda(M) \leq C_\lambda, \quad (2)$$

$$\sum (-1)^\lambda R_\lambda(M) = \sum (-1)^\lambda C_\lambda. \quad (3)$$

稍强一些不等式可以由下面的讨论得证。

引理 5.3. 函数 S_λ 是次可加的，其中

$$S_\lambda(X, Y) = R_\lambda(X, Y) - R_{\lambda-1}(X, Y) + R_{\lambda-2}(X, Y) - \cdots \pm R_0(X, Y).$$

证明：给定向量空间的一个正合序列

$$\xrightarrow{h} A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} \cdots \longrightarrow D \longrightarrow 0.$$

注意到同态映射 h 的秩加上 i 的秩等于 A 的秩，因此，

$$\begin{aligned} \text{rank } h &= \text{rank } A - \text{rank } i \\ &= \text{rank } A - \text{rank } B + \text{rank } j \\ &= \text{rank } A - \text{rank } B + \text{rank } C - \text{rank } k \\ &\quad \dots \\ &= \text{rank } A - \text{rank } B + \text{rank } C - \cdots \pm \text{rank } D. \end{aligned}$$

因此, 最后一个表达式是 ≥ 0 。现在考虑一个三元组 $X \supset Y \supset Z$ 的同调正合序列。将这个计算应用到同态映射

$$H_{\lambda+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_{\lambda}(Y, Z),$$

我们看到

$$\text{rank } \partial = R_{\lambda}(Y, Z) - R_{\lambda}(X, Z) + R_{\lambda}(X, Y) - R_{\lambda-1}(Y, Z) + \cdots \geq 0.$$

合并同类项, 即得

$$S_{\lambda}(Y, Z) - S_{\lambda}(X, Z) + S_{\lambda}(X, Y) \geq 0.$$

证毕。 □

将 S_{λ} 这个次可加函数应用到空间

$$\emptyset \subset M^{a_1} \subset M^{a_2} \subset \cdots \subset M^{a_k},$$

我们得到 **Morse 不等式 (Morse inequalities)**:

$$S_{\lambda}(M) \leq \sum_{i=1}^k S_{\lambda}(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = c_{\lambda} - c_{\lambda-1} + \cdots \pm c_0,$$

或者

$$R_{\lambda}(M) - R_{\lambda-1}(M) + \cdots \pm R_0(M) \leq c_{\lambda} - c_{\lambda-1} + \cdots \pm c_0. \quad (4_{\lambda})$$

这些不等式的确比前面的不等式强一些。事实上, 将 (4_{λ}) 和 $(4_{\lambda-1})$ 相加, 得到 (2_{λ}) ; 当 $\lambda > n$ 时, 比较 (4_{λ}) 和 $(4_{\lambda-1})$, 则得到等式 (3)。

为了说明 Morse 不等式的用处, 让我们假设 $c_{\lambda+1} = 0$, 于是 $R_{\lambda+1}$ 也必须是零。比较不等式 (4_{λ}) 和 $(4_{\lambda+1})$, 我们看出

$$R_{\lambda} - R_{\lambda-1} + \cdots \pm R_0 = c_{\lambda-2} - c_{\lambda-3} + \cdots \pm c_0.$$

现在假设 $c_{\lambda-1}$ 也是零, 于是 $R_{\lambda-1} = 0$ 。同理可证

$$R_{\lambda-2} - R_{\lambda-3} + \cdots \pm R_0 = c_{\lambda-2} - c_{\lambda-3} + \cdots \pm c_0.$$

前面的等式减去这个等式, 我们得到下面的推论:

推论 5.4. 如果 $c_{\lambda+1} = c_{\lambda-1} = 0$, 则 $R_{\lambda} = c_{\lambda}$, 且 $R_{\lambda+1} = R_{\lambda-1} = 0$ 。

(当然, 这个结果也可以从定理 3.5 得到)。注意, 这个推论使我们能够求得复投影空间的同调群 (见 § 4) 而无须用定理 3.5。

§ 6. Euclid 空间中的流形

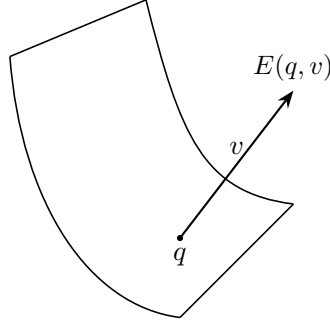
尽管我们迄今所考虑的只是流形上没有退化临界点的函数, 可是我们却还不曾证明: 这种函数总是存在。在这一节中, 我们将在嵌入 $\mathbb{R}^n$ 的任意流形上构造许多没有退化临界点的函数。事实上, 如果对于固定的 $p \in \mathbb{R}^n$ 定义函数 $L_p: M \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $L_p(q) = \|p - q\|^2$, 那么, 对于几乎一切 p , 函数 L_p 只有非退化临界点。

令 $M \subset \mathbb{R}^n$ 是一个流形, 其维数 $k < n$, 微分嵌入 $\mathbb{R}^n$ 。令 $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ 定义为

$$N = \{(q, v) : q \in M, v \text{ 在 } q \text{ 处垂直于 } M\}.$$

不难证明: N 是一个 n 维流形, 微分嵌入 $\mathbb{R}^{2n}$ 。(N 为 M 的法向量丛的全空间)。

令 $E: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 $E(q, v) = q + v$ (E 为“终点映射”)。



定义. $e \in \mathbb{R}^n$ 称为 (M, q) 的**焦点 (focal point)**, 具有**重数 (multiplicity)** μ , 如果 $e = q + v$, 其中 $(q, v) \in N$, E 在 (q, v) 处的 *Jacobi* 矩阵具有零化数 $\mu > 0$ 。点 e 称为 M 的焦点, 如果对于某个 $q \in M$, e 是 (M, q) 的**焦点 (focal point)**。

直观来说, M 的焦点是 $\mathbb{R}^n$ 中一个点, 使得邻近的流形在该处相交。

我们将用到下面这个定理, 而不证明。

定理 6.1 (Sard). 如果 M_1 和 M_2 是两个有可数基、维数相同的微分流形, 并且 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 是 C^1 映射, 那么临界点集的像在 M_2 中具有测度 0。

f 的临界点是使得 f 的 *Jacobi* 矩阵为奇异矩阵的点。定理 6.1 的证明见 [19]。

推论 6.2. 对于几乎所有 $x \in \mathbb{R}^n$, 点 x 不是 M 的焦点。

证明: 我们刚才已经看到 N 是一个 n 维流形。点 x 是焦点, 当且仅当 x 属于 $E: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ 的临界点集的像。因此焦点集具有测度 0。□

为了更好地理解焦点这个概念, 比较方便的是引入 Euclid 空间中流形的“第二基本形式”。我们不尝试给出一个不变的定义, 但是将使用固定局域坐标系。

令 $u^1, \dots, u^k$ 是流形 $M \subset \mathbb{R}^n$ 上一个区域的坐标。则从 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的包含映射确定 n 个光滑函数

$$x_1(u^1, \dots, u^k), \dots, x_n(u^1, \dots, u^k).$$

这些函数将简记为 $\vec{x}(u^1, \dots, u^k)$, 其中 $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 。为一致起见, 点 $q \in M \subset \mathbb{R}^n$ 现在也记为 $\vec{q}$ 。

与坐标系相关的**第一基本形式 (the first fundamental form)** 定义为实值函数组成的对称矩阵

$$(g_{ij}) = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} \right).$$

另一方面, **第二基本形式 (the second fundamental form)** 是向量值函数组成的对称矩阵 $(\vec{\ell}_{ij})$ 。

这个矩阵定义如下: 向量 $\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j}$ 在 M 的某一点处可以表述为 M 的一个切向量和 M 的一个法向量之和。定义 $\vec{\ell}_{ij}$ 为 $\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j}$ 的法向分量。给定 $\vec{v}$ 是 M 在 $\vec{q}$ 处的一个任意单位向量, 矩阵

$$\left(\vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} \right) = (\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij})$$

可以称为“ M 在 $\vec{q}$ 处沿方向 $\vec{v}$ 的第二基本形式”。

为简化讨论, 假设所选的坐标系使得 (g_{ij}) 在 $\vec{q}$ 的值是单位矩阵。则矩阵 $(\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij})$ 的特征值 $K_1, \dots, K_k$ 称为 M 在 $\vec{q}$ 处沿法方向 $\vec{v}$ 的**主曲率 (principal curvature)**。它们的倒数 $K_1^{-1}, \dots, K_k^{-1}$ 称为**主曲率半径 (principal radii of curvature)**。当然, 可能遇到 $(\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij})$ 是奇异矩阵的情况。在这种情况下, 各个 K_i 中将有一个或更多个为零, 因而对应的曲率半径 K_i^{-1} 不确定。

现在考虑由所有的 $\vec{q} + t\vec{v}$ 组成的法线 ℓ , 其中 $\vec{v}$ 是一个固定的单位向量, 在 $\vec{q}$ 处与 M 正交。

引理 6.3. $(M, \vec{q})$ 沿 ℓ 的焦点正好是 $\vec{q} + K_i^{-1}\vec{v}$ 这些点, 其中 $1 \leq i \leq k$, $K_i \neq 0$ 。因此, $(M, \vec{q})$ 沿着 ℓ 最多有 k 个焦点, 每个焦点都是按其重数计算的。

证明: 选取流形上 $n-k$ 个向量场 $\vec{w}_1(u^1, \dots, u^k), \dots, \vec{w}_{n-k}(u^1, \dots, u^k)$ 使得 $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-k}$ 是单位向量, 彼此正交, 且均与 M 正交。我们可以在流形 $N \subset M \times \mathbb{R}^n$ 上引入坐标 $(u^1, \dots, u^k, t^1, \dots, t^{n-k})$ 如下: 令 $(u^1, \dots, u^k, t^1, \dots, t^{n-k})$ 对应于点

$$(\vec{x}(u^1, \dots, u^k), \sum_{\alpha=1}^{n-k} t^\alpha \vec{w}_\alpha(u^1, \dots, u^k)) \in N.$$

则函数

$$E: N \rightarrow \mathbb{R}^n$$

产生对应关系

$$(u^1, \dots, u^k, t^1, \dots, t^{n-k}) \mapsto \vec{e} \mapsto \vec{x}(u^1, \dots, u^k) + \sum_{\alpha=1}^{n-k} t^\alpha \vec{w}_\alpha(u^1, \dots, u^k),$$

具有下面的偏导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{e}}{\partial u^i} &= \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} + \sum_{\alpha} t^\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i}, \\ \frac{\partial \vec{e}}{\partial t^\beta} &= \vec{w}_\beta. \end{aligned}$$

对这些 n 个向量与线性无关的向量 $\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^k}, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{n-k}$ 逐一取内积得到一个 $n \times n$ 矩阵, 这个矩阵的秩等于 E 在对应点处的 Jacobi 矩阵的秩。

这个 $n \times n$ 矩阵显然有下面的形式

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \sum_{\alpha} t^\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} \right) & \left(\sum_{\alpha} t^\alpha \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \vec{w}_\beta \right) \\ 0 & \text{单位矩阵} \end{pmatrix}.$$

因此, 它的秩等于左上角的分块矩阵的秩再加上 $n-k$ 。利用恒等式

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\vec{w}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} \right) = \frac{\partial \vec{w}_\alpha}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \vec{w}_\alpha \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j},$$

我们看到左上角分块矩阵正好就是矩阵

$$\left(g_{ij} - \sum_{\alpha} t^\alpha \vec{w}_\alpha \cdot \vec{\ell}_{ij} \right).$$

因此:

结论 6.4. $\vec{q} + t\vec{v}$ 是 $(M, \vec{q})$ 的重数为 μ 的焦点, 当且仅当矩阵

$$\left(g_{ij} - t\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij} \right) \quad (*)$$

是零化数为 μ 的奇异矩阵。

现在假设 (g_{ij}) 是单位矩阵, 则 $(*)$ 是奇异的当且仅当 $\frac{1}{t}$ 是矩阵 $(\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij})$ 的一个特征值。此外, 重数 μ 等于 $\frac{1}{t}$ 作为特征值的重数, 引理 6.3 证毕。□

现在对于固定的 $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$, 让我们来研究函数

$$L_{\vec{p}} = f: M \rightarrow \mathbb{R},$$

其中

$$\begin{aligned} f(\vec{x}(u^1, \dots, u^k)) &= \|\vec{x}(u^1, \dots, u^k) - \vec{p}\|^2 \\ &= \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{p}. \end{aligned}$$

我们有

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = 2 \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot (\vec{x} - \vec{p}).$$

因此, f 在 $\vec{q}$ 处有一个临界点当且仅当 $\vec{q} - \vec{p}$ 是 M 在 $\vec{q}$ 处的法向量。

在临界点处的二阶偏导数是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2 \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) \right).$$

如引理 6.3 所证明, 令 $\vec{p} = \vec{x} + t\vec{v}$, 这变成

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2 \left(g_{ij} - t\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij} \right).$$

因此:

引理 6.5. 点 $\vec{q} \in M$ 是 $f = L_{\vec{p}}$ 的退化临界点当且仅当 $\vec{p}$ 是 $(M, \vec{q})$ 的焦点。 $\vec{q}$ 作为临界点的零化数等于 $\vec{p}$ 作为焦点的重数。

把这个结果同 Sard 定理的推论 6.2 结合起来, 我们立即得到

定理 6.6. 对于几乎所有 $p \in \mathbb{R}^n$ (即除了一个测度为零的集合外), 函数

$$L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$$

没有退化临界点。

这个定理还有几个有趣的推论。

推论 6.7. 在任意流形 M 上都存在没有退化临界点的可微函数, 使得每个 M^a 都是紧致的。

证明: 根据定理 6.6 以及 n 维流形 M 可以微分嵌入 $\mathbb{R}^{2n+1}$ 作为一个闭子集的事实 (见 [20], 113 页) 得证。 $\square$

应用 1. 微分流形具有 CW 复形的同伦型。这是从上述推论以及定理 3.5 推出的。

应用 2. 在紧致流形 M 上存在向量场 X , 使得 X 的临界点的指标之和等于 M 的 Euler 示性数 $\chi(M)$ 。证明如下: 对于 M 上任意可微函数 f , 我们有 $\chi(M) = \sum (-1)^\lambda c_\lambda$, 其中 c_λ 是指标为 λ 的临界点的个数, 但是, 在 f 的指标为 λ 的一点处, 向量场 $\text{grad } f$ 的指标是 $(-1)^\lambda$ 。

由此可见, M 上任意向量场的指标之和都等于 $\chi(M)$, 因为这个和数是一个拓扑不变量 (见 [21], § 39.7)。

上面的推论可以加强如下。令 $k \geq 0$ 是一个整数, $K \subset M$ 是紧致集。

推论 6.8. 任意有界光滑函数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ 均可用无退化临界点的光滑函数 g 来均匀逼近。此外, 可以选择函数 g , 使得对于 $i \leq k$ 时, g 的 i 阶导数在紧致集 K 上也均匀逼近 f 的对应导数。 (见 [22])。

证明：选择一个嵌入映射 $h: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ，把 M 嵌入某个 Euclid 空间作为有界子集，使得第一个坐标 h_1 正好是已知函数 f 。令 c 是一个充分大的数。在点 $(-c, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ 的附近选取一点

$$p = (-c + \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n),$$

使得函数 $L_p: M \rightarrow \mathbb{R}$ 非退化。令

$$g(x) = \frac{L_p(x) - c^2}{2c},$$

g 显然是非退化的。通过简单的计算，我们有

$$g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{h_i(x)^2}{2c} - \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i h_i(x)}{c} + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i^2}{2c} - \varepsilon_1.$$

显然，如果 c 充分大且 ε_i 充分小，则 g 将如要求逼近 f 。□

上面的理论也可以用来描述函数

$$L_p: M \rightarrow \mathbb{R}$$

在一个临界点处的指标。

引理 6.9 (L_p 的指标定理). L_p 在一个非退化临界点 $q \in M$ 处的指标等于 (M, q) 在从 q 到 p 的线段上的焦点数，每个焦点都是按其重数计算的。

第三章中有一个类似的命题 (Morse 指标定理) 是非常重要的。

证明：矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 L_p}{\partial u^i \partial u^j} \right) = 2(g_{ij} - t\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij})$$

的指标等于负特征值的个数。假设 (g_{ij}) 是单位矩阵，这个指标就等于 $(\vec{v} \cdot \vec{\ell}_{ij})$ 的特征值中 $\geq \frac{1}{t}$ 的个数。把这个论述与引理 6.3 比较就得到所要的结论。□

§ 7. 超平面截面上的 Lefschetz 定理

作为已经建立的那些理论的应用，我们来证明某些有关代数簇的拓扑结构的结果，这些结果本来是 Lefschetz 利用完全不同的论证证明的，我们现在的讲法属于 Andreotti 和 Frankel³。

定理 7.1. 如果 $M \subset \mathbb{C}^n$ 是 n 维复空间的非奇异仿射代数簇，它的实维数为 $2k$ ，则在 $i > k$ 时， $H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$ 。

这是下述更强的定理的推论。

定理 7.2. 令 M 是一个复解析流形，其复维数为 k ，双解析嵌入 $\mathbb{C}^n$ 作为闭子集，则 M 具有 k 维 CW 复形的同伦型。

证明分为以下几步：首先考虑 k 个复变量的二次型

$$Q(z^1, \dots, z^k) = \sum b_{hj} z^h z^j.$$

如果我们用 $x^h + iy^h$ 来代替 z^h ，然后取 Q 的实部，我们就得到具有 $2k$ 个是变量的一个实二次型：

$$Q'(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^k) = \sum b_{hj} (x^h + iy^h)(x^j + iy^j) \text{ 的实部.}$$

³ 见 [23] 和 [24]。

结论 1. 如果 e 是 Q' 的 μ 重特征值, 则 $-e$ 也是一个特征值, 并且具有同样的重数 μ 。

证明: 恒等式 $Q(iz^1, \dots, iz^k) = -Q(z^1, \dots, z^k)$ 表明: 二次型 Q' 可以通过变量的正交变换变成 $-Q'$ 。由此显然得到结论 1。□

现在考虑一个复流形 M , 双解析嵌入 $\mathbb{C}^n$ 作为闭子集。令 q 是 M 的一点。

结论 2. (M, q) 沿任意法线 ℓ 的焦点成对出现, 对称地分布在 q 的两侧。

另一方面, 如果 $q + tv$ 是焦点, 则 $q - tv$ 也是焦点, 并且具有同样的重数。

证明: 在 q 的一个邻域内取 M 的复坐标 $z^1, \dots, z^k$, 使得 $z^1(q) = \dots = z^k(q) = 0$ 。包含映射 $M \rightarrow \mathbb{C}^n$ 确定 n 个复解析函数

$$w_\alpha = w_\alpha(z^1, \dots, z^k), \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

令 v 是固定单位向量, 在 q 处与 M 正交。考虑 w 和 v 的 Hermite 内积

$$\sum w_\alpha \bar{v}_\alpha = \sum w_\alpha(z^1, \dots, z^k) \bar{v}_\alpha,$$

它可以展开为复幂级数:

$$\sum w_\alpha(z^1, \dots, z^k) \bar{v}_\alpha = \text{常数} + Q(z^1, \dots, z^k) + \text{高阶项},$$

其中, Q 表示一个二次齐次函数 (因为 v 与 M 正交, 所以不出现线性项)。

现在用 $x^h + iy^h$ 来代替 z^h 以得到 M 的一个实坐标系并考虑实内积

$$w \cdot v = \sum w_\alpha \bar{v}_\alpha \text{ 的实部}$$

它具有实幂级数展开:

$$w \cdot v = \text{常数} + Q'(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^k) + \text{高次项},$$

其中, 二次型 Q' 显然确定 M 在 q 处沿法方向 v 的第二基本形式。按照结论 1, Q' 的特征值是正负成对出现的, 所以 (M, q) 沿通过 q 和 $q + v$ 的直线的焦点也是对称地成对出现, 这就证明了结论 2。□

我们现在准备好证明定理 7.2。证明: (定理 7.2 的证明) 选取点 $p \in \mathbb{C}^n$ 使得距离平方函数

$$L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$$

没有退化临界点。因为 M 是 $\mathbb{C}^n$ 的闭子集, 显然可见, 每个集合

$$M^a = L_p^{-1}[0, a]$$

是紧致的。现在考虑 L_q 在临界点 q 处的指标, 按照引理 6.9, 这个指标等于 (M, q) 在从 p 到 q 的线段上的焦点个数。但是, 沿着通过 p 和 q 的整个直线上至多有 $2k$ 个焦点, 对称地分布在 q 的两侧, 因而至多只有 k 个焦点位于 p 和 q 之间。

于是, L_p 在 q 处的指标 $\leq k$, 可见 M 和一个维数 $\leq k$ 的 CW 复形有相同的同伦型, 定理 7.2 证毕。□

推论 7.3 (Lefschetz). 令 V 是复投影空间 $\mathbb{CP}_n$ 中的一个代数簇, 其复维数是 k 。 P 是 $\mathbb{CP}_n$ 中的一张超平面, 含有 V 的奇点 (如果存在的话)。因此, 包含映射

$$V \cap P \rightarrow V$$

诱导维数小于 $k-1$ 的各同调群的同构。此外，诱导同态

$$H_{k-1}(V \cap P; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{k-1}(V; \mathbb{Z})$$

是满射。

证明：利用空间偶 $(V, V \cap P)$ 的正合序列，显然只须证明：当 $r \leq k-1$ 时， $H_r(V, V \cap P; \mathbb{Z}) = 0$ 。但 Lefschetz 对偶定理断言

$$H_r(V, V \cap P; \mathbb{Z}) \cong H^{2k-r}(V \setminus (V \cap P); \mathbb{Z}).$$

但 $V - (V \cap P)$ 是仿射空间 $\mathbb{CP}_n - P$ 中的非奇异代数簇，因此从定理 7.2 得到对于 $r \leq k-1$ ，上式右端的群是零群。□

这个结果可以加强如下：

定理 7.4 (Lefschetz). 在上面推论的假设下，当 $r < k$ 时，对应的同伦群 $\pi_r(V, V \cap P)$ 是零。

证明：这个证明将基于下述事实：存在 $V \cap P$ 的一个邻域 U ，可以在 V 中形变到 $V \cap P$ 。这个事实，例如，可以用代数簇可剖分定理来证明。

代替函数 $L_p: V \setminus (V \cap P) \rightarrow \mathbb{R}$ ，我们将用 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ ，定义为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{对于 } x \in V \cap P, \\ \frac{1}{L_p}, & \text{对于 } x \notin P. \end{cases}$$

因为 L_p 的临界点的指标 $\leq k$ ，可见 f 的临界点的指标 $\geq 2k - k = k$ 。函数 f 在 $\varepsilon \leq f < \infty$ 时没有退化临界点，所以 V 的同伦型与 $V^\varepsilon = f^{-1}[0, \varepsilon]$ 粘上有限多个维数 $\geq k$ 的胞腔后的同伦型相同。

选取 ε 充分小，使得 $V^\varepsilon \subset U$ 。令 I^r 表示 r 维单位方体。则因为 $r < k$ ，每个把 $(I^r, \dot{I}^r)$ 映射到 $(V, V \cap P)$ 的映射都可以形变为一个映射

$$(I^r, \dot{I}^r) \rightarrow (V^\varepsilon, V \cap P) \subset (U, V \cap P),$$

因此，可以形变为映入 $(V \cap P)$ 的映像，证毕。□

第二章 Riemann 几何概要

§ 8. 协变微分

§ 9. 曲率张量

§ 10. 测地线与完备性

第三章 对变分学的应用：测地线

- § 11. 光滑流形的道路空间
- § 12. 道路的能量
- § 13. 能量函数在临界道路处的 Hesse 泛函
- § 14. Jacobi 场, E_{**} 的零化子空间
- § 15. 指标定理
- § 16. Ω^c 的有限维逼近
- § 17. 全道路空间的拓扑结构
- § 18. 非共轭点的存在性
- § 19. 拓扑结构与曲率的某些关系

第四章 对 Lie 群和对称空间的应用

§ 20. 对称空间

§ 21. Lie 群是对称空间

§ 22. 极小测地线组成的全流形

§ 23. Bott 关于么正群的周期性定理

§ 24. 正交群的周期性定理

附录 A 单调的并同伦型

参考文献

- [1] Richard S. Palais. “Morse Theory on Hilbert Manifolds”. *Topology*, 2: pp. 299–340. 1963.
- [2] Stephen Smale. “Morse Theory and a Non-linear Generalization of the Dirichlet Problem”. *Annals of Mathematics*, 802: pp. 382–396. 1964.
- [3] Michael Atiyah, and Raoul Bott. “On the Periodicity Theorem for Complex Vector Bundles”. *Acta Mathematica*, 112: pp. 229–247. 1964.
- [4] R. Wood. “Banach Algebras and Bott Periodicity”. *Topology*, 4: pp. 371–389. 1965.
- [5] John Milnor. *Lectures on the h-Cobordism Theorem*. Notes by L. Siebenmann and J. Sondow. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1965.
- [6] Marston Morse. *The Calculus of Variations in the Large*. Vol. 18. American Mathematical Society Colloquium Publications. Reprint of the 1932 original. Providence, RI: American Mathematical Society, 1996.
- [7] H. Seifert, and W. Threlfall. *Variationsrechnung im Grossen: (Theorie von Marston Morse)*. New York: Chelsea Publishing Company, 1951.
- [8] Raoul Bott. “The Stable Homotopy of The Classical Groups”. *Annals of Mathematics*, 702: pp. 313–337. 1959.
- [9] Raoul Bott. “Morse Theory and its Application to Homotopy Theory”. Lecture notes by A. van de Ven. 1960.
- [10] Garrett Birkhoff, and Saunders Mac Lane. *A Brief Survey of Modern Algebra*. Second. The Macmillan Co., New York; Collier-Macmillan Ltd., London, 1965.
- [11] Lawrence M. Graves. *The Theory of Functions of Real Variables*. Second. New York–Toronto–London: McGraw-Hill, 1956.
- [12] Stephen Smale. “Generalized Poincaré’s Conjecture in Dimensions Greater than Four”. *Annals of Mathematics*, 742: pp. 391–406. 1961.
- [13] J. H. C. Whitehead. “Combinatorial Homotopy. I”. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55: pp. 213–245. 1949.
- [14] J. H. C. Whitehead. “On Simply Connected, 4-dimensional Polyhedra”. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 22: pp. 48–92. 1949.
- [15] John W. Milnor. “Differential Topology”. In: *Lectures on Modern Mathematics*. Ed. by T. L. Saaty. Vol. II. New York–London–Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1964, pp. 165–183.
- [16] Ronald Rosen. *A Weak Form of the Star Conjecture for Manifolds*. Abstract 570-28. 1960.

- [17] John W. Milnor. “On Manifolds Homeomorphic to the 7-Sphere”. *Annals of Mathematics*, 642: pp. 399–405. 1956.
- [18] Jr. James Eells, and Nicolaas H. Kuiper. “Manifolds Which Are Like Projective Planes”. *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, 14: pp. 5–46. 1962.
- [19] Georges De Rham. *Variétés Différentiables*. English translation: Differentiable Manifolds, 1984. Paris: Hermann, 1960.
- [20] Hassler Whitney. *Geometric Integration Theory*. Originally published: Princeton University Press, 1957. Mineola, NY: Dover Publications Inc., 2005.
- [21] Norman Steenrod. *The Topology of Fibre Bundles*. Vol. 14. Princeton Mathematical Series. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1951.
- [22] Marston Morse. “The Critical Points of a Function of n Variables”. *Transactions of the American Mathematical Society*, 331: pp. 72–91. 1931.
- [23] Solomon Lefschetz. *L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique*. Paris: Gauthier-Villars, 1924.
- [24] Aldo Andreotti, and Theodore Frankel. “The Lefschetz Theorem on Hyperplane Sections”. *Annals of Mathematics*, 692: pp. 713–717. 1959.
- [25] Michael F. Atiyah, Raul Bott, and A. Shapiro. “Clifford Modules”. *Topology*, 3(suppl. 1): pp. 3–38. 1964.
- [26] W. Ambrose. “The Index Theorem in Riemannian Geometry”. *Annals of Mathematics*, 732: pp. 49–86. 1961.
- [27] Richard L. Bishop, and Richard J. Crittenden. *Geometry of Manifolds*. AMS Chelsea Publishing. Reprint of the 1964 original. Providence, RI: American Mathematical Society, 2001.
- [28] Marcel Berger. “Sur Certaines Variétés Riemanniennes à Courbure Positive”. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 247: pp. 1165–1168. 1958.
- [29] Shiing-shen Chern. “On Curvature and Characteristic Classes of a Riemann Manifold”. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 20: pp. 117–126. 1955.
- [30] R. Courant. “Über die Abhängigkeit der Schwingungszahlen einer Membran von ihrer Begrenzung und über asymptotische Eigenwertverteilung”. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*: pp. 255–264. 1919.
- [31] Georges De Rham. “Sur la Réductibilité d'un Espace de Riemann”. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 26: pp. 328–344. 1952.
- [32] Beno Eckmann. “Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon über die Komposition Quadratischer Formen”. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 15: pp. 358–366. 1943.
- [33] N. V. Efimov. “Impossibility of a Complete Regular Surface in Euclidean 3-Space Whose Gaussian Curvature Has a Negative Upper Bound”. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 150: pp. 1206–1209. 1963.
- [34] Samuel I. Goldberg. *Curvature and Homology*. Vol. XI. Pure and Applied Mathematics. New York–London: Academic Press, 1962.

- [35] David Hilbert, and Stefan Cohn-Vossen. *Geometry and the Imagination*. Trans. by P. Neményi. Translation of *Anschauliche Geometrie*, 1932. New York, N.Y.: Chelsea Publishing Company, 1952.
- [36] Sigurdur Helgason. *Differential Geometry and Symmetric Spaces*. Vol. XII. Pure and Applied Mathematics. New York–London: Academic Press, 1962.
- [37] Noel J. Hicks. *Notes on Differential Geometry*. Van Nostrand Mathematical Studies 3. Princeton, N.J.–Toronto–London: D. Van Nostrand Co., Inc., 1965.
- [38] Heinz Hopf, and Willi Rinow. “Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche”. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 31: pp. 209–225. 1931.
- [39] Sze-tsen Hu. *Homotopy Theory*. Vol. VIII. Pure and Applied Mathematics. New York–London: Academic Press, 1959.
- [40] Kenkichi Iwasawa. “On Some Types of Topological Groups”. *Annals of Mathematics*, 502: pp. 507–558. 1949.
- [41] Detlef Laugwitz. *Differential and Riemannian Geometry*. Trans. by Fritz Steinhardt. New York–London: Academic Press, 1965.
- [42] Sumner B. Myers. “Riemannian Manifolds with Positive Mean Curvature”. *Duke Mathematical Journal*, 8: pp. 401–404. 1941.
- [43] Katsumi Nomizu. *Lie Groups and Differential Geometry*. Tokyo: The Mathematical Society of Japan, 1956.
- [44] Jean-Pierre Serre. “Homologie Singulière des Espaces Fibrés. Applications”. *Annals of Mathematics*, 542: pp. 425–505. 1951.
- [45] Shlomo Sternberg. *Lectures on Differential Geometry*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1964.
- [46] J. L. Synge. “On the Connectivity of Spaces of Positive Curvature”. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 71: pp. 316–320. 1936.
- [47] J. H. C. Whitehead. “Convex Regions in the Geometry of Paths”. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1: pp. 33–42. 1932.
- [48] Kentaro Yano, and Salomon Bochner. *Curvature and Betti Numbers*. Annals of Mathematics Studies 32. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1953.